This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

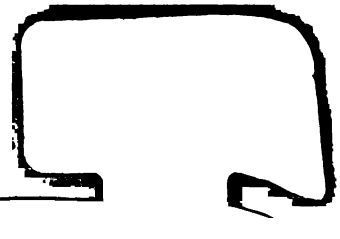
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907955 0



CEF

N°.

du Catalogue des Livres de fonds et d'assortiment de J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les ...tiques, quai des Au-...°. 25, à Paris.

ÉLÉMENS GÉNÉRAUX
DES PRINCIPALES PARTIES
DES MATHÉMATIQUES,
NÉCESSAIRES
A L'ARTILLERIE ET AU GÉNIE.

Par M. l'Abbé DEIDIER, *Professeur Royal de Mathématique aux Ecoles d'Artillerie de* LA FERE.

NOUVELLE ÉDITION,

Dirigée, rectifiée, présentée avec plus d'ordre & de goût; &, en plusieurs articles, réformée ou perfectionnée, par l'Auteur de la *THÉORIE DES ÊTRES SENSIBLES.*

TOME PREMIER.

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

A PARIS, RUE DAUPHINE;

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Pere, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie.

M. DCC. LXXIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

AVERTISSEMENT
DU LIBRAIRE.

Comme on nous a redemandé de toutes parts ce Cours de Mathématique de M. l'Abbé DEIDIER, *dont l'édition étoit épuiſée depuis quelque tems ; & que pluſieurs Profeſſeurs qui en connoiſſoient le mérite nous ont ſollicités de le faire réimprimer : pour nous prêter à leurs vues & au deſir du public, nous nous ſommes déterminés à donner cette nouvelle édition exécutée avec toute l'exactitude & la correction poſſibles.*

La Préface de la premiere édition que nous joignons à la ſuite de cet Avertiſſement, en fait connoître l'objet, le fond, & la maniere. Chacun ſait que le caractere diſtinctif des écrits de notre Auteur, celui qui les fait le plus rechercher, c'eſt la clarté jointe à la ſolidité : qualités eſſentielles dans tous les genres, mais ſur-tout dans le genre mathématique.

Cette nouvelle édition a été dirigée & rectifiée, &, en pluſieurs endroits, ſimplifiée & perfectionnée par un Auteur dont le public connoît & les lumieres & le goût, & nous en avons revu nous-mêmes les épreuves avec le plus grand ſoin. En comparant cette édition avec la précédente, on verra combien il importe à un ouvrage ſcientifique d'être imprimé avec un ordre & une méthode propres à en rendre la lumiere plus vive & plus ſaillante, & à en faire valoir toute la richeſſe.

On a eu une attention ſpéciale à ne faire dans cette nouvelle édition que le moins de changemens & d'additions qu'il étoit poſſible, de crainte de tomber dans le défaut de certains éditeurs qui alterent & défigurent les ouvrages des grands maîtres, ſoit en y inſérant de longs commentaires, ſouvent inutiles : ſoit en dérangeant l'ordre & l'enchaînement de leurs idées, qui en fait ordinairement le mérite caractériſtique : ſoit

enfin en y intercalant hors de propos ou ſans néceſſité, leurs propres ſpéculations & leurs lumieres particulieres, ſouvent peu propres à ſe fondre & à s'incorporer avec celles de ces hommes célebres; enſorte que dans un ancien ouvrage qui reparoît ſous une nouvelle forme, on cherche quelquefois vainement & l'ouvrage même & ſon Auteur. Dans cette nouvelle édition du Cours de Mathématique de M. l'abbé Deidier, on a le Cours même de cet auteur: lorſqu'on a été obligé d'y faire quelques changemens ou additions, on a eu ſoin d'en prévenir le lecteur par une note.

Le Traité de Perſpective qui terminoit l'ancienne édition de ce Cours de Mathématique, a été ſupprimé dans celle-ci, comme étant trop étranger aux militaires pour leſquels il a été principalement compoſé. Cependant, comme ce Traité, bon & utile par lui-même, peut convenir à des perſonnes d'une autre état, & ſur-tout aux artiſtes, pour ne rien perdre des écrits précieux de cet Auteur, nous l'avons réimprimé à part, enrichi de quelques notes inſtructives par M. Cochin, deſſinateur & graveur du premier mérite, qui joint à ſes rares talens, une connoiſſance profonde de la perſpective: ce traité ſe vendra ſéparément à ceux qui ſe trouveront dans le cas d'en avoir beſoin.

PRÉFACE.

APRÈS tous les Traités que j'ai mis au jour ſur preſque toutes les parties des Mathématiques, on ſeroit ſans doute ſurpris de voir paroître de nouveaux Élémens de ma façon, ſi je ne rapportois les motifs qui m'ont engagé à entreprendre ce travail. Lorſque je compoſai mon Cours en cinq volumes, mon deſſein étoit d'écrire pour l'inſtruction du Public en général, & par conſequent pour toutes les profeſſions & pour tous les états auxquels les Sciences Mathématiques peuvent être de quelque ſecours: de-là cette eſpece de diffuſion, ou pour mieux dire, ces longs détails dont il ne m'étoit pas poſſible de me diſpenſer dès que je voulois me rendre utile également à tous. Aujourd'hui mes vues ſont bien différentes: les perſonnes pour qui principalement je me ſuis attaché à cet Ouvrage, ſont des Militaires deſtinés à un Service qui demande des connoiſſances particulieres & beaucoup de ſavoir. On conçoit d'abord aiſément qu'il faut ici du choix dans les matieres: qu'il en eſt beaucoup que je dois paſſer ſous ſilence, ou ne traiter que légerement; & d'autres au contraire que je ne ſaurois trop éclaircir. A quoi ſerviroit, par exemple, de faire de grands diſcours & de longues diſſertations ſur les nouvelles Méthodes, ſur le Calcul différentiel & intégral? Les belles & ſubtiles recherches que l'on fait aujourd'hui ſur les différentes courbes, qui ſont le principal objet de ces calculs, ſur les différens ordres de ces courbes, ſur la route que prennent leurs branches, ſur les points d'inflexion & de rebrouſſement, ſur les

Idée générale de cet Ouvrage.

points ſimples & multiples, ſur leur rectification, & ſur la quadrature des eſpaces qu'elles renferment, ſont des connoiſſances auſſi inutiles à des Guerriers, que le ſeroit la découverte d'un nouveau Satellite autour de Jupiter, ou de quelque calcul qui fixeroit le retour périodique d'une Comete. Ces ſortes de ſujets n'ont rien de commun avec le bien que les Militaires doivent procurer à l'Etat; & l'on peut fort bien ſans eux, parvenir à la gloire & aux récompenſes que méritent l'application à ſon devoir & les belles actions.

Il n'en eſt pas de même des Calculs ordinaires, de la Géométrie, de la Trigonométrie, de l'uſage que l'on fait de cette Science ſur le terrein, du Nivellement, de la Meſure des ſurfaces planes, de leurs rapports entre elles, de leurs changemens, de leurs diviſions, de la Meſure des ſolides, du Toiſé des ſurfaces & des ſolides, des ſections coniques, de la ſcience du mouvement, de la connoiſſance des Machines, des propriétés des Fluides, & entre autres de celles de l'Air & de l'eau. C'eſt ſur les principes de la plupart de ces choſes, qu'eſt fondé le grand Art de la Guerre; & s'il eſt permis à quelques Officiers de n'en avoir que des légeres notions, il en eſt beaucoup au contraire qui ne ſauroient remplir leurs poſtes avec diſtinction & honneur, s'ils négligeoient d'en acquerir de profondes & ſolides connoiſſances. La plûpart des manœuvres militaires ſe font avec beaucoup de promptitude : il faut ſouvent ſe décider ſans avoir le tems de faire de longues réflexions : comment voudroit-on qu'un homme ſuperficiel, & qui ne ſe ſeroit pas fait un uſage de ſavoir ſe retourner ſelon les ocourrences, pût prendre le parti convenable, à moins que le haſard & la fortune n'y euſſent la meilleure part?

L'Etabliſſement des Ecoles d'Artillerie, & les avan-

tages que l'Etat en retire, ſont aujourd'hui connus de tout le monde. On ſait que ces Ecoles ſont, pour ainſi dire, autant de pépinieres d'où ſortent grand nombre d'Officiers en qui la Science & la Valeur ſemblent ſe diſputer à l'envi la gloire de les rendre utiles au ſervice de leur Prince, & au bien du Royaume. Or dans ces Ecoles, où Meſſieurs les Commandans prennent un extrême ſoin que les Officiers ſoient inſtruits, & faſſent des progrès dans les parties des Mathématiques qui conviennent à leur état, il a été réglé que l'on enſeigneroit *un même Cours* : afin que les Officiers du Corps Royal d'Artillerie, qui ſe tranſplantent d'une Garniſon à l'autre, ne fuſſent pas retardés dans leurs Etudes par les changemens de Méthodes, & par les différentes manieres d'enſeigner. Cependant comme ce Cours, de l'aveu même de ſon Auteur, n'a pas toute la perfection qu'il auroit pu lui donner; que les matieres y ſont quelquefois traitées d'une maniere trop reſſerrée & trop ſeche, qui ne laiſſe point entrevoir les uſages auxquels elles peuvent ſervir; & qu'il s'en trouve d'autres qui demanderoient des démonſtrations plus nettes & plus exactes; il n'eſt pas ſurprenant que les Profeſſeurs, ſans vouloir déroger au ſage Réglement qui a été fait, mais uniquement pour mieux répondre aux intentions de l'Auguſte Prince qui leur a confié l'inſtruction de ſes Officiers, ſe ſoient toujours crus obligés d'ajouter à cet Ouvrage les réflexions & les commentaires qui peuvent en corriger les défauts, & procurer l'avancement de ceux à qui ils ont l'honneur de montrer.

Le propre des mathématiques, eſt d'étendre les lumieres de l'eſprit, de le perfectionner, & de le rendre inventif. Tout homme qui a aſſez de génie pour comprendre les démonſtrations que cette Science emploie, en

auroit certainement assez pour en saisir la Méthode ; & s'il n'arrive pas à tous ceux qui s'y appliquent de parvenir jusques-là, c'est qu'on étudie d'une façon plutôt historique que judicieuse ; & qu'on s'imagine avoir tout fait, lorsqu'au bout d'un certain tems on a amassé dans son esprit un tas mal arrangé de Propositions & de Problêmes dont on ne connoît les tenans & les aboutissans, qu'à travers un nuage rempli d'obscurité. Il ne s'agit donc pas ici d'aller avec précipitation, ni de faire de grands pas, qui ne menent à rien : c'est à l'ordre & à la liaison des matieres qu'il faut être attentif autant & plus qu'aux matieres même ; & pourvu qu'on se gêne à marcher avec cette précaution, on éprouvera bientôt que la Géométrie & les Mathématiques offrent un vaste champ, où il est permis à tout homme qui veut travailler de partager la gloire d'une riche moisson.

Méthode analytique & synthétique.

Quoique ce soit aujourd'hui un usage presque général de mettre de l'Algebre par-tout, & de ne rien démontrer qu'en employant les regles de ce calcul ; il m'a paru cependant qu'il m'étoit permis de ne me pas conformer à cette espece de loi, pour de bonnes raisons qu'il est à propos que je rapporte : afin qu'on ne dise pas que c'est par caprice ou par défaut de lumiere, que je refuse d'acquiescer à un sentiment qui paroît avoir pris le dessus.

En premier lieu, l'Algebre suppose la formation des figures auxquelles on l'applique, & la connoissance de leurs principales propriétés ; c'est par le moyen de celles-ci qu'elle parvient à en découvrir d'autres qui demanderoient de plus sérieuses réflexions. Il faut donc laisser à ceux qui commencent, le loisir de considérer attentivement ces figures, de déduire de leur formation les propriétés qu'ils ont besoin de connoître, & de s'en tracer

dans

dans le cerveau des images familieres & nettes, ſans leſquelles il eſt impoſſible qu'on puiſſe ſuivre le fil d'un raiſonnement géométrique. Le Calcul qu'on voudroit joindre ici par trop de précipitation, ne ſerviroit qu'à les jetter dans un nouvel embarras, non-ſeulement par les dénominations différentes qu'il donne aux mêmes grandeurs, mais encore par l'attention qu'il faut faire pour ne pas commettre d'erreur dans ſes opérations. L'Eſprit humain veut être ménagé : ce n'eſt pas le connoître à fond, que de lui propoſer de plein ſaut, tant de difficultés à ſurmonter à la fois.

En ſecond lieu, la ſimplicité des principes ſur leſquels le Calcul Algébrique eſt fondé, donne une certitude parfaite à ſes réſultats; mais elle ne ſatisfait, ni n'éclaire l'eſprit. On ſait après avoir examiné ſi l'on ne s'eſt point trompé, que les choſes doivent être comme on les a trouvées par le calcul, ſans ſavoir les raiſons qui doivent les rendre telles; & dès-lors l'eſprit toujours curieux de connoître les cauſes des effets qui ſe préſentent à lui, s'agite & ne ceſſe d'être dans l'inquiétude, à moins qu'on ne lui donne des démonſtrations tirées de la nature même du ſujet. Il faudroit donc pour le tranquilliſer, avoir recours à ces démonſtrations; & c'eſt ce qu'on n'a garde de faire : puiſqu'on n'emploie le calcul que pour ne pas ſe jetter dans ces difficultés. S'il eſt vrai, comme Wallis & quelques Savans de notre ſiecle l'ont penſé, que les Anciens aient eu une Analyſe aſſez ſemblable à la nôtre, pour faire les découvertes qu'ils nous ont laiſſées; je trouve qu'ils ont pris le bon parti, en ſubſtituant à cette Analyſe les démonſtrations que nous trouvons dans leurs Ouvrages : ils ſe ſont rendus plus intelligibles & plus convaincans, & de plus ils ont fermé la porte aux diſputes qui ne ſont que trop fréquentes de nos jours, au grand

ſcandale de bien des gens, & à la honte d'une Science, qui autrefois unique dépoſitaire de la vérité entre les Sciences humaines, ne peut maintenant ſe garantir des préjugés & des opinions qui tyranniſent les autres. Un Auteur aujourd'hui entreprend de traiter un certain ſujet, & y emploie une certaine méthode : ſon calcul fait, il tire de ſon réſultat les conſéquences qu'il croit pouvoir en déduire, & nous donne ces conſéquences & ce réſultat, comme autant de vérités dont on ne peut douter. Un autre dans le même tems, s'applique à la même queſtion, mais par une autre voie : ſon réſultat & ſes conſéquences ſont différentes. Grande diſpute là-deſſus : on répond, on réplique ; les écrits ſe multiplient, & la difficulté loin d'être éclaircie, s'embrouille de plus en plus. D'où peuvent venir ces ſortes de diſputes, dont il ſeroit aiſé de donner des exemples récens ? C'eſt, s'il m'eſt permis de dire mon avis, qu'en pareil cas les uns ni les autres ne cherchent point à réſoudre la queſtion par la voie qui ſeule pourroit la terminer. Si les calculs ſont juſtes & exacts, ſi les conſéquences qu'on en tire ne ſont pas forcées ; tout ce qu'on avance doit pouvoir ſe déduire des propriétés de la figure ſur laquelle on travaille. Pourquoi donc après le calcul, ne pas chercher dans cette même figure, ce que l'on a cru trouver dans ſes opérations ? Ce ſeroit ſans doute le moyen le plus naturel, ou même l'unique, de donner une entiere évidence à la découverte qu'on a faite ; & de faire naître dans l'eſprit de tout le monde, une parfaite conviction.

Ceux qui ſont du ſentiment qu'avant les nouvelles Méthodes, il n'y avoit d'autre voie d'invention que la ſyntheſe, par la raiſon qu'on ne trouve aucun veſtige de calcul dans les écrits des ſiecles paſſés, diſent ordinairement que les Anciens ne travailloient qu'à force de tête ;

& c'eſt à mon avis, le plus bel éloge qu'on puiſſe leur donner. En effet, s'ils ne ſont parvenus aux connoiſſances que nous admirons dans leurs Ouvrages, que par les principes les plus ſimples de la Géométrie, & par une ſuite de longs raiſonnemens qui cependant ne les ont jamais jettés dans l'erreur; je ne vois rien qui marque mieux l'élévation de leur génie, & rien auſſi qui ſoit plus humiliant pour nous, que l'étonnement où nous ſommes à la vue de leurs productions. Ne vaudroit-il pas encore mieux ne travailler qu'à force de tête, que de ne travailler qu'à force de calcul, & de ſe repoſer ſur nos opérations juſqu'au point de ſentir une eſpece d'engourdiſſement, lorſqu'on exige que nous faſſions uſage de notre raiſon? C'eſt anéantir le but des Mathématiques que d'en agir ainſi; & pour peu que le goût du calcul ſe perpétue, on verra que cette belle Géométrie, que l'on diſoit ſi utile à la perfection de l'eſprit, ne ſera plus qu'un art dans lequel il ne s'agira pour réuſſir mieux, que d'avoir acquis une plus grande habitude de calculer.

Ce que je viens de dire touchant l'uſage immodéré de l'Algebre que l'on fait dans les Mathématiques, eſt appuyé ſur le ſentiment des plus grands Géometres de notre ſiecle. On ne refuſera certainement pas ce titre à Meſſieurs de Fermat & Newton, ni la gloire d'avoir été de grand Calculateurs chacun dans ſon eſpece. Cependant M. de Fermat dans une Lettre écrite à un ſavant Anglois (*), demande qu'on donne la ſolution des problêmes géométriques qu'il propoſe, à la façon d'Euclide & indépendamment de l'Algebre; & ſi l'on veut ſavoir quelle en eſt la raiſon, c'eſt, dit-il, de peur qu'on ne laiſſe

(*) Cette Lettre ſe trouve dans le ſecond volume des Œuvres Mathématiques de Wallis, page 859.

périr insensiblement l'élégance des constructions & des démonstrations dont les Anciens étoient si jaloux. M Newton, au rapport de Pemberton son Commentateur, s'est souvent repenti d'avoir trop tôt passé à la Géométrie de M. Descartes, & à la lecture des Traités analytiques des Modernes, lorsqu'il commençoit à étudier les Mathématiques : & c'est sans doute pour cette raison que, quoiqu'il eût composé beaucoup d'Ouvrages algébriques, qui ont extrêmement enrichi nos Méthodes avant de travailler à ses *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle;* il n'a cependant employé dans celui-ci, que la Méthode des Anciens. M. Wolf, l'un des plus grands Géometres que l'Allemagne ait produit, soutient que lorsqu'on étudie les Mathématiques pour cultiver l'esprit, & pour acquerir la justesse du raisonnement, il faut s'attacher beaucoup à démontrer à la maniere d'Euclide : que les démonstrations analytiques peuvent à la vérité conduire en quelque façon à cette fin, mais qu'il s'en faut de beaucoup qu'elles aient la même utilité : qu'il paroît par quelques écrits de Messieurs Descartes, Newton, & Herman, que leurs raisonnemens auroient été bien plus solides, s'ils avoient eu un peu plus d'usage de la synthese ; enfin, qu'on ne doit pas regarder comme puérile ce qu'il dit en faveur de la Méthode des Anciens, puisque les plus grands génies auroient fait beaucoup mieux s'ils s'étoient un peu plus accoutumés à cette façon de raisonner. Je n'ai point traduit littéralement les termes de cet Auteur, de peur d'être trop long : mais on les trouvera en substance dans le cinquieme volume de ses Elémens de Mathématique, imprimé à Geneve, au second chapitre de la Dissertation où il est traité de la façon d'étudier cette Science. Je pourrois rapporter le sentiment de grand nombre d'autres Auteurs modernes, qui

penſent à peu près de même : mais ceci ſuffit pour faire voir de quelle maniere il faut uſer des différentes Méthodes, pour ne pas tomber dans des abus qui méritent d'être blâmés. On peut, & on fait même bien de calculer, lorſqu'on a acquis toutes les connoiſſances néceſſaires pour s'en tirer avec ſuccès : cette voie ſoulage l'eſprit dans ſes recherches, & abrege beaucoup le travail. Mais après avoir trouvé ce qu'on cherche, il faut, autant qu'on peut, l'appuyer ſur de bonnes démonſtrations ; & ne pas compter que les opérations que l'on a faites, puiſſent tenir lieu d'un raiſonnement qui entraîne l'évidence & la conviction.

Au reſte, je n'ai garde de penſer qu'on doive bannir entiérement de nos Ecoles, l'Algebre & la connoiſſance des nouvelles Méthodes. Je ſais qu'il y a beaucoup d'Officiers très-capables d'y faire de grands progrès, & de s'en ſervir même avec utilité. Mais comme ces calculs, ſouvent plus curieux que néceſſaires, ſont extrêmement attrayans, au point même qu'on a vu bien des perſonnes quitter tout pour s'y attacher, je crois qu'il eſt bon d'en parler ſobrement, & qu'il vaut mieux faire des Géometres conſommés dans la pratique de leur métier, que de faire des Savans abſtraits qui prendroient du dégoût pour grand nombre de détails dont ils ne peuvent ſe diſpenſer. Mais il eſt tems de donner ici le plan de mon Ouvrage.

Diviſion de cet Ouvrage.

Je le diviſe en trois Livres : le premier contient les Elémens de l'Arithmétique, de l'Algebre, de l'Analyſe, des Raiſons, Proportions, & Progreſſions arithmétiques & géométriques, avec un petit Traité des Logarithmes. Le ſecond renferme les Elémens de la Géométrie, de la Trigonométrie, du Nivellement, de la Planimétrie, de la Stéréométrie, des Sections coniques, le Toiſé de la Maçonnerie & celui des Bois. Enfin, j'ai compris dans

Regle de Société, & à celle d'Alliage, & les queſtions numériques que j'y ai ajoutées, diſſiperont beaucoup l'ennui que l'eſprit en ſouffre ordinairement; & ſi l'on veut en bannir toute abſtraction, & joindre une parfaite clarté à une entiere certitude, je conſeille à ceux qui s'y appliqueront de ſubſtituer dans chaque Propoſition des nombres, au lieu des lettres de l'Alphabet; ce que je n'ai pas toujours fait, pour éviter d'être trop long.

Il ſe trouve dans les Mathématiques des grandeurs qu'on nomme *ſourdes*, *irrationnelles*, ou *incommenſurables*: parce qu'on ne peut exprimer en nombre le rapport qu'elles ont à des grandeurs connues. Les ſignes que l'on emploie pour marquer ces grandeurs ſe nomment *Signes radicaux*, & la maniere dont on fait les opérations de l'Arithmétique ſur les incommenſurables, ſe nomme *Calcul des radicaux*. Quoique cette matiere ne ſoit pas d'un uſage fort fréquent, j'ai cru cependant ne devoir pas l'omettre: afin que dans les occaſions qui peuvent ſe préſenter, on n'y trouve aucun embarras. C'eſt pour la même raiſon que j'explique auſſi le Calcul des Expoſans qui apprend à ſe paſſer quelquefois des ſignes radicaux: d'autant plus que les regles de ce Calcul ſont les mêmes que celles des Logarithmes dont l'uſage abrege beaucoup le travail dans le Calcul Trigonométrique. Au moyen de ce que je viens de dire, on peut s'aſſurer de trouver dans ce premier Livre, qui certainement n'eſt pas bien long, tout ce qu'il y a d'eſſentiel à ſavoir ſur l'Arithmétique & l'Algebre, joint à bien des queſtions utiles & néceſſaires à l'Artillerie. Par exemple; j'ai fait voir comment, par le moyen, de la ſimple addition, on peut former facilement des Tables pour trouver tout d'un coup le nombre de boulets contenus dans une pile, de quelque figure qu'elle ſoit: comment auſſi on peut découvrir la même choſe indépendamment

pendamment des Tables, par le moyen de quelques formules algébriques très-ſimples & faciles à conſtruire : comment on peut connoître ſi dans une piece de Canon qu'on veut refondre, l'alliage a été bien fait, &c.

Méthode d'Euclide.

C'eſt une queſtion qui n'eſt pas encore bien décidée parmi les Sçavans de nos jours, ſavoir, *ſi l'on peut traiter les Elémens de la Géométrie d'une façon différente de celle d'Euclide.* Il eſt conſtant que cet Auteur n'a penſé qu'à ranger ſes Propoſitions de maniere qu'elles ſe ſerviſſent de preuve les unes aux autres, & qu'il y a très-bien réuſſi : mais à cela près, il y a ſi peu d'ordre dans les matieres qu'il traite, qu'il n'en faudroit pas davantage pour accoutumer l'eſprit au déſordre & à la confuſion. D'un autre côté, il eſt ſûr que quelques Auteurs modernes ont mis dans leurs écrits l'ordre & l'arrangement le plus naturel & le plus ſimple qu'on puiſſe ſouhaiter; & delà, il ſemble d'abord qu'on ne doive point héſiter de préférer leurs ouvrages à celui d'Euclide, malgré la vénération que les Anciens lui ont toujours portée. Cependant comme ces Auteurs ont cru pouvoir ſe diſpenſer de démontrer certaines choſes qui apparemment leur paroiſſoient tomber ſur le bon ſens; d'autres Auteurs non moins célebres qu'eux, & entre autres M. Wolf dans le cinquieme tome de ſes Elémens, ſe ſont récriés contre leur Méthode, pour des raiſons qui ne ſont pas abſolument à mépriſer. Le véritable eſprit de la Géométrie, diſent-ils, eſt de démontrer tout ce qui n'eſt pas d'une entiere évidence; de façon que tout homme raiſonnable qui voudra y faire attention, ſoit forcé de donner ſon acquieſcement : les preuves qu'on établit ſur ce qu'on a coutume de nommer *le bon ſens*, ne ſauroient produire cet effet. Les hommes diſputent tous les jours, & ne s'accordent preſque jamais : quoiqu'il n'y ait aucun d'entre eux qui ne s'imagine que le bon ſens &

la raiſon lui donnent gain de cauſe : il faut donc des raiſonnemens plus précis & moins vagues, pour parler en vrai Géometre ; & prendre garde que les négligences que l'on commettroit en ceci, introduiroient le doute & l'incertitude dans une Science que l'on a toujours regardée comme la ſeule qui puiſſe bannir le pirrhoniſme du milieu de nos ſociétés. Cette diverſité de ſentimens entre tant de célebres Auteurs, m'a tenu long-tems dans la perplexité ſur le choix que je devois faire d'une Méthode : mais enfin m'étant apperçu qu'on pouvoit fort bien ſuivre l'ordre des Modernes ; & démontrer avec autant & plus de rigueur qu'Euclide l'a fait, je n'ai plus balancé de prendre un parti qui doit faire marcher enſemble la force du raiſonnement & la beauté de l'ordre naturel. M. Wolf a porté ſon jugement avec trop de précipitation, lorſqu'il s'eſt avancé juſqu'à dire qu'on ne pouvoit abandonner la marche qu'Euclide a tenue, ſans abandonner en même tems la rigueur des démonſtrations. S'il avoit bien voulu y réfléchir plus mûrement, l'étendue de ſon génie lui auroit bien-tôt fait voir que les négligences de nos Modernes ne ſont que de légeres taches qu'on peut fort aiſément effacer de leurs Ouvrages, ſans toucher à l'élégance de leur Méthode. Ce ſeroit après tout une choſe bien étrange, & qui marqueroit bien la foibleſſe de l'eſprit humain, ſi pour raiſonner juſte il nous falloit abſolument paſſer des triangles aux lignes, du compoſé au ſimple, & prendre par conſéquent des routes ſi oppoſées à celles que la Nature ne manque jamais de tenir. J'ai été bien aiſe de faire obſerver ceci, afin qu'on ne ſoit pas étonné ſi je mets au nombre des Propoſitions géométriques, des choſes qui paroiſſent à bien des gens n'avoir pas beſoin d'être démontrées, parce qu'elles n'ont pas trouvé de contradicteurs. Il eſt plus difficile qu'on ne

penſe de faire des Elémens de Géométrie, quand on ne veut établir d'autres ſuppoſitions, que celles qu'on ne peut abſolument conteſter; & quoiqu'en veuille dire les Partiſans d'Euclide, le huitieme axiome de ſes Elémens qu'on lui a toujours reproché avec raiſon, fait aſſez voir que ſa Méthode n'eſt pas ſi parfaite qu'on ne puiſſe faire mieux.

LA GÉOMÉTRIE.

L'étendue en longueur, largeur & profondeur, eſt l'objet de la Géométrie. Chacune de ces dimenſions priſe à part, ſe nomme *ligne* droite ou courbe, ſelon qu'elle ſuit toujours la même route, ou qu'elle en change à tous momens en prenant à droite ou à gauche. Les grandeurs compriſes ſous deux dimenſions ſe nomment *ſurfaces*; & celles qui ſont compriſes ſous les trois, ſe nomment *ſolides* ou *corps*.

Les Lignes.

Pour ſuivre donc l'ordre que je me ſuis preſcrit, je conſidere d'abord les propriétés des lignes droites ſelon les différentes poſitions qu'on peut leur donner, & les différentes figures qu'elles peuvent former par leur rencontre. J'examine auſſi les rapports qu'elles ont entre elles, ſelon les différentes manieres dont elles ſe coupent, & de-là je paſſe à la ligne circulaire qui eſt la ſeule courbe dont on traite dans la Géométrie ſimple, à cauſe que c'eſt la ſeule qu'on puiſſe décrire avec le compas : j'en rapporte grand nombre de propriétés qu'on paſſe ordinairement ſous ſilence dans les Elémens; & ce qui m'a obligé d'en uſer ainſi, c'eſt que ces propriétés aſſez curieuſes par elles-mêmes, & faciles à démontrer, peuvent conduire ſans beaucoup de peine à la connoiſſance parfaite des ſections coniques que l'on a toujours regardée comme la partie la plus abſtraite de la Géométrie; ce qui lui a donné le nom de Géométrie compoſée. Après ceci, j'explique les principes de la Trigonométrie, c'eſt-à-dire, de la ſcience qui

apprend à connoître les côtés & les angles d'un triangle par la connoiſſance de quelques unes de ces choſes. Je fais voir l'uſage qu'on en peut faire ſur le terrein, pour lever des Plans & des Cartes, & pour meſurer des diſtances acceſſibles ou inacceſſibles : d'où l'on peut juger aiſément de ſon utilité pour l'Art de la Guerre, & pour les Sieges des Places où l'Aſſiégé ne permet jamais de l'aborder de trop près : enfin je termine ce qui concerne les lignes par le Nivellement.

Les Surfaces. Les ſurfaces ſont ou planes, ou courbes : les ſurfaces planes ſont celles dont toutes les parties ne baiſſent ni ne hauſſent pas plus les unes que les autres, comme la ſurface d'un miroir ordinaire, d'un plancher bien uni, &c : & les ſurfaces courbes ſont celles dont toutes les parties ne ſont pas diſpoſées comme il vient d'être dit ; telle eſt la ſurface d'une colonne, d'une boule, d'un pain de ſucre, &c. Je donne les regles qui apprennent à meſurer les ſurfaces planes ; à juger de leur rapport ; à leur donner différentes figures ſans changer leur grandeur ; à les diviſer en tel nombre de parties égales ou inégales, dans telle raiſon qu'on jugera à propos ; & à connoître entre les ſurfaces qui ont un même circuit, quelles ſont les plus grandes. C'eſt à l'occaſion de ceci, que je fais voir qu'entre les magaſins qui ont un même contour, ceux qui ſont faits en quarrés-longs, ont moins de capacité que ceux dont la figure eſt quarrée ; que les quarrés contiennent moins que ceux qui ſeroient faits en polygones réguliers d'un plus grand nombre de côtés ; & enfin que les ronds ont beaucoup plus de capacité que les autres. D'où j'ai inféré que pourvu que les Magaſins ronds ſoient propres aux uſages auxquels on les deſtine, on doit les préférer à tous les autres ; d'autant plus que leurs voûtes étant moins expoſées au choc direct des Bombes,

doivent réſiſter plus long-tems à leurs efforts.

Les Solides.

J'ai tenu à peu près la même méthode à l'égard des ſolides & de leurs ſurfaces, qui comprennent ce qui regarde les ſurfaces courbes; & j'en ai dit beaucoup plus ſur ces matieres, qu'on n'a coutume d'en dire dans les Elémens où l'on ſe borne aux priſmes, aux cylindres, aux pyramides, aux cônes, & à la ſphere. Toute cette Géométrie eſt entremêlée de grand nombre de Problêmes, qui joigent la théorie à la pratique; & qui épargnent à l'eſprit la contention trop forcée, qu'une longue & continuelle théorie ne manqueroit pas de lui cauſer.

Les Sections coniques.

Je fais ſucoéder immédiatement à la Géométrie la doctrine des ſections coniques. Appollonius, & la plupart des anciens Géometres, ont extrêmement approfondi ces courbes; & ne nous auroient rien laiſſé à deſirer, ſi la confuſion & le déſordre qui regnent dans leurs Ecrits, ne dégoutoient le Lecteur de la fatigante attention qu'il faudroit leur donner. La plupart des Modernes, prévenus en faveur de l'Algebre, ſe ſont imaginés qu'il n'y avoit que cette voie pour bien traiter cette matiere; & malheureuſement il eſt arrivé, qu'à l'exception des propriétés de l'axe qu'ils ont déduites aiſément de la formation des courbes, ils n'ont pu parvenir à démontrer les autres que par des détours peu naturels & des calculs embarraſſans, dont on eſt rebuté d'autant plus qu'on ne voit qu'avec beaucoup de peine la liaiſon & l'enchaînement que la Nature a miſes entre ces propriétés. Le parti qu'il m'a ſemblé devoir prendre, a été de montrer d'abord comment il faut couper un cône pour y former les trois ſections coniques, & de quelle maniere on y découvre leur principale propriété: de faire voir enſuite comment on peut tracer ſur un plan ces mêmes courbes; & déduire de leurs formations, grand nombre d'autres vérités importantes, en

n'employant preſque jamais que les propriétés du cercle dont j'ai parlé ci-deſſus. Par ce moyen, l'étude abſtraite des ſections coniques ſe change eu une eſpece d'agréable amuſement très-propre à faire connoître l'admirable fécondité qui naît de l'application des principes, & l'enchaînement naturel qui ſe trouve entre les différentes parties des Mathématiques. L'expérience que j'en ai faite à l'Ecole de la Fere, parle avantageuſement en faveur de ma méthode : il n'eſt aucun de nos Meſſieurs qui en peu de tems n'ait acquis beaucoup plus de connoiſſances ſur cette matiere, qu'il n'en avoit acquis par une longue application aux formules algébriques qui, de leur propre aveu, leur avoit inſpiré beaucoup de dégoût. Je ne m'arrêterai pas ici à faire voir l'utilité des ſections coniques : il ſuffira de dire qu'on trouve ces courbes preſqu'à chaque pas, dès qu'on veut pouſſer ſon étude au-delà des ſimples Elémens; & qu'en particulier l'on ne pourroit rien ſtatuer de certain ſur l'art de tirer le Canon & de jetter les Bombes, ſans la connoiſſance de la parabole & de ſes propriétés.

Sur la fin de ce ſecond livre, j'explique le Calcul du Toiſé des ſurfaces & des ſolides; & celui du Toiſé des Bois, dont l'uſage eſt preſque journalier dans la plupart de nos Arſenaux.

L'ARITHMÉTIQUE DES INFINIS.

L'Arithmétique des Infinis dont je traite au commencement du troiſieme Livre, eſt une extenſion de la Méthode des Indiviſibles de Cavallerius; & c'eſt elle qui a donné naiſſance à nos nouveaux Calculs; je veux dire le différentiel & l'intégral. L'objet de cette Science, appliquée à la Géométrie, eſt de trouver la meſure des ſurfaces & des ſolides; par la connoiſſance du rapport qu'ont entre eux les Elémens dont on conçoit que ces quantités ſont compoſées. Son étendue n'eſt pas à la vérité ſi grande

que celle des nouveaux Calculs : mais elle a l'avantage d'avoir des principes plus clairs & plus commodes pour la pratique ; & de plus, ſi les nouveaux calculs vont plus loin, ce n'eſt qu'à la faveur des ſéries infinies qu'ils emploient, & qui après tout, ne ſont que des approximations. J'ai reſſerré cette matiere, autant qu'il m'a été poſſible : mais comme j'y ai mis beaucoup d'exemples qui en font voir l'uſage, j'en ai aſſez dit pour qu'on puiſſe en déduire grand nombre de conſéquences qui en feront ſentir toute l'utilité.

LA MÉCHANIQUE.

La Méchanique en général, eſt la Science du Mouvement : elle contient les regles des différens mouvemens, la Statique ou l'équilibre des corps ſolides ; l'Hydroſtatique ou l'équilibre des corps ſolides plongés dans les fluides ; l'Airométrie ou la connoiſſance des différens changemens qui arrivent à l'air, & l'Hydraulique ou les regles du mouvement des fluides.

Loix du Mouvement.

Il y a des mouvemens que je nomme *réels*, parce qu'ils exiſtent dans la Nature ; & d'autres que je nomme mouvemens *ſyſtématiques*, parce que nous ne ſavons pas s'ils exiſtent réellement, & que nous ne les connoiſſons que par les hypotheſes que quelques Auteurs ont faites pour expliquer les différens phénomenes du Monde matériel. Je n'entre point dans l'explication des mouvemens ſyſtématiques : cela me jetteroit dans des détails inutiles à nos Ecoles, & qu'il faut laiſſer aux Aſtronomes & aux Phyſiciens. Je me borne aux loix du mouvement uniforme, du mouvement uniformément accéléré ou retardé, du mouvement compoſé de deux ou pluſieurs forces uniformes, & du mouvement compoſé de deux forces, dont l'une eſt uniforme, & l'autre uniformément accélérée, ou pour mieux dire accélérante.

C'eſt ſur ce dernier mouvement qu'eſt fondé l'art de

Jet des Bombes. jetter les Bombes ; & l'on peut dire que ce ſeroit la découverte la plus belle & la plus intéreſſante qu'on eût pu faire, ſi dans la pratique grand nombre d'accidens n'en affoibliſſoit la certitude. L'air réſiſte au mouvement du mobile avec différens degrés de force, cauſés par les altérations qu'il ſouffre, ſelon les différens degrés de chaleur, de froideur, de ſéchereſſe, & d'humidité, dont il eſt ſuſceptible. Les Bombes & les Mortiers, quoique coulés avec beaucoup de ſoin, ne peuvent être faits avec cette extrême juſteſſe qui empêcheroit qu'il n'en provînt aucun dérangement. La poudre eſt ſujette aux altérations de l'air ; & de plus, les matieres qui la compoſent ne ſe mêlent jamais ſi bien, qu'elle puiſſe être homogene & uniforme dans toutes ſes parties : ce qui produit des inflammations plus ou moins promptes, & par conſéquent différens degrés de vîteſſe dans le mobile. La manœuvre, quelqu'attention qu'on ait, ne ſauroit ſe faire dans la préciſion géométrique ; & tous ces accidens venant à ſe combiner d'une infinité de façons, produiſent auſſi une infinité d'effets différens, que les regles de la théorie ne peuvent garantir, qu'autant qu'un Officier intelligent & habile s'applique à connoître ce qui les altere, pour parvenir plus ſûrement à ſon but à travers tant de variations.

Une longue pratique, & des épreuves ſouvent réitérées, ſont ici d'une grande utilité : mais il faut prendre garde que ces épreuves étant toujours accompagnées de quelques-unes des circonſtances dont on vient de parler, ne ſerviroient qu'à faire imaginer de vains ſyſtêmes, ſi l'on ne partoit d'un point fixe & aſſuré qu'on n'abandonne jamais de vue. Pour n'avoir pas pris cette précaution, Rivaut, Tartaglia, Diégo Uſano, Collado, & preſque tous les Auteurs qui ont écrit ſur l'Artillerie & ſur les portées des pieces, nous ont débité de groſſieres erreurs qui auroient

roient peut-être encore aujourd'hui des Partiſans, ſi M. Blondel dans ſon excellent Traité de l'Art de jetter les Bombes, n'en avoit découvert toute la fauſſeté. De toutes les voies qui peuvent conduire à la connoiſſance du vrai, il n'en eſt point de plus ſuſpecte que celle de certaines expériences : leurs effets ſe montrent aux yeux, mais les cauſes qui les produiſent ſont un peu plus enveloppées, & ne ſe découvrent pas aiſément. Cependant on veut raiſonner, & avoir la gloire de la découverte : on forme donc des conjectures, ſans ſe donner le tems d'examiner toutes les circonſtances : les conjectures menent au ſyſtême ; & le ſyſtême une fois imaginé, on l'expoſe aux yeux du Public. L'adreſſe conſiſte à le préſenter du plus beau côté, à diſſimuler ce qu'il y a de foible, & à mettre ſouvent ſur le tapis le petit détail des expériences : moyennant cela on éblouit les eſprits peu éclairés; la préſomption fait les ſyſtêmes, & l'ignorance trop crédule les adopte. Mais qu'arrive-t-il ? La vérité prend enfin le deſſus : la chimere ſe diſſipe & s'évanouit, & la confuſion en reſte à l'Auteur & à ſes partiſans, qui ſont tous étonnés d'avoir été ſéduits. La Nature eſt une eſpece de Protée, bien différent de celui qu'Homere nous dépeint ſi agréablement. Il faut la ſuivre ſans relâche, éclairer ſes démarches, & la ſerrer de près : mais dès qu'on veut la garotter, & l'aſſujettir à des raiſonnemens toujours bornés; elle s'échappe, & par cent nouvelles transformations elle ſemble ſe faire un plaiſir de nous faire voir qu'il s'en faut de beaucoup que nous ne la ſaiſiſſions. Les nouveautés en fait d'Artillerie ſont ſouvent ſi pernicieuſes à l'Etat, qu'on ne ſauroit être trop ſur ſes gardes pour n'en produire que de la bonne façon.

Points d'équilibre & centre de gravité

Il ſe trouve toujours entre pluſieurs corps, ou entre les parties d'un même corps, un point qu'on nomme centre d'équilibre, lorſqu'il s'agit de pluſieurs corps; & centre

de gravité, lorſqu'il eſt queſtion des parties d'un même corps. Sa propriété conſiſte en ce que les corps, ou les Parties d'un même corps, ſe tiennent en équilibre autour de lui, dès qu'il n'a point de mouvement. Je commence la Statique par la recherche de ces ſortes de points : je fais voir leur utilité pour la connoiſſance des forces mouvantes, & les avantages qui en proviennent à la Géométrie, depuis que le P. Guldin Jéſuite, a découvert qu'il ſuffiſoit de connoître le centre de gravité d'une figure plane, & la valeur de cette figure, pour connoître aiſément le ſolide qu'elle produit, lorſqu'elle tourne autour d'une ligne priſe pour axe de mouvement. Cette Méthode s'étend auſſi à la meſure de tous les onglets ou priſmes tronqués; & c'eſt pour cette raiſon que je me ſuis arrêté beaucoup à chercher les centres de gravité de grand nombre de ſurfaces planes. De-là je paſſe à ce qui concerne l'équilibre des corps qui ſont ſur des plans inclinés, & de ceux qui ſe ſoutiennent avec des cordes; & je viens enfin à l'explication des différentes machines. Je n'en rapporte qu'un certain nombre, telles que ſont les différentes eſpeces de leviers, la Balance Romaine, la Balance ordinaire, la Poulie, les Mouffles, la Roue dans ſon aiſſieu, les Roues dentées, la Chevre, la Vis, & le Coin : mais ce que j'enſeigne touchant la maniere de calculer le rapport de la puiſſance au poids dans celles-ci, ſervira également pour le calcul des Machines plus compoſées, qui n'en ſont que des répétitions & des différentes combinaiſons.

L'Hydrauliſtique. Dans l'hydroſtatique, on apprendra à connoître ce que c'eſt que la maſſe d'un corps, ſon volume, ſa denſité, ſa peſanteur abſolue, & ſa peſanteur ſpécifique; comment on trouve les peſanteurs ſpécifiques des fluides & des ſolides; ce qui ſe paſſe lorſqu'un corps eſt plongé dans un fluide qui a plus ou moins de peſanteur ſpécifique que lui;

de quelle maniere on peut faire flotter un corps qui devroit naturellement aller à fond, & en faire enfoncer un autre qui devroit ſurnager. Ces connoiſſances ſont fort utiles pour l'Art de la Guerre : on eſt ſouvent obligé de faire paſſer une Armée ſur des Ponts jettés ſur une riviere ; de tranſporter des Equipages, des Canons & des Mortiers ſur des batteaux : il eſt donc à propos de connoître ce que ces ponts peuvent ſupporter ; la charge qu'on peut mettre dans les batteaux ſans les faire ſubmerger, & le moyen de les élever ſur l'eau, lorſque par quelque accident ils ſont coulés à fond.

L'Airométrie traite des propriétés de l'air, de ſa peſanteur, de ſon reſſort, de ſon mouvement, & des différentes condenſations & raréfactions que cauſent dans lui le froid, le chaud, l'humidité, la ſéchereſſe, & les vapeurs & exhalaiſons qui ſortent du ſein de la Terre. Les Inſtrumens dont on ſe ſert pour juger plus aiſément de la plupart de ces choſes, ſont le Barometre, le Thermometre, le Manometre, & l'Hygrometre : mais comme c'eſt encore ici une matiere de Phyſique, où la variété des accidens peut détourner la plus fine théorie, il faut être attentif à ne rien ſtatuer avec trop de précipitation ſur la foi de ces Inſtrumens, ni des expériences qu'on pourroit avoir faites. L'Airométrie.

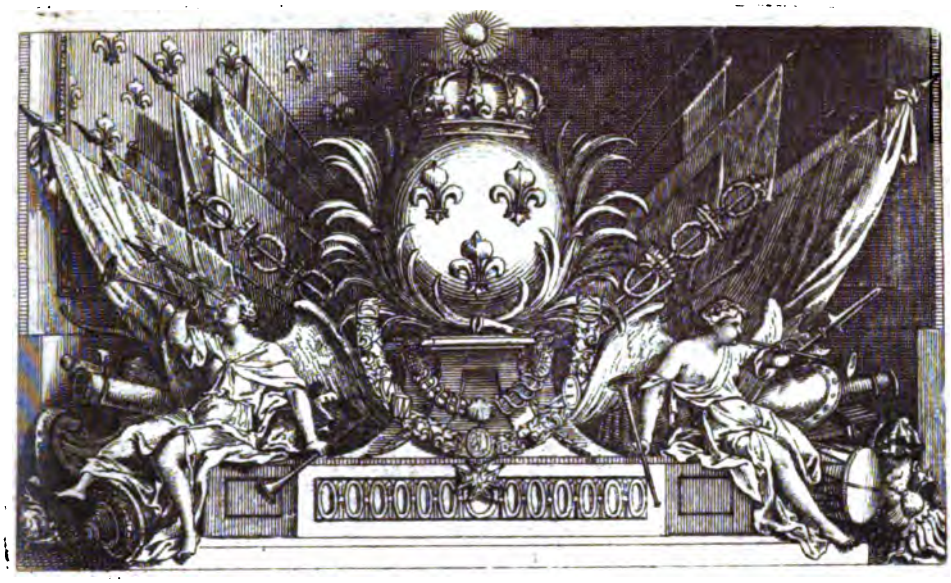
Dans l'Hydraulique enfin, j'explique quelle eſt la nature du mouvement de l'eau, comment on peut calculer la dépenſe qui s'en fait par l'orifice d'un vaſe, ou par l'ouverture d'une riviere, ou d'un canal ; de quelle maniere on peut ſe ſervir utilement de l'air pour élever l'eau au-deſſus de ſon niveau, ce qui renferme l'explication des Machines hydrauliques, & la façon de calculer la réſiſtance que l'eau oppoſe aux corps ſolides. L'Hydraulique.

Il ſemble qu'avant de finir ce Cours de Mathématique,

j'aurois dû y ajouter des réflexions & des maximes ſur la Conſtruction, l'Attaque, & la Défenſe des Places. Mais comme ce ſujet demande d'être traité avec une certaine étendue, & que d'ailleurs je viens de donner au Public une ſeconde Edition du *Parfait Ingénieur François*, où je n'ai rien omis de tout ce qu'on pouvoit ſouhaiter là-deſſus; j'ai cru qu'il valoit mieux y renvoyer le Lecteur, que de groſſir ce Traité par des matieres trop reſſerrées, & qui par conſéquent n'auroient pu être d'une grande utilité.

Au reſte, cet Ouvrage eſt bien éloigné d'être un Abrégé de mon Cours en cinq Volumes. Il s'y trouve bien des choſes que mon Cours ne renferme point; de même que le Cours en renferme un grand nombre d'autres que j'ai paſſé ſous ſilence dans cet ouvrage pour les raiſons que j'ai rapportées ci-deſſus: quant à celles qui ſont communes à l'un & à l'autre, elles ſont traitées ici d'une maniere toute différente; ce qu'on verra aiſément dans la Géométrie, dans les ſections coniques, &c. Un Auteur qui ne ceſſe de travailler, ne peut manquer d'avoir de nouvelles idées, & d'acquérir des connoiſſances qu'il n'avoit pas auparavant. C'eſt donc ici une eſpece de ſupplément à mes autres Ecrits; & ce ſupplément ne peut manquer d'être d'une grande utilité pour ceux mêmes qui auront lu ou qui ſeront bien aiſes de lire ces Ouvrages.

Fin de la Préface.



ÉLÉMENS
DES PRINCIPALES PARTIES
DES MATHÉMATIQUES.

LIVRE PREMIER.

Contenant les Élémens de l'Arithmétique & de l'Algebre.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS ET PRINCIPES.

1. L'ARITHMÉTIQUE eſt la ſcience des nombres, ou l'art de compter.

2. Cette ſcience étant extrêmement néceſſaire dans l'uſage de la vie, il n'eſt point de nation qui n'ait imaginé des caracteres pour exprimer les différens nombres, & pour faire aiſément les calculs. Mais ceux que les Arabes ont inventés, ayant paru les plus commodes, ont enfin emporté le deſſus; & il y a déjà long-tems que tous les peuples de l'Europe s'en ſervent non-ſeulement dans le commerce,

mais encore dans ce qui concerne les Sciences & les beaux Arts.

Chiffres en caracteres numériques.

3. Les *Chiffres* ou les caracteres numériques ſont au nombre de dix, tels qu'on les voit ici. Les neuf premiers expriment les nombres, c'eſt-à-dire, *un*, *deux*, *trois*, &c. & s'appellent *unités* : parce que chacun pris ſolitairement, n'exprime que des unités. Le caractere 6, par exemple, marque ſix unités, & ainſi des autres. Le dernier caractere o, qu'on nomme *zéro*, ne ſignifie rien par lui-même : mais, dès qu'il eſt joint avec les autres, il eſt d'une grande utilité, comme on le verra bientôt.

1, *un*
2, *deux*
3, *trois*
4, *quatre*
5, *cinq*
6, *ſix*
7, *ſept*
8, *huit*
9, *neuf*
0, *zéro*

4. Lorſqu'on écrit ſur une même ligne pluſieurs des caracteres dont nous venons de parler, alors leur valeur change ſelon le rang qu'ils occupent. Le premier à droite, vaut toujours des unités : le ſecond, en tirant vers la gauche, vaut des dixaines, c'eſt-à-dire, dix fois plus qu'il ne vaudroit s'il étoit ſeul : le troiſiéme devient encore dix fois plus grand, & vaut par conſéquent des centaines; puiſque dix fois dix font cent : le quatriéme augmente encore ſa valeur de dix fois plus, & vaut des mille; parce que dix fois cent font mille : le cinquiéme, par la même raiſon, vaut des dixaines de mille; le ſixiéme, des centaines de mille; le ſeptiéme des millions, & ainſi de ſuite, augmentant toujours les valeurs de dix fois plus, comme on voit dans la table ſuivante.

Quintillions.	Centaines de quatrillions.	Dixaines de quatrillions.	Quatrillions.	Centaines de trillions.	Dixaines de trillions.	Trillions.	Centaines de billions.	Dixaines de billions.	Billions.	Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Millions.	Centaines de mille.	Dixaines de mille.	Mille.	Centaines.	Dixaines.	Unités.
6,	8	3	9,	5	o	4,	6	8	7,	4	2	5,	7	8	2,	3	7	5.

5. Au moyen de ceci, il eſt facile de ſupputer & d'écrire tel nombre que l'on voudra. Soit, par exemple, le nombre 78,567,953. Je nomme le premier caractere à droite *unités*, le ſecond en tirant vers la gauche

dixaines, le troiſieme *centaines*, le quatrieme *mille*, le cinquieme *dixaines de mille*, le ſixieme *centaines de mille*, le ſeptieme *millions*, & enfin le huitieme *dixaine de millions*: ce qui me fait voir qu'en revenant de gauche à droite, le nombre contient ſept dixaines de millions, ou ſoixante-dix millions, huit millions, cinq cens mille, ſix dixaines de mille, ou ſoixante mille, ſept mille, neuf cens, cinq dixaines d'unités, ou cinquante, & trois. D'où j'infere que ce nombre vaut en tout, ſoixante-dix-huit millions cinq cens ſoixante-ſept mille neuf cens cinquante-trois.

Que ſi le nombre propoſé contenoit un ou pluſieurs zéros, cela ſignifieroit que ce nombre ne contiendroit point les quantités dont les zéros occupent la place. Par exemple, dans le nombre 780,004, on verroit en allant de droite à gauche, que ce nombre contient quatre unités, point de dixaines, point de centaines, point de mille, huit dixaines de mille, & ſept centaines de mille : & par conſéquent en revenant de gauche à droite, on diroit que ce nombre contient ſept cens quatre-vingt mille & quatre unités.

De même, ſi on vouloit écrire le nombre trois millions ſix cent quarante-trois mille ſept cens cinquante-deux, on écriroit d'abord un 3 pour les trois millions : puis allant de gauche à droite, on écriroit un 6 pour les ſix cens mille, un 4 pour les quarante mille, un 3 pour les trois mille, un 7 pour les ſept cens, un 5 pour les cinquante, un 2 pour les deux unités ; & l'on auroit 3,643,752, qui exprimeroit le nombre demandé.

Que ſi le nombre propoſé étoit deux millions quarante mille trois cens trente ; on écriroit d'abord un 2 pour deux millions : enſuite en venant de gauche à droite, on mettroit un zéro ; parceque le nombre propoſé ne contient point de centaines de mille : enſuite un 4 pour les quarante mille : puis un zéro, parce que le nombre propoſé ne contient point d'unités de mille : puis un 3 pour les trois cens : enſuite un 3 pour les trente : & enfin un 0, parce que le nombre propoſé ne contient point d'unités : & l'on auroit 2,040,330, & ainſi des autres. D'où l'on voit que le zéro, en occupant la place des quantités qu'un nombre ne contient pas, conſerve le rang, & par conſéquent la valeur de celles qu'il contient.

Voilà en quoi conſiſte tout l'artifice des caracteres arabes ; artifice qu'on peut regarder comme l'une des plus belles inventions de l'eſprit humain : puiſqu'au moyen de dix caracteres très-ſimples, on vient à bout non-ſeulement d'écrire très-aiſément toute ſorte de nombre, mais encore de les augmenter, de les multiplier, & de faire en un mot toutes les opérations néceſſaires dans les différens cas qui peuvent ſe préſenter.

Idée générale & diviſion des nombres.

6. Les nombres en eux-mêmes ſont des idées abſtraites, qui ont à la vérité une valeur fixe & conſtante, mais qui ne ſignifient rien de déterminé. Par exemple, le nombre 20 vaut toujours vingt unités ou deux dixaines; mais il ne ſignifie pas plus vingt hommes que vingt chevaux ou vingt écus, & ainſi du reſte. C'eſt pourquoi quand on veut déterminer la ſignification des nombres, il faut néceſſairement écrire après eux, ce qu'on veut qu'ils ſignifient : pour dire 20 louis, il faut non-ſeulement écrire 20, mais encore il faut écrire le mot de louis; & ainſi des autres.

7. Les nombres dont la ſignification eſt déterminée, peuvent être ou de *même eſpece*, ou *de différente eſpece* : ſelon que les choſes qu'ils ſignifient, ſont de même nature ou de différente nature. 9 écus, & 8 écus ſont des nombres de *même eſpece* : 9 écus & 9 toiſes ſont des nombres de *différente eſpece*.

8. L'uſage a voulu qu'on ait fait des diviſions & des ſous-diviſions de certaines choſes : par exemple, on a diviſé la livre en 20 parties nommées ſols; & le ſol en 12 parties nommées deniers. De même, on a diviſé la toiſe en ſix parties ou pieds; le pied en 12 parties ou pouces; le pouce en 12 parties ou lignes; & la ligne en 12 parties nommées points; & ainſi de grand nombre d'autres choſes. Ces ſous-diviſions ſe nomment *ſous-eſpeces*. Quand on dit une livre ſix ſols quatre deniers; les ſix ſols quatre deniers ſont des ſous-eſpeces de la livre.

9. Tout nombre, ſoit que ſa ſignification ſoit déterminée, ou qu'elle ne le ſoit pas, eſt ou entier, ou rompu, autrement dit fraction.

Un nombre entier eſt un nombre qui par lui-même ne nous donne point l'idée d'un tout dont il faſſe partie. L'unité & tous les nombres au-deſſus de l'unité, ſont de cette nature : car quand on dit, par exemple, 2 ou 2 écus; ce nombre 2 ne nous préſente l'idée que de deux unités ou de deux écus, ſans aucun rapport à quelque autre nombre dont ces deux unités ou ces deux écus faſſent partie.

Au contraire, le *nombre rompu*, ou la *fraction*, eſt un nombre qui porte avec lui l'idée d'un tout, dont ce nombre n'eſt qu'une partie. De cette eſpece ſont tous les nombres qu'on nomme un *tiers*, un *cinquieme*, un *ſixieme*, &c. : car ces nombres nous préſentent toujours l'idée d'un *tout* plus grand qu'eux.

Delà il ſuit qu'*une fraction proprement dite* eſt toujours moindre que le tout ou l'entier dont elle eſt partie; & que ſi quelquefois on ſe ſert de ces façons de parler, *trois moitiés*, *quatre tiers*, &c. qui

expriment des nombres plus grands que leur tout; ces ſortes de fractions ſont des *fractions improprement dites*. Car au lieu de dire trois moitiés, on devroit dire à proprement parler un & demi : puiſque trois moitiés ſont la même choſe que deux moitiés, c'eſt-à-dire l'entier ou le tout, plus la moitié d'un entier; & ainſi des autres.

10. Les nombres ſe diviſent encore en nombres ſimples & en nombres compoſés.

Le nombre ſimple eſt celui qui ne contient que des choſes de la même eſpece : 20 unités ou 20 écus eſt un nombre ſimple; parce qu'il ne contient que 20 unités de même nature, ou 20 écus : de même trois quarts eſt un nombre ſimple; parce qu'il contient des parties d'un tout de même eſpece.

Le nombre compoſé eſt un nombre qui contient des *ſous-eſpeces* : 20 & un quart eſt un nombre compoſé; à cauſe qu'il contient vingt unités, & un quart d'unité ou une ſous-diviſion d'unité. De même, 20 livres 4 ſols eſt un nombre compoſé; puiſqu'outre les livres, il contient des ſous, c'eſt-à-dire des ſous-eſpeces de la livre.

Au reſte, il faut prendre garde qu'on ne doit appeller *nombre compoſé*, que ceux qui ſont compoſés d'eſpeces & de ſous-eſpeces, ou d'unités & de fractions de ces mêmes unités : 20 écus & 3 toiſes ne ſont pas un nombre compoſé; non plus que 20 ſols & trois quarts de toiſes.

Les quatre regles de l'Arithmétique.

11. Les principales opérations de l'Arithmétique, ſont l'*Addition*, la *Souſtraction*, la *Multiplication*, & la *Diviſion*.

Ajouter, c'eſt faire un tout, de deux ou pluſieurs nombres de même eſpece : ce tout ſe nomme *ſomme*.

Souſtraire, c'eſt retrancher un nombre, d'un autre de même eſpece : ce qui reſte après l'opération, ſe nomme *reſte* ou *différence*; parce que la différence de deux nombres inégaux, n'eſt autre choſe que ce qui reſte lorſqu'on a retranché le plus petit du plus grand.

Multiplier, c'eſt prendre un nombre autant de fois, qu'il y a d'unités dans le nombre qui le multiplie. Quand on multiplie 2 par 3 : on prend deux autant de fois qu'il y a d'unités dans trois; c'eſt-à-dire, on le prend trois fois. Le nombre 2, ſe nomme le *multiplicande*; le nombre 3, le *multiplicateur*; & le nombre 6, qui provient de cette multiplication, ſe nomme le *produit*. Il eſt indifférent de prendre le multiplicande pour le multiplicateur, ou le multiplicateur pour le multiplicande : car il eſt viſible que ſi l'on multiplie 2 par 3, ou 3 par 2, le produit ſera toujours 6.

Diviſer, c'eſt retrancher un nombre, d'un autre autant de fois qu'il y eſt contenu. Quand on diviſe 6 par 2, on cherche combien de fois 2 eſt contenu dans 6. Le nombre 6 ſe nomme le *dividende:* le nombre 2 ſe nomme *diviſeur;* & le nombre 3, qui marque combien de fois le diviſeur 2 eſt contenu dans le dividende 6, ſe nomme le *quotient.*

12. Ces quatre opérations peuvent ſe faire ſur les nombres entiers, ſur les nombres rompus, ſur les nombres ſimples, & ſur les nombres compoſés. Nous allons expliquer dans le chapitre ſuivant l'addition & la ſouſtraction des nombres entiers, ſimples & compoſés; la multiplication & la diviſion des nombres entiers ſimples : après quoi nous parlerons dans les chapitres ſuivans, de la maniere de faire les mêmes opérations ſur les fractions, & de la multiplication & diviſion compoſée.

AXIOME.

13. *Un* tout *eſt égal à ſes parties priſes enſemble.* Les parties du nombre 5 ſont 2 & 3 : il eſt viſible qu'en ajoutant enſemble 2 & 3, on aura 5, égal au nombre 5 qui eſt compoſé de ces deux parties.

CHAPITRE SECOND.

LES QUATRE PREMIERES REGLES D'ARITHMÉTIQUE.

ADDITION SIMPLE.

14. *POUR ajouter enſemble pluſieurs grandeurs ſimples*, on les écrit les unes ſous les autres en mettant les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c. après quoi on opere, comme on va voir dans l'exemple ou dans le problême ſuivant.

PROBLÊME. *Il y a dans une armée* 4538 *hommes d'infanterie,* 1519 *carabiniers,* 3323 *cavaliers &* 2242 *dragons; on demande combien il y a d'hommes en tout.*

SOLUTION. J'écris tous ces nombres les uns ſous les autres, comme il vient d'être dit. Après quoi commençant par la colonne à droite, j'ajoute tous les nombres qu'elle contient, en diſant : 8 & 9 font 17 & 3 font 20 & 2 font 22, c'eſt-à-dire deux dixaines & deux unités: & comme cette

Nombres donnés.	4538	*fantaſſins,*
	1519	*carabiniers,*
	3323	*cavaliers,*
	2242	*dragons,*
Somme	11622	*hommes.*

colonne ne peut contenir que des unités, je mene une ligne par deſſous ; & j'écris 2 ſous cette colonne, tranſportant les deux dixaines à la colonne ſuivante.

Je viens donc à la colonne ſuivante, & je dis : 2 que je tranſporte & trois font 5 & 1 font 6 & 2 font 8 & 4 font 12 ; c'eſt-à-dire douze dixaines, ou cent & deux dixaines : & comme cette colonne ne peut contenir que des dixaines, j'écris par-deſſous 2, ou deux dixaines ; & je tranſporte une centaine à la colonne ſuivante.

Je paſſe à cette troiſieme colonne, & je dis : 1 que je tranſporte & 5 font 6 & 5 font 11 & 3 font 14 & 2 font 16 ; c'eſt-à-dire 16 centaines, ou un mille & ſix centaines : & comme cette colonne ne peut contenir que des centaines, j'écris par-deſſous 6, & je tranſporte un mille à la colonne ſuivante.

Je dis donc 1 & 4 font 5 & 1 font 6 & 3 font 9 & 2 font 11 ; c'eſt-à-dire onze mille, ou une dixaine de mille & un mille : j'écris 1 ſous cette colonne, & j'avance 1 ou une dixaine de mille vers la gauche, & la ſomme totale eſt 11622.

La *démonſtration de cette opération* eſt évidente par elle-même. Car il eſt viſible qu'en opérant comme j'ai fait, j'ai formé un tout qui comprend tous les nombres propoſés : or le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble (13) : donc le tout que j'ai trouvé eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

15. On donne pluſieurs manieres de faire la *preuve de l'addition*, c'eſt-à-dire, de voir ſi on ne s'eſt point trompé : mais la meilleure eſt de recommencer de nouveau, non plus en ajoutant chaque colonne de haut en bas, comme nous avons fait, mais de bas en haut. On dira donc 2 & 3 font 5 & 9 font 14 & 8 font 22 : ainſi on verra qu'on ne s'eſt pas trompé en écrivant 2 ſous cette colonne, & en tranſportant deux dixaines à la colonne ſuivante ; & continuant de la même façon, on découvrira aiſément ſi on a commis quelque erreur.

Addition composée.

16. L'*addition compoſée* ſe fait en écrivant d'abord chaque ſous-eſpece ſous la ſous-eſpece ſemblable ; après quoi on opere comme on va voir dans l'exemple ou dans le problême qui ſuit.

Problême. *Un homme a reçu de l'un de ſes créanciers*, 365 *livres* 15 *ſols* 11 *deniers ; d'un autre*, 432 *livres* 14 *ſols* 10 *deniers ; d'un troiſieme*, 534 *livres* 19 *ſols* 9 *deniers ; & d'un quatrieme* 635 *livres* 18 *ſols* 10 *deniers : combien a-t-il reçu en tout ?*

Solution. Après avoir écrit ces nombres les uns ſous les

autres, comme on voit ici, je commence par les deniers; & comme il en faut 12 pour faire un ſol, je dis : 11 & 10 font 21, c'eſt-à-dire un ſol & neuf deniers : je mets un point à côté du 10, pour marquer que j'ai un ſol, & je continue en diſant : 9 deniers que j'ai au-deſſus d'un ſol, & 9 qui viennent après font 18, c'eſt-à-dire un ſol & 6 deniers : je mets un point à côté du 9, pour marquer que j'ai encore un ſol, & je dis : 6 deniers que j'ai au-deſſus d'un ſol & 10 font 16, ou un ſol quatre deniers : je mets un point à côté du 10, & j'écris 4 au-deſſous de la ligne.

Nombres donnés.			
	365 l.	15 ſ.	11 d.
	432	14	10.
	534	19	9.
	635	18	10.
Somme	1969	9	4.

Les trois points que j'ai marqués, me faiſant voir que j'ai trois ſols, je porte ces trois ſols au rang des ſols, & je dis : 3 & 5 font 8 & 4 font 12 & 9 font 21 & 8 font 29, ou deux dixaines & neuf ſols : j'écris 9 ſous la ligne, & je porte 2 au rang des dixaines, en diſant : 2 & 1 font 3 & 1 font 4 & 1 font 5 & 1 font 6 dixaines : or il en faut deux pour faire une livre, je prends donc la moitié de 6 qui eſt 3, & par conſéquent j'ai 3 livres; & comme il ne me reſte point de dixaines, je n'écris rien ſous le rang des dixaines de ſols.

Je porte mes 3 livres au rang des livres, en diſant : 3 & 5 font 8 & 2 font 10, &c; & achevant le reſte comme dans l'exemple précédent, j'ai la ſomme totale demandée.

Si au lieu de 6 dixaines de ſols, j'avois eu un nombre impair comme 7, j'aurois pris la moitié de ſept qui eſt 3 livres, & par conſéquent j'aurois porté 3 au rang des livres : mais comme il me ſeroit reſté une dixaine, j'aurois écrit 1 ſous le rang des dixaines de ſols. Tout ceci n'a pas beſoin de démonſtration.

SOUSTRACTION SIMPLE.

17. PROBLÊME I. *Il y a dans une place* 9586 *hommes ; on veut en faire ſortir* 4374, *combien en reſtera-t-il ?*

SOLUTION. J'écris le plus petit nombre ſous le grand, en mettant les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, & ainſi du reſte; & tirant une ligne par-deſſous, je commence à droite, & je dis : de 6 retranchez 4, il reſte 2 que j'écris ſous la ligne : de 8 retranchez 7, il reſte 1 que j'écris de même : & agiſſant de la même façon aux autres colonnes, je trouve qu'il reſtera 5212 hommes dans la place.

9586	
4374	
5212	*reſte.*
9586	*preuve.*

18. *Pour*

18. *Pour faire la preuve*, j'ajoute enſemble le reſte avec le nombre des hommes qu'on veut faire ſortir; & ſi la ſomme ſe trouve égale au nombre total d'hommes qui étoit dans la place, la regle eſt juſte: puiſqu'il eſt évident que la ſomme totale n'eſt autre choſe que le nombre des hommes qui ſortent, joint au nombre de ceux qui reſtent.

De même que l'addition ſert de preuve à la ſouſtraction; de même auſſi la ſouſtraction ſert de preuve à l'addition. Car ſi dans l'exemple que nous venons de donner, les 4374 hommes qui doivent ſortir, joints aux 5212 qui doivent reſter, ſont véritablement la ſomme de 9586; il eſt clair qu'en retranchant de cette ſomme le nombre 4374, le reſte doit être 5212: & de même ſi on retranche de cette même ſomme 9586, le nombre 5212; le reſte doit être 4374: donc ſi en faiſant l'une ou l'autre de ces ſouſtractions, on ne retrouve pas l'un ou l'autre de ces deux reſtes., ce ſera une marque que l'addition aura été mal faite.

PROBLÊME II. *Un homme a reçu d'une part* 70082 *livres, & de l'autre il a payé* 58765 *livres, combien lui reſte-t-il?*

SOLUTION. J'écris ces nombres comme il vient d'être dit. Enſuite je dis: de 2 retranchez 5, cela ne ſe peut: c'eſt pourquoi j'emprunte une dixaine au rang des dixaines, & je mets un point ſur le 8, pour marquer qu'il ne vaudra plus que 7. Je dis donc: une dixaine que j'ai empruntée & deux unités font douze unités; & de 12 retranchez 5 il reſte 7, que j'écris ſous la ligne. Je paſſe aux dixaines en diſant: de 7 ôtez 6, il reſte 1 que j'écris: enſuite de 0 retranchez 7, cela ne ſe peut; c'eſt pourquoi j'emprunte une unité du rang ſuivant: mais comme il n'en a point, je paſſe à l'autre ſur lequel je metz un point. Or les unités de ce rang valent dix dixaines de mille, ainſi l'unité que j'ai empruntée vaut dix mille. Mais dix mille eſt trop grand pour retrancher 7, c'eſt-à-dire 7 centaines dans le rang où je dois opérer: c'eſt pourquoi je laiſſe 9 mille ſur le rang des mille, en mettant un point ſur le zéro de ce rang, pour marquer que ce zéro vaudra 9, & il ne me reſte plus qu'un mille ou dix centaines. Je dis donc: de 10 centaines ôtez 7, il reſte 3 que j'écris ſous la ligne: enſuite de 9 ôtez 8, il reſte 1; & enfin de 6 ôtez 5, il reſte 1; & par conſéquent il reſte à cet homme 11317 livres.

	70082
	58765
	11317

La regle eſt donc, lorſqu'il ſe trouve pluſieurs zéros dans les rangs où l'on veut emprunter, de paſſer juſqu'au rang où il ſe trouve des unités; de mettre des points ſur ce rang & ſur les zéros de ceux

où on n'a pas pu emprunter; & de faire valoir 9, chacun de ces zéros.

Ainſi pour retrancher 3542 de 6001; on dira d'abord: de 1 ôtez deux, cela ne ſe peut; on empruntera donc une dixaine. Mais le rang des dixaines n'en ayant point, non plus que celui des centaines, on paſſera au rang des mille, & l'on empruntera un mille ou 10 centaines: & comme 10 centaines ſont trop grandes pour ne retrancher que deux unités, on laiſſera 9 centaines au rang des centaines, & de la centaine reſtante on laiſſera 9 dixaines au rang des dixaines; & il ne reſtera plus qu'une dixaine, laquelle jointe à l'unité qu'on a, fera 11. On dira donc: de 11 ôtez 2, il reſte 9; de 9 ôtez 4, il reſte 5; de 9 ôtez 5, il reſte 4; & de 5 ôtez 3, il reſte 2.

...
6001
3542
2459

SOUSTRACTION COMPOSÉE.

19. PROBLÊME I. *Sur* 986 *livres* 15 *ſols* 8 *deniers, on veut payer* 754 *livres* 9 *ſols* 6 *deniers: que reſtera-t-il?*

SOLUTION. J'écris le moindre nombre ſous le plus grand, les deniers ſous les deniers, les ſols ſous les ſols, les livres ſous les livres; & je dis: de 8 deniers ôtez 6, il reſte 2: de 15 ſols ôtez 9, il reſte 6: de 6 livres ôtez 4, il reſte 2; & achevant le reſte de même que dans la ſouſtraction ſimple, je trouve qu'il reſtera 232 livres 6 ſols 2 deniers.

986 l.	15 ſ.	8 d.
754	9	6
232	6	2

PROBLÊME II. *De* 9600 *livres* 8 *ſols* 6 *deniers, on veut ôter* 7564 *livres* 12 *ſols* 10 *deniers: quel ſera le reſte?*

SOLUTION. Après avoir écrit ces deux nombres à la maniere accoutumée, je dis: de 6 deniers ôtez 10, cela ne ſe peut: j'emprunte un ſol au rang des ſols, ce qui fait 12 deniers, & ſix que j'ai font 18; & de 18 ôtez 10, il reſte 8.

...		
9600 l.	8 ſ.	6 d.
7564	12	10
2035	15	8

Je paſſe au rang des ſols, & comme de 7 on ne peut ôter 12, j'emprunte une livre ou 20 ſols au rang des unités de livres. Mais ce rang n'en ayant point, non plus que les dixaines, j'emprunte un cent au rang des centaines où je mets un point. De cette centaine, je laiſſe 9 dixaines au rang des dixaines, en mettant un point ſur le zéro, pour marquer qu'il vaudra 9; de la dixaine reſtante, je laiſſe 9 unités, en mettant un point ſur le zéro de ce rang; & il me reſte une unité de livres, ou 20 ſols, leſquels joints au 7 que j'ai déjà, font 27; & de 27 ôtez 12 il reſte 15.

Je paſſe aux livres, en diſant : de 9 ôtez 4, il reſte 5; de 9 ôtez 6, il reſte 3; de 5 ôtez 5, il reſte 0, & de 9 ôtez 7, il reſte 2.

PROBLÊME III. *Un homme doit* 90000 *livres, il en paie* 75432 *livres* 12 *ſols* 6 *deniers : que lui reſte-t-il encore à payer?*

SOLUTION. J'écris les deux nombres à la façon ordinaire, & comme dans le nombre ſupérieur il n'y a ni ſols, ni deniers, ni unités de livres, ni dixaines, ni centaines, ni mille, j'emprunte ſur le 9 une dixaine de mille : de cette dixaine j'en laiſſe 9 mille ſur les mille, en mettant un point ſur le zéro de ce rang; du mille reſtant, je laiſſe 9 centaines ſur le rang des centaines, en mettant un point ſur le zéro de ce rang; de la centaine reſtante, je laiſſe 9 dixaines ſur le rang des dixaines, en mettant un point ſur le zéro; de la dixaine reſtante, je laiſſe 9 unités au rang des unités en mettant un point ſur ſon zéro, & il me reſte une livre ou 20 ſols. Or pour paſſer aux deniers, je n'ai beſoin que d'un ſol ou de 11 deniers, c'eſt pourquoi je laiſſe 19 au rang des ſols, ce que je marque en y mettant un point : après quoi je dis : de 1 ſol qui me reſte ou de 12 deniers ôtez 6, il reſte 6; de 19 ſols ôtez 12, il reſte 7; de 9 livres ôtez 2, il reſte 7; de 9 ôtez 3, il reſte 6; de 9 ôtez 4, il reſte 5; de 9 ôtez 5, il reſte 4; & de 8 ôtez 7, il reſte 1 : donc cet homme eſt encore redevable de 14567 livres 7 ſols 6 deniers.

	l.	f.	d.
	90000		
	75432	12	6
	14567	7	6

MULTIPLICATION SIMPLE.

20. PROBLÊME. I. 36 *aunes d'étoffe à* 4 *livres l'aune, combien valent-elles?*

SOLUTION. Puiſque chaque aune vaut 4 livres, 36 aunes vaudront 4 fois 36; c'eſt-à-dire, il faudra prendre 36 quatre fois, ou autant de fois qu'il y a d'unités dans 4; donc c'eſt ici une Multiplication. (11.)

J'écris d'abord le nombre 36 aunes, qui eſt le nombre à multiplier; & par-deſſous j'écris le multiplicateur 4, ſous les unités 6 du nombre 36. Enſuite je mene une ligne, & je dis : 4 fois ſix font 24, c'eſt-à-dire 2 dixaines & 4 unités; j'écris 4 unités ſous la ligne, & je retiens 2 dixaines. Je dis 4 fois 3 dixaines font 12 & 2 que je retiens font 14 : j'écris 4 ſous les dixaines, & j'avance 1 au rang des centaines. Ainſi j'ai 144 liv. pour la valeur de 36 aunes à 4 livres l'aune.

	36 aun.
	4 l.
Produit	144

Pour démontrer ceci, il n'y a qu'à faire attention que le nom-

bre 36 eſt la même choſe que 3 dixaines & 6 unités : or en multipliant 6 unités par 4, j'ai pris 6 unités autant de fois qu'il y a d'unités dans 4; & en mulpliant 3 dixaines par 4, j'ai auſſi pris 3 dixaines autant de fois qu'il y a d'unités dans 4. Donc j'ai pris le nombre 36 autant de fois qu'il y a d'unités dans 4; & par conſéquent j'ai fait la multiplication demandée. (11.)

PROBLÊME II. *Un homme a fait 236 toiſes d'ovrages à 28 livres la toiſe : combien lui revient-il?*

SOLUTION. Puiſque chaque toiſe vaut 28 livres, il faudra donc prendre 236, vingt & huit fois, ou autant de fois qu'il y a d'unités dans 28, pour avoir la valeur de 236 toiſes: ainſi c'eſt encore une multiplication. C'eſt pourquoi j'écris d'abord le nombre à multiplier 236, & enſuite le multiplicateur 28, en mettant les unités ſous les unités, & les dixaines ſous les dixaines. Après quoi je multiplie d'abord le nombre 236, par les unités 8 du multiplicateur.

236	toiſes.
28	
1888	
472	
6608	

Enſuite je multiplie le même nombre 236 par les dixaines 2 du multiplicateur, en diſant : 2 fois 6 font 12, c'eſt-à-dire 12 dixaines; parce que le multiplicateur 2 ſignifie des dixaines : ainſi j'écris 2 dixaines ſous les dixaines 8 du premier produit 1888, & je retiens 1 : deux fois 3 font 6 & un de retenu font 7, & j'écris 7 : 2 fois 2 font 4, & j'écris 4; ainſi ce ſecond produit eſt 472. J'ajoute enſemble ces deux produits 1888 & 472, tels qu'ils ſont rangés : c'eſt-à-dire, j'écris d'abord 8, enſuite je dis : 8 & 2 font 10, j'écris 0 & retiens 1 : 1 de retenu & 8 font 9 & 7 font 16, j'écris 6 & retiens 1 : 1 de retenu & 1 font 2 & 4 font 6, j'écris 6; & le produit total 6608, eſt la valeur des 236 toiſes.

Pour comprendre la raiſon de ceci, on conſidérera que le multiplicateur 28 eſt la même choſe que 2 dixaines & 8 unités. Or en multipliant 236 d'abord par 8, j'ai pris ce nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans 8; & en le multipliant enſuite par 2 dixaines, je l'ai pris 2 dixaines de fois; à cauſe que j'ai avancé le produit d'un rang vers la gauche : ce qui le fait valoir dix fois plus qu'il ne vaudroit, ſi je ne l'avois pas avancé. Donc j'ai pris le nombre 236, 2 dixaines de fois & 8 fois, c'eſt-à-dire 28 fois; & par conſéquent j'ai fait la multiplication requiſe. Ajoutant donc enſemble les deux produits, en conſervant leur rang; j'ai eu néceſſairement le produit total.

Table pour la Multiplication.

21. Pour faire plus commodément la multiplication, on ſe ſert d'une Table nommée *Quarré de Pythagore*, du nom de ſon Auteur. On la conſtruit en faiſant d'abord un grand quarré, que l'on partage en dix rangs égaux de gauche à droite, & en dix autres de haut en bas : de façon que tout le quarré eſt partagé en 100 petits quarrés ou cellules, que l'on voit ici.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

On écrit dans les dix cellules à gauche de haut en bas, les dix nombres 1, 2, 3, & ainſi de ſuite juſqu'à 10 ; & l'on fait la même choſe dans les dix cellules ſupérieures de gauche à droite. Enſuite dans les dix cellules du ſecond rang de haut en bas, à la tête duquel eſt le nombre 2, on écrit les nombres 2, 4, 6, &c. en augmentant toujours de 2. De même dans les cellules du troiſieme rang de haut en bas, à la tête duquel eſt le nombre 3, on écrit les nombres 3, 6, 9, 12, &c. en augmentant toujours de 3. De même encore dans les cellules du quatrieme rang de haut en bas, à la tête duquel eſt le nombre 4, on écrit les nombres 4, 8, 12, &c. en augmentant toujours de 4 : & faiſant la même choſe à l'égard des autres rangs de haut en bas, la table ſe trouve conſtruite.

Pour faire *uſage de cette Table*, ſi l'on veut par exemple, ſçavoir ce que fait 6 fois 7 ; on cherche d'abord dans la premiere colonne de haut en bas, à gauche, la cellule où le nombre 6 ſe trouve écrit, & dans le rang ſuperieur de [illegible] la cellule où ſe trouve le nombre 7. Après qu[illegible] rang de gauche à droite, qui commence [illegible] rang de haut en bas qui commence par 7 [illegible] rangs s'entrecoupent, contient 42 : ce qui [illegible] font 42 ; & la raiſon en eſt évidente par l[illegible] ble. Car il eſt viſible qu'en formant le r[illegible] commence par 7, la ſeconde cellule co[illegible] troiſiéme 3 fois 7 ou 21, &c : de ſorte q[illegible] au rang de gauche à la droite qui comm[illegible] rement contenir 6 fois 7 ou 42.

De même si on vouloit trouver ce que vaut 7 fois 9 ; on prendroit le rang de gauche à droite qui commence par 7, & le rang de haut en bas qui commence par 9 : & l'endroit où ces deux rangs se couperoient, contiendroit 63 ; qui est le produit de 7 par 9, & ainsi des autres.

22. La *preuve de la multiplication*, c'est-à-dire la maniere de voir si on ne s'est point trompé en faisant l'opération, se fait par la division, qui est une opération toute contraire ; comme on verra bien-tôt.

DIVISION SIMPLE.

23. PROBLÊME I. *On veut partager 69 livres à 3 Soldats, combien reviendra-t'il à chacun d'eux ?*

SOLUTION. Il est visible que pour répondre à cette question, il faut partager le nombre 69 en 3 ; & par conséquent examiner combien de fois 3 est dans 69. Car s'il s'y trouve par exemple 23 fois sans reste, il sera vrai de dire que 23, pris trois fois font 69 : puisque le tout est égal à ses parties prises ensemble (13); & qu'ainsi 23 sera la partie qui reviendra à chaque Soldat. C'est donc ici une division (11).

Pour cela j'écris le nombre à diviser 69, & le diviseur 3 à côté de ce nombre, en les séparant par une ligne ou par un crochet : après quoi je tire une ligne au-dessous de ces deux nombres ; & je placerai le *quotient* que je cherche, sous le diviseur. Cela fait, je dis : en 6 combien de fois 3, & trouvant qu'il y est 2 fois, j'écris 2 au quotient ; & je dis 2 fois 3 font 6, & du caractere 6 du dividende ôtez 6, il ne reste rien. Je divise l'autre caractere 9 du dividende de la même façon ; & je dis : en 9 combien de fois 3, & trouvant qu'il y est 3 fois, j'écris 3 au quotient ; & je dis 3 fois 3 font 9, & du caractere 9 du dividende ôtez 9, il ne reste rien : & comme il n'y a plus de caractere au dividende, l'opération est finie. Ainsi il revient 23 livres à chaque soldat.

Dividende,	*Diviseur*,
69	3
	23 *Quotient.*

La raison de ceci paroîtra claire, si l'on considere que lorsqu'en faisant la premiere opération, j'ai dit en 6 combien de fois 3, il m'est venu 2 dixaines ou 20. Car 6 dixaines contiennent 3, vingt fois, ou deux dixaines de fois : ainsi en multipliant le diviseur 3 par le premier quotient 2, ce qui fait 6 dixaines, & retranchant ces 6 dixaines du dividende, il n'est plus resté au dividende que 9 unités. Or par la seconde opération ayant trouvé que le divi-

ſeur étoit 3 fois dans ces 9 unités, j'ai multiplié le diviſeur 3 par le ſecond quotient 3; & j'ai retranché le produit 9, des 9 unités du dividende : ainſi il n'eſt reſté rien au dividende. Donc j'ai retranché du dividende le diviſeur 3, autant de fois qu'il y étoit contenu, & par conſéquent j'ai fait la diviſion demandée (11).

24. La *preuve de cette regle* ſe fait par la multiplication. Car il eſt clair que ſi le diviſeur 3 eſt contenu 23 fois dans le dividende 69; le même diviſeur 3, pris 23 fois ou multiplié par 23, doit être égal au dividende : puiſque la ſomme des parties eſt toujours égale au tout qui le contient (13). Donc ſi après avoir multiplié le diviſeur par le quotient, on ne retrouvoit pas le dividende, ce ſeroit marque qu'on auroit mal opéré. Ceci ſuppoſe qu'il ne reſte rien au dividende qui ne puiſſe plus être diviſé par le diviſeur : car ſi cela arrivoit, il faudroit, pour faire la preuve, multiplier le diviſeur par le quotient, & ajouter au produit ce qui ſeroit reſté du dividende, & la ſomme devroit être égale au dividende.

De même que la multiplication ſert de preuve à la diviſion, de même auſſi la diviſion ſert de preuve à la multiplication. Car on voit bien que ſi en multipliant 3 par 23, on trouve un produit 69; il s'enſuit néceſſairement qu'en diviſant 69 par 3, on doit retrouver 23 au quotient, ou qu'en diviſant le même 69 par 23, le quotient doit donner 3.

PROBLÊME II. *Un Marchand a employé 156024 livres à acheter des étoffes qui lui coutent 6 livres l'aune, combien d'aunes en a-t'il acheté?*

SOLUTION. Puiſque l'aune vaut 6 livres, le Marchand a acheté autant d'aunes que le nombre 6 eſt contenu de fois dans la ſomme 156024 livres qu'il a débourſée. Pour répondre donc à la queſtion propoſée, il faut voir combien de fois 6 eſt contenu dans 156024, & par conſéquent il faut faire une diviſion.

J'écris le nombre à diviſer 156024, ſous lequel je tire une ligne, & une autre à droite, pour ſéparer le dividende du diviſeur. Enſuite j'écris le diviſeur à côté du dividende à droite.

Comme 6 n'eſt pas contenu dans le premier caractere 1 du dividende, je prends pour premier membre de la diviſion, les deux premiers chiffres 15.

Dividende.	*Diviſeur.*
15.6024	6
12	26004
36	*Quotient.*
36	
00	
02	
24	

25. Je dis donc : en 15, combien de fois 6 ? & trouvant qu'il ne peut y être que 2 fois, j'écris 2 au quotient. Je multiplie le diviſeur 6 par le quotient 2 ; ce qui fait 12 : & de la partie 15 du dividende retranchant le produit 12, il reſte 3 que j'écris ſous le caractere 5.

A côté du reſte 3, je place le troiſieme caractere 6 du dividende ; & je dis : en 36, combien de fois 6 ? & trouvant qu'il y eſt 6 fois, j'écris 6 au quotient. Je multiplie ce quotient 6, par le diviſeur 6 ; ce qui fait 36 : & retranchant ce produit des deux caracteres 36 du dividende, il ne reſte rien.

J'abaiſſe le quatrieme caractere 0 du dividende, & je vois qu'au lieu des quatre premiers caracteres 1560 du dividende, je n'ai plus que 00. Je dis donc en zéro combien de fois 6 ; & trouvant qu'il n'y eſt point, j'écris un zéro au quotient. Je multiplie le diviſeur 6, par ce quotient zéro : ce qui donne zéro. Je retranche ce produit zéro des caractere 00 du dividende, & le reſte eſt 0.

J'abbaiſſe le cinquieme caractere 2 du dividende, & je trouve qu'au lieu des cinq premiers caracteres 15602 du dividende, je n'ai plus que 02, c'eſt-à-dire 2 : car le zero qui le précede ne ſignifie rien. Je dis donc : en 2, combien de fois 6 ? & trouvant qu'il n'y eſt point, j'écris encore zero au quotient. Je multiplie le diviſeur 6 par le quotient zero, ce qui fait zero, & retranchant ce produit du caractere 2 du dividende, le reſte eſt 2 ; car de 2 retranchez zero, le reſte eſt 2.

J'abbaiſſe le dernier caractere 4 du dividende ſous le diviſeur, & je trouve qu'au lieu du dividende 156024, je n'ai plus que 24. Je dis en 24, combien de fois 6 ? & trouvant qu'il y eſt 4 fois, j'écris 4 au quotient. Je multiplie le diviſeur 6 par ce quotient 4, ce qui donne 24 : & retranchant ce produit des caracteres 24 du dividende, le reſte eſt zero, que j'écris au-deſſous, & comme il ne reſte plus rien au dividende, la diviſion eſt finie. Par conſéquent le quotient 26004 marque le nombre d'aunes que ce Marchand a acheté.

Lorſqu'en retranchant des caracteres du dividende, le produit du diviſeur par l'un des quotients, il ne reſte rien ; on peut ſe diſpenſer d'écrire 0 par deſſous : car ce caractere au commencement d'un nombre ne ſignifie rien.

Il faut obſerver, à meſure qu'on abbaiſſe un caractere du dividende ſous ce diviſeur, de mettte un point ſur ce caractere pour marquer qu'il a été abbaiſſé.

PROBLÊME

PROBLÊME III. *On veut partager à 26 perſonnes la ſomme de 154518 livres, combien reviendra-t'il à chacun?*

SOLUTION. Cette queſtion ſe réſout comme les deux précédentes, & il n'y a de différence qu'en ce que le diviſeur 26 a deux caracteres: or voici ce qu'on fait.

J'écris le dividende 154518, & le diviſeur 26 comme ci-deſſus. Enſuite je prends pour premier membre de la diviſion, les trois premiers chiffres 154 du dividende, & je cherche combien de fois 26 eſt contenu dans ces trois premiers caracteres 154 du dividende. Mais comme cet examen ſeroit embarraſſant, je ne fais d'abord attention qu'au premier chiffre du diviſeur & aux deux premiers chiffres du dividende; & je dis: en 15 combien de fois 2? il y eſt ſept fois. Le chiffre 7 eſt le *nombre que je deſtine au quotient:* mais avant que de l'y mettre, je l'éprouve par la multiplication. Ayant donc multiplié le diviſeur 26 par 7, j'ai pour produit 182, plus grand que le premier membre 154 du dividende. Je diminue donc ce nombre 7 d'une unité ſucceſſivement, juſqu'à ce qu'en multipliant le diviſeur, il donne un produit qui puiſſe être extrait du premier membre 154. Quand on eſt un peu exercé à faire des diviſions, on voit tout de ſuite quelle doit être la valeur du chiffre qu'on deſtine au quotient. Je dis donc ici de nouveau, en 15, combien de fois 2? il y eſt cinq fois. Multipliant le diviſeur 26 par 5, j'ai pour produit 130, que je ſouſtrais de 154: il reſte 24, à côté duquel j'abaiſſe le 5 du dividende.

Dividende.	*Diviſeur.*
154.518	26
130	5943
245	*Quotient.*
234	
111	
104	
78	
78	
(0	

Je dis enſuite: en 245, combien de fois 26; ou comme ci-deſſus, en 24 combien de fois 2? Il y eſt 9 fois; & multipliant le diviſeur 26 par 9, j'ai pour produit 234, que je ſouſtrait de 245: il reſte 11, à côté duquel j'abaiſſe le 1 du dividende.

Je dis enſuite: en 11, combien de fois 2? il y ſeroit 5 fois: mais voyant ou éprouvant que le 5 ſeroit trop grand, je mets 4 au quotient; & multipliant le diviſeur 26 par 4, j'ai pour produit 104, que je ſouſtrais de 111: le reſte eſt 7; à côté duquel j'abaiſſe le 8 du dividende.

Je dis enſuite: en 7, combien de fois 2? il y eſt trois fois. Je mets 3 au quotient, & ayant fait la multiplication & la ſouſtraction, il ne

reſte rien ; & la diviſion eſt achevée. Le quotient total 5943 marque ce qui revient à chacune des 26 perſonnes.

25. Il y a donc trois choſes à obſerver dans chaque opération que l'on fait en diviſant. La premiere eſt d'examiner combien de fois le diviſeur eſt dans les caracteres du dividende, qu'il doit diviſer ; & d'écrire ce nombre de fois au quotient : la ſeconde eſt de multiplier le quotient par le diviſeur ; & la troiſieme eſt de retrancher le produit qu'on a trouvé des caracteres du dividende qui lui répondent ſucceſſivement dans les différents membres du dividende.

26. Lorſque la diviſion ſe fait exactement & ſans reſte comme dans les exemples précédens, on dit que *le diviſeur eſt exact* : mais lorſqu'il ſe trouve un reſte qui ne peut plus être diviſé, on dit que le *diviſeur n'eſt pas exact*. Qu'on propoſe, par exemple, le nombre 434 à diviſer par 3. On trouvera, après avoir fait toutes les opérations, un reſte 2, qui ne ſauroit ſe diviſer par 3 : puiſque 3 n'eſt pas contenu dans 2.

434	3.
13	144 + 2/3
12	
14	
12	
2.	

Ainſi le diviſeur n'eſt pas exact ; & dans ce cas, ſi l'on vouloit faire la preuve, on multiplieroit le diviſeur 3 par le quotient 144 : ce qui donneroit le produit 432, auquel on ajouteroit le reſte 2 pour avoir le dividende 434. Ce quotient $144 + \frac{2}{3}$ exprime 144 unités, plus deux tiers d'une unité.

27. Lorſque le diviſeur n'eſt pas exact, *le reſte eſt une fraction*. Ainſi dans l'exemple que nous venons de donner, le nombre 2 eſt une fraction : car ce nombre ſignifie 2 unités qu'il faut partager en trois, ou deux tiers d'unité. Suppoſons, par exemple, que l'on veuille partager 2 écus à 3 perſonnes : il eſt ſûr que ſi l'on partage chaque écu en 3 parties égales, les deux écus ſeront compoſés de ſix parties égales, dont chacune vaudra le tiers d'un écu. Ainſi diviſant ce nombre 6, par le nombre 3 des perſonnes ; le quotient 2 marquera que chaque perſonne aura deux de ces 6 parties, & par conſéquent deux tiers d'écu. Donc 2 écus à partager entre trois perſonnes, eſt la même choſe que deux tiers d'écu : or 2 tiers d'écu eſt une fraction : donc le reſte d'une diviſion eſt une fraction.

28. De tout ce que nous venons de dire touchant la multiplication & la diviſion, on doit tirer les conſéquences ſuivantes :

Dans toute multiplication, ſi l'on diviſe le produit par le nombre à multiplier, le quotient ſera égal au multiplicateur ; & ſi l'on diviſe le même produit par le multiplicateur, le quotient ſera égal au nombre à multiplier (24).

29. *Dans toute diviſion exacte, le produit du quotient par le diviſeur eſt égal au dividende; & dans toute diviſion qui n'eſt pas exacte, le produit du quotient par le diviſeur étant ajouté au reſte de la diviſion, donne une ſomme égale au dividende, ou nombre à diviſer* (24.)

Il y a donc deux differentes regles, l'une pour la diviſion exacte, & l'autre pour celle qui ne l'eſt pas. Mais il faut obſerver que ces deux regles peuvent ſe réduire à une ſeule : car le reſte d'une diviſion non-exacte étant une fraction (27) ; ſi j'écris le reſte à côté du quotient en guiſe de fraction, comme on verra bien-tôt dans le Chapitre ſuivant, le quotient & la fraction étant multipliés par le diviſeur, donneront un produit égal au dividende.

Soit, par exemple, le nombre 14 à diviſer par 3 : le quotient eſt 4; & le reſte 2 eſt une fraction qui ſignifie *deux tiers* (27). Or deux tiers s'écrivent de cette façon $\frac{2}{3}$ (30): ainſi j'écris $\frac{2}{3}$ à côté du quotient 4; ce qui fait $4\frac{2}{3}$. Je multiplie $4\frac{2}{3}$, par le diviſeur 3; en diſant : 3 fois deux tiers font ſix tiers, & ſix tiers font deux entiers; car chaque entier contient trois tiers : donc je n'ai plus de fraction & je retiens deux entiers. 3 fois 4 font 12 entiers, & 2 de retenu font 14 : ainſi le produit eſt 14, & ce produit eſt égal au dividende. D'où l'on voit *que dans la diviſion non-exacte, de même que dans la diviſion exacte, le produit du diviſeur par le quotient total, c'eſt-à-dire par le quotient & la fraction qui exprime le reſte, eſt égal au dividende;* & par conſéquent la même regle ſert pour l'un & l'autre cas.

14	3
12	$4\ \frac{2}{3}$
(2	

2.
12.

CHAPITRE III.

DES FRACTIONS.

30. *UNE fraction* nous préſente toujours deux idées, dont l'une eſt l'idée du nombre des parties qui compoſent l'entier, & l'autre eſt celle du nombre des parties que l'on prend. Quand on dit deux tiers d'écu, on conçoit qu'un écu eſt partagé en trois parties égales, & qu'on en prend 2, & ainſi des autres. D'où il ſuit qu'il faut néceſſairement employer deux expreſſions qui répondent à ces deux idées; or voici comme on fait.

Pour exprimer deux tiers, on écrit d'abord le nombre 2, ſous lequel on mene une petite ligne, & ſous cette ligne on met le

nombre 3 : ainſi on écrit $\frac{3}{5}$. De même pour exprimer trois quarts, quatre cinquiemes, &c. on écrit $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c. Le nombre écrit au-deſſus de la petite ligne ſe nomme le *numérateur ;* parce qu'il marque combien on prend des parties de l'entier, & celui qui eſt ſous la ligne ſe nomme *dénominateur ;* parce qu'il exprime en combien de parties égales on conçoit que l'entier eſt diviſé, & que par conſéquent il détermine l'eſpece de la fraction.

31. Deux ou pluſieurs fractions de différente eſpece, c'eſt-à-dire, dont les dénominateurs ſont différents, ne peuvent ni être ajoutées enſemble, ni être ſouſtraites les unes des autres, par exemple, $\frac{2}{3}$ d'écus & $\frac{3}{4}$ d'écus ne peuvent faire ni $\frac{5}{3}$ ni $\frac{5}{4}$. Car quoiqu'on prenne d'un côté 2 parties d'un écu, & de l'autre 3, ce qui fait 5 ; cependant on ne peut pas dire que ces cinq parties ſont toutes ou des tiers ou des quarts. Par la même raiſon, on ne ſçauroit retrancher la fraction $\frac{1}{2}$ de la fraction $\frac{2}{3}$. C'eſt pourquoi ſi l'on veut faire ces opérations ſur ces ſortes de fractions, il faut néceſſairement les réduire à avoir une même dénomination, ſans cependant changer leur valeur ; & c'eſt ce que nous allons voir, après que j'aurai poſé les principes ſuivans.

32. PRINCIPE I. *Si l'on multiplie deux nombres par un même nombre ; les produits ſeront entre eux comme les nombres à multiplier : c'eſt-à-dire, le premier produit ſera contenu dans le ſecond, ou le contiendra, autant de fois que le premier nombre à multiplier ſera contenu dans le ſecond, ou contiendra le ſecond.*

DÉMONSTRATION. Soient les nombres à multiplier 4 & 8, & le multiplicateur 3. Les produits ſeront 12 & 24, & il eſt viſible que le nombre 4 étant contenu deux fois dans 8, le même 4 pris 3 fois, c'eſt-à-dire 12, ſera auſſi contenu deux fois dans le nombre 8 pris trois fois, c'eſt-à-dire 24 ; ainſi 12 ſera à 24, comme 4 eſt à 8.

4	8
3	3
12	24

33. PRINCIPE II. *Si l'on diviſe deux nombres par un même nombre, les quotiens ſeront en même raiſon que les nombres à diviſer.*

DÉMONSTRATION. Soient les nombres 12 & 48 à diviſer par 3 ; les quotiens ſeront 4 & 16. Or 12 étant le quart de 48 ; il eſt clair que le tiers de douze, c'eſt-à-dire le quotient 4, doit être le quart du tiers de 48, c'eſt-à-dire du quotient 16.

$\frac{12}{4}\left|\frac{3}{4}\right.$ || $\frac{48}{16}\left|\frac{3}{16}\right.$

34. PRINCIPE III. *Lorſque l'on multiplie un nombre ſucceſſivement*

par pluſieurs multiplicateurs ; le produit que l'on trouve eſt égal au produit que l'on auroit, ſi l'on multiplioit tout d'un coup le nombre propoſé par le produit de tous les multiplicateurs.

DÉMONSTRATION. Soit le nombre 4, à multiplier ſucceſſivement par 2 & 3 : le produit ſera 24. Car 4 multiplié par 2 donne 8 ; & 8 multiplié par 3 donne 24. D'autre part, ſi je multiplie le multiplicateur 2 par le multiplicateur 3, ce qui fait 6 ; & que je multiplie le nombre propoſé 4 par ce produit, j'ai auſſi 24.

4	2	6
2	3	4
8	6	24
3		
24		

Et la raiſon en eſt évidente. Car en multipliant 4 par le premier multiplicateur 2, je prends 4 deux fois ; c'eſt-à-dire je le rends double de lui-même : & dans cet état, en le multipliant par 3, je le prends 3 fois, de ſorte qu'en tout je le prends 2 fois 3 fois, c'eſt-à-dire 6 fois. Or lorſqu'après avoir fait le produit 6 des multiplicateurs 2 & 3, je multiplie 4 par 6 ; je prends auſſi 4 ſix fois : donc de part & d'autre, je fais la même choſe ; & le produit doit être le même.

35. PRINCIPE IV. *Lorſqu'on diviſe un nombre ſucceſſivement par pluſieurs diviſeurs, le quotient que l'on trouve eſt le même que celui qu'on trouveroit, ſi l'on diviſoit tout d'un coup le nombre propoſé par le produit de tous les diviſeurs.*

DÉMONSTRATION. Soit le nombre 24 à diviſer par 2 & 3 : le quotient ſera 4. Car 24 diviſé par 2 donne 12 ; & 12 diviſé par 3 donne 4. D'autre part, le produit des deux diviſeurs 2 & 3, eſt 6 ; & ſi je diviſe 24 par 6, j'ai auſſi 4 pour quotient.

24	2		24	6	
	12.			4	
12	3			2	
	4			3	
				6.	

La raiſon en eſt qu'en diviſant 24 par 2, je le réduits à la moitié ; & dans cet état, en le diviſant par 3, je le réduits au tiers de la moitié, & par conſéquent je le réduits au ſixieme. Car la moitié étant partagée en trois parties, l'entier, qui contient deux moitiés, contient auſſi 6 de ces parties. Ainſi chacune d'elles eſt le ſixiéme de l'entier. Or lorſqu'après avoir fait le produit 6 des deux diviſeurs, je diviſe 24 par ce produit ; je réduits 24 au ſixiéme : donc de part & d'autre je fais la même choſe, & le quotient doit être le même.

DIVERS PROBLÊMES SUR LES FRACTIONS.

36. PROBLÊME I. *Réduire deux ou pluſieurs fractions à un même dénominateur.*

SOLUTION. I°. Soient les deux fractions propoſées $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$. Je multiplie les deux dénominateurs 3 & 5 l'un par l'autre : ce qui donne le dénominateur commun 15. Enſuite je multiplie le numérateur 2 de la premiere, par le dénominateur 5 de la ſeconde; & le numérateur 4 de la ſeconde, par le dénominateur 3 de la premiere, ce qui me donne deux nouveaux numérateurs 10 & 12. Je dis que la premiere fraction $\frac{2}{3}$, eſt changée en $\frac{10}{15}$, qui a la même valeur que $\frac{2}{3}$; & que la ſeconde $\frac{4}{5}$ eſt changée en $\frac{12}{15}$, qui ne vaut pas plus que $\frac{4}{5}$.

10	12
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$
15	

Pour en être convaincu, on n'a qu'à conſidérer qu'en opérant comme j'ai fait, le numerateur 2 de la premiere fraction, & ſon dénominateur, ont été multipliés par un même nombre 5, & qu'ainſi les produits 10 & 15 ſont en même raiſon que les nombres à multiplier 2 & 3 (32). D'où il ſuit que 10 eſt les deux tiers de 15, de même que 2 eſt les deux tiers de 3; & que par conſéquent c'eſt la même choſe de partager l'entier en 15 parties égales, & d'en prendre 10, que de le partager en 3, & d'en prendre 2.

De même, le numérateur 4 de la ſeconde fraction, & ſon dénominateur 5, ayant été multipliés par le même nombre 3; les produits 12 & 15 ſont en même raiſon que les nombres 4 & 5. Donc les deux nouvelles fractions $\frac{12}{15}$, $\frac{12}{15}$, ſont les mêmes que les deux propoſées $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$; & il eſt viſible qu'elles ont le même dénominateur 15, puiſque dans l'une & dans l'autre ce dénominateur eſt le produit des deux dénominateurs 3 & 5 des fractions propoſées.

II°. Soient les trois fractions propoſées $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$. Je multiplie les trois dénominateurs les uns par les autres; c'eſt-à-dire, je multiplie 3 par 5, ce qui fait 15; & 15 par 6, ce qui fait 90; & je prends 90 pour le dénominateur commun : je multiplie enſuite le numérateur 2 de la premiere ſucceſſivement par les dénominateurs des deux autres; ou ce qui revient au même, par le produit 30 de ces deux dénominateurs 5 & 6 (34); & le produit 60 eſt le nouveau numérateur de cette fraction.

3			
5	60	72	15
15	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$
6		90	
45			

Je multiplie de même le numérateur 4 de la ſeconde ſucceſſi-

vement par les dénominateurs 3 & 6 des deux autres, ou tout d'un coup par le produit 18 de ces deux denominateurs ; & le produit 72 eſt le nouveau numérateur de cette ſeconde fraction. Enfin je multiplie le numérateur 1 de la troiſieme fraction ſucceſſivement par les dénominateurs 3 & 5 des deux autres, ou tout d'un coup par leur produit 15 ; & le produit 15 eſt le nouveau numérateur de cette troiſieme fraction.

Les trois fractions propoſées $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, ſont donc changées en ces trois-ci $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$; $\frac{15}{90}$, qui ont un même dénominateur, & dont les valeurs ſont les mêmes que celles des propoſées. La démonſtration de ceci eſt la même que la précédente. Car il eſt aiſé de voir qu'en opérant de cette façon, le numérateur 2 & le dénominateur 3 de la premiere fraction ayant été multipliés l'un & l'autre ſucceſſivement par les dénominateurs 3 & 5, ou tout d'un coup par le produit 30 de ces deux dénominateurs ; les produits 60, 90, ſont en même raiſon que 2 & 3 (34); & que par conſéquent 60 eſt les deux tiers de 90, de même que 2 eſt les deux tiers de 3. D'où il ſuit que c'eſt la même choſe de partager l'entier en 90 parties égales, & d'en prendre 60, que de le partager en 3 & d'en prendre 2; & qu'ainſi la fraction $\frac{60}{90}$ eſt la même que $\frac{2}{3}$. On fera le même raiſonnement à l'égard des deux autres fractions.

III°. La regle eſt donc de multiplier tous les dénominateurs enſemble, & de prendre le produit pour le dénominateur commun : enſuite de multiplier le numérateur de chaque fraction par les dénominateurs de toutes les autres, ce qui donnera les nouveaux numérateurs que l'on cherche.

37. Problême II. *Réduire un entier en fraction dont le dénominateur ſoit donné.*

Solution. Soit le nombre 15 à réduire en une fraction dont le dénominateur ſoit 3. Je multiplie 15 par 3, & le produit eſt 45 : j'écris donc 45, & menant une ligne, j'écris le dénominateur 3 au-deſſous ; ce qui me donne la fraction $\frac{45}{3}$ égale à l'entier 15.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{3} \\ 45 \end{array} \quad \frac{45}{3}$$

Démonstration. Chaque unité de l'entier 15 étant diviſée en trois parties égales, contient 3 tiers ; & par conſéquent 15 unités doivent contenir 15 fois 3 tiers, c'eſt-à-dire, $\frac{45}{3}$. Donc $\frac{45}{3}$ eſt égal à 15.

38. Problême III. *Réduire en entier une fraction improprement dite, ou dont le numérateur eſt plus grand que le dénominateur.*

SOLUTION. Soit la fraction $\frac{45}{3}$ à réduire en entiers. Je divise 45 par le dénominateur 3; & le quotient 15 est l'entier que je cherche.

45	3.
45	15.
0	

DÉMONSTRATION. Puisque la fraction est une fraction de tiers; chaque entier en doit contenir 3. Ainsi il doit y avoir dans $\frac{45}{3}$, autant d'entiers qu'il y aura de 3; & par conséquent en divisant 45 par 3, on a le nombre des entiers contenus dans $\frac{45}{3}$.

39. PROBLÊME IV. *Réduire une fraction aux plus petits nombres qui puissent l'exprimer.*

SOLUTION. I°. Soit la fraction $\frac{12}{24}$ à réduire à ses moindres termes, il est sur qu'il faut pour cela que je cherche un nombre qui divise exactement le numerateur 12 & le dénominateur 24 : car les quotiens seront certainement plus petits que 12 & 24, & cependant ils seront en même raison (33). D'où il suit que je pourrai mettre le premier quotient à la place du numérateur 12, & le second à la place du dénominateur 24 : ce qui me donnera une nouvelle fraction égale à $\frac{12}{24}$, & dont les termes seront moindres. Il faut encore que ce diviseur que je cherche, soit le plus grand diviseur exact qui puisse diviser 12 & 24; car les quotiens deviendront alors les moindres qu'ils puissent être, à cause que plus le diviseur est grand, moins il est contenu dans le dividende, & par conséquent le diviseur devient moindre.

Pour remplir donc ces deux conditions, je divise le dénominateur 24 par le numérateur 12; & trouvant que la division est exacte, & que le quotient est 2, je divise aussi 12 par lui-même, & le quotient est 1 : ainsi les deux nombres 12 & 24 ayant été divisés par le nombre 12, les quotiens 1 & 2 sont en même raison (33); & par conséquent la fraction $\frac{1}{2}$ est la même que la fraction $\frac{12}{24}$: de plus, on ne sauroit trouver de moindres termes pour exprimer cette fraction, puisque le diviseur 12 étant égal au numérateur, on ne sauroit trouver un plus grand nombre qui divise exactement 12 & 24.

24	12		12	12
0	2		0	1

Si après avoir divisé le dénominateur par le numérateur, la division n'est pas exacte; on néglige le quotient, & l'on divise le numerateur par le reste de la premiere division : & si cette seconde division n'est pas exacte, on divise le reste de la premiere division par le reste de la seconde, & on continue de même jusqu'à ce qu'on trouve un diviseur exact. Alors on divise le numerateur & le dénominateur de la fraction proposée par ce diviseur, & les deux quotiens composent la fraction réduite.

II°.

II°. Soit, par exemple, la fraction $\frac{168}{240}$ à réduire aux moindres termes. Je diviſe le dénominateur 240 par le numérateur 168, & la diviſion n'eſt pas exacte, car il me reſte 72.

240	168	168	72	72	24
168	1	144	2	72	3
(72		(24		(0	

Je neglige le quotient 1, & je diviſe le numérateur 168 par 72, & la diviſion n'eſt pas exacte, puiſqu'il me reſte 24.

Je néglige le quotient 2, & je diviſe le premier reſte 72 par le ſecond 24; & la diviſion eſt exacte.

Je prens donc le diviſeur 24, & je diviſe le numérateur 168, & le dénominateur 240 l'un & l'autre par 24, & les quotiens 7 & 10 ſont en même raiſon que 168 & 240; donc la fraction $\frac{7}{10}$ eſt la même que la fraction $\frac{168}{240}$ réduite à ſes moindres termes.

168	24	240	24
168	7	240	10
(0		(0	

DÉMONSTRATION. Je dis I°. que 24 doit diviſer exactement le numérateur 168 & le dénominateur 240. Car 24 diviſe exactement 72 : or 168 contient deux fois 72 plus 24, comme on voit par la diviſion que nous avons faite. Ainſi 168 eſt le même que deux fois 72 plus 24; mais 24 ſe diviſe exactement lui-même, & diviſe auſſi exactement deux fois 72; puiſqu'il diviſe exactement 72 : donc 24 diviſe exactement deux fois 72 plus 24, c'eſt-à-dire 168. De même 240 contient une fois 168 plus 72; comme on voit par la diviſion que nous avons faite : donc 240 eſt la même choſe que 168 plus 72. Or 24 diviſe exactement 168 & 72 : donc 24 doit auſſi diviſer exactement 168 plus 72, c'eſt-à-dire 240.

Je dis II°. que 24 eſt le plus grand diviſeur qui puiſſe diviſer exactement 168 & 240. Si l'on vouloit qu'il y eût un nombre plus grand que 24, qui diviſât exactement 168 & 240, il faudroit que ce nombre diviſât exactement 168 & le premier reſte 72 : car 240 étant la même choſe que 168 plus 72; ſi le diviſeur de 168 ne diviſoit pas exactement 72, il ne diviſeroit pas non plus 168 plus 72, c'eſt-à-dire 240. De plus 168 étant égal à deux fois 72 plus 24, le diviſeur qui diviſeroit exactement 168 & 72, devroit auſſi diviſer exactement deux fois 72, & 24; car autrement il ne diviſeroit pas 168 égal à deux fois 72 plus 24 : or 24 ne peut pas avoir un diviſeur plus grand que lui, donc il ne peut pas ſe trouver de nombre plus grand qui diviſe exactement 168 & 240.

40. PROBLÈME V. *Evaluer une fraction.*

SOLUTION. Nous avons dit (8) qu'il y a de certaines choſes dont

l'uſage a voulu qu'on ait fait des diviſions & des ſoudiviſions nommées ſous-eſpeces. Or *évaluer* une fraction de quelqu'une de ces choſes, c'eſt chercher combien la fraction contient de ſous-eſpeces.

Pour ſçavoir combien $\frac{3}{4}$ de livres contient de ſols, qui eſt la ſous-eſpece de la livre; il faut reduire la livre en ſols, c'eſt-à-dire la multiplier par 20, à cauſe que la livre contient 20 ſols: enſuite on diviſera 20 par 4, pour en avoir le quart qui eſt 5; & l'on multipliera ce quart par 3, parce qu'on a $\frac{3}{4}$: & le produit 15 ſols marquera que $\frac{3}{4}$ de livres valent 15 ſols; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

41. PROBLÊME VI. *Ajouter enſemble deux ou pluſieurs fractions.*

SOLUTION. Si les fractions ont un même dénominateur, on ajoute enſemble tous les numérateurs: mais ſi les dénominateurs ſont différens, on réduit auparavant les fractions à une même dénomination.

EXEMPLE I. *Un homme a acheté d'une part* 12 *aunes* $\frac{3}{5}$ *d'étoffe, & d'une autre* 14 *aunes* $\frac{4}{5}$ *: combien a-t'il acheté d'aunes en tout?*

SOLUTION. J'écris les aunes ſous les aunes, & les fractions ſous les fractions. Après quoi je dis: $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{5}$ font $\frac{7}{5}$; & comme le numérateur 7 eſt plus grand que le dénominateur 5, je diviſe 7 par 5, pour ſavoir combien il y a d'entiers; & je trouve 1 entier avec un reſte 2, c'eſt-à-dire $\frac{2}{5}$. J'écris $\frac{2}{5}$ ſous la ligne, & paſſant aux aunes, je dis: 1 entier que j'ai & 2 font 3: & 4 font 7, & achevant le reſte à l'ordinaire, je trouve que cet homme a acheté 27 aunes & $\frac{2}{5}$.

12 aunes	$\frac{3}{5}$
14	$\frac{4}{5}$
27	$\frac{2}{5}$

EXEMPLE II. *Un Marchand a vendu à trois differentes perſonnes* 15 *aunes* $\frac{2}{3}$, 12 *aunes* $\frac{3}{4}$, 18 *aunes* $\frac{4}{5}$ *: combien a-t'il vendu en tout?*

SOLUTION. Je réduis les trois fractions au même dénominateur; & j'ai les nouvelles fractions $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, qui ſont les mêmes que les fractions propoſées.

40	45	48
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
60		

J'écris donc 15 aunes $\frac{40}{60}$, au lieu de 15 aunes $\frac{2}{3}$; 12 aunes $\frac{45}{60}$, au lieu de 12 aunes $\frac{3}{4}$; & 18 aunes $\frac{48}{60}$, au lieu de 18 aunes $\frac{4}{5}$; & ajoutant enſemble les trois numérateurs, la ſomme eſt $\frac{133}{60}$; & comme le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, je diviſe 133 par 60, & le quotient eſt 2 entiers avec un reſte $\frac{13}{60}$. J'écris $\frac{13}{60}$ ſous

15 aunes	$\frac{40}{60}$
12	$\frac{45}{60}$
18	$\frac{48}{60}$
47	$\frac{23}{60}$

les fractions, & portant 2 entiers au rang des aunes, je dis : 2 que je porte & 5 font 7, & achevant le reſte à la maniere accoutumée, je trouve que ce marchand a vendu 47 aunes $\frac{13}{00}$.

42. PROBLÊME VII. *Souſtraire une fraction d'une autre.*

SOLUTION. Si les deux fractions ont le même dénominateur, on ſouſtrait le numérateur de la petite du numérateur de la grande; & ce qui reſte eſt le numérateur de la fraction reſtante : que ſi les dénominateurs ſont différens, on réduit auparavant les deux fractions à une même dénomination.

EXEMPLE I. *Un homme entreprend un voyage qui en ſuivant la route commune ſeroit de 28 lieues $\frac{3}{4}$: mais en prenant une autre route, il ne fera que 17 lieues $\frac{1}{4}$: combien épargnera-t'il de lieues ?*

SOLUTION. J'écris ces deux nombres l'un ſous l'autre, c'eſt-à-dire les lieues du petit ſous les lieues du grand, & les fractions ſous les fractions. Enſuite je dis : de $\frac{3}{4}$ ôtez $\frac{1}{4}$, ou de 3 ôtez 1, il reſte 2, ou $\frac{2}{4}$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}$: de 8 ôtez 7, il reſte 1 ; & de 2 ôtez 1, il reſte 1. Ainſi cet homme fera 11 lieues $\frac{1}{2}$ de moins.

28 lieues	$\frac{1}{4}$
17	$\frac{1}{4}$
11	$\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$

EXEMPLE II. *De 17 aunes $\frac{1}{4}$, ôtez 15 aunes $\frac{2}{3}$: que reſte-t-il ?*

SOLUTION. Je réduis les deux fractions au même dénominateur : ce qui donne $\frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$. J'écris donc 17 aunes $\frac{9}{12}$, au lieu de 17 aunes $\frac{3}{4}$; & par-deſſous 15 aunes $\frac{8}{12}$, au lieu de 15 aunes & $\frac{2}{3}$. Enſuite je dis : de $\frac{9}{12}$ ôtez $\frac{8}{12}$, ou de 9 ôtez 8, il reſte 1 ou $\frac{1}{12}$: de 7 aunes ôtez 5 ; il reſte 2, & de 1 ôtez 1, il ne reſte rien. Ainſi le reſte eſt 2 aunes $\frac{1}{12}$.

9	8	17 aunes	$\frac{9}{12}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	15	$\frac{8}{12}$
12		2	$\frac{1}{12}$

EXEMPLE III. *Un homme a acheté 25 aunes $\frac{2}{5}$ d'étoffe, il en a cédé à un ami 9 aunes $\frac{3}{4}$: combien lui en reſte-t-il ?*

SOLUTION. Je réduis les deux fractions au même dénominateur : ce qui donne $\frac{8}{20}$, & $\frac{15}{20}$. J'écris donc 25 aunes $\frac{8}{20}$, & par-deſſous 9 aunes $\frac{15}{20}$; & je dis : de $\frac{8}{20}$ je ne puis ôter $\frac{15}{20}$: c'eſt pourquoi j'emprunte une unité au rang des aunes, & la réduiſant en une fraction dont le dénominateur ſoit 20, j'ai $\frac{20}{20}$ qui joints aux $\frac{8}{20}$ que j'ai déjà font $\frac{28}{20}$; & de $\frac{28}{20}$ ôtez $\frac{15}{20}$, il reſte $\frac{13}{20}$: enſuite de 4 ne pouvant ôter 9, j'emprunte une unité ſur le rang ſuivant, laquelle unité vaût 10, & ces 10 joints aux 4 que j'ai

8	15	25 aunes	$\frac{8}{20}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	9	$\frac{15}{20}$
20		15	$\frac{13}{20}$

déjà font 14, & de 14 ôtez 9, il reſte 5 : enfin de 1 ôtez 0, il reſte 1 ; donc ce qui reſte à cet homme eſt 15 aunes $\frac{11}{20}$.

43. PROBLÊME VIII. *Multiplier une fraction par une autre.*

SOLUTION. Pour multiplier deux fractions l'une par l'autre, ſoit que les dénominateurs ſoient les mêmes, ou qu'ils ſoient différens, on multiplie les deux numérateurs l'un par l'autre, & les deux dénominateurs auſſi, & l'on a une nouvelle fraction qui eſt le produit des deux.

Pour multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{5}$, on multiplie le numerateur 3 par le numerateur 4 ; ce qui fait 12 : on multiplie de même le dénominateur 4 par le dénominateur 5 ; ce qui fait 20 : & l'on écrit $\frac{12}{20}$ pour le produit des deux fractions.

DÉMONSTRATION. Si au lieu du multiplicateur $\frac{4}{5}$ j'avois quatre unités, je multiplierois le numérateur 3 de la fraction $\frac{3}{4}$, par le multiplicateur 4 ; & j'aurois $\frac{12}{4}$ pour le produit. Car $\frac{3}{4}$ pris 4 fois, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur 4, font $\frac{12}{4}$; or ce n'eſt pas par 4 unités que je dois multiplier $\frac{3}{4}$; mais par $\frac{4}{5}$, ou par 4 diviſé par 5 : ainſi en multipliant par 4, j'ai trop multiplié, & le produit $\frac{12}{4}$ eſt trop grand. Pour corriger donc ce défaut, il faut que je diviſe ce produit par le dénominateur 5 de $\frac{4}{5}$: mais $\frac{12}{4}$ étant la même choſe que 12 diviſé par 4, il s'enſuit que 12 diviſé par 4, doit être enſuite diviſé par 5 ; ou ce qui revient au même, que 12 doit être diviſé tout d'un coup par le produit 20 des deux diviſeurs 4 & 5 (35). Donc la fraction $\frac{12}{20}$ eſt le produit cherché.

44. PROBLÊME IX. *Diviſer une fraction par une autre.*

SOLUTION. Pour diviſer une fraction par une autre, il faut toujours que les dénominateurs ſoient les mêmes ; & ſi cela n'eſt pas, il faut auparavant réduire les fractions à la même dénomination. Après quoi on diviſe le numérateur de la fraction à diviſer par le numerateur de la fraction qui doit la diviſer.

Pour diviſer $\frac{8}{9}$ par $\frac{4}{9}$, on diviſe 8 par 4 ; & le quotient 2 fait voir que $\frac{8}{9}$ contient 2 fois $\frac{4}{9}$.

Pour diviſer $\frac{9}{10}$ par $\frac{7}{10}$, on diviſe 9 par 7 ; & le quotient $\frac{9}{7}$ ou 1 $\frac{2}{7}$ fait voir que $\frac{9}{10}$ contient $\frac{7}{10}$ une fois & deux ſeptiemes de fois : c'eſt-à-dire que $\frac{9}{10}$ contient $\frac{7}{10}$ & 2 parties de ſept dixiemes ou $\frac{2}{10}$, & ainſi des autres.

45. PROBLÊME X. *Evaluer des fractions de fractions.*

SOLUTION. De même qu'on peut diviſer un entier en pluſieurs parties égales, & en prendre quelques-unes, ce qui fait une fraction ; de même auſſi on peut diviſer une fraction en pluſieurs parties égales, & en prendre quelques-unes, ce qui fait une fraction de fraction. D'où l'on voit qu'une fraction de fraction n'a pas un rapport immédiat à l'entier, mais ſeulement à la fraction dont elle eſt partie. Le $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ n'eſt pas le tiers de l'entier, mais le tiers d'une partie de l'entier.

Pour opérer ſur les fractions de fractions, il faut auparavant leur donner un rapport immédiat à l'entier, c'eſt-à-dire les faire devenir ſimples fractions ; ce que l'on fait ainſi :

Soit la fraction de fraction $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ d'aune. Je multiplie les deux dénominateurs enſemble. Ce qui fait 12 ; & prenant 12 pour dénominateur, & 1 pour numérateur, j'ai la fraction $\frac{1}{12}$ d'aune égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ d'aune : ce qui eſt viſible ; puiſque l'aune contenant quatre quarts, & chaque quart contenant trois tiers, l'aune doit par conſéquent contenir trois fois quatre, ou 12 parties telles que chacune ſoit le tiers de ſon quart ; & par conſéquent chacune de ces parties eſt la douzieme partie de l'aune.

Soit encore la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ d'aune. Je multiplie les deux numérateurs ; ce qui fait 6, & les deux dénominateurs, ce qui fait 12 ; & j'ai la fraction $\frac{6}{12}$ d'aune égale à $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ d'aune. Car le tiers d'un quart étant un douzieme d'aune, les deux tiers d'un quart ſont deux douziemes d'aunes, & les deux tiers de trois quarts ſont 2 fois 3 ou 6 douziemes d'aunes.

CHAPITRE IV.

DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION COMPOSÉES.

46. LA *partie aliquote* d'un nombre eſt une partie qui étant priſe pluſieurs fois eſt égale à ce nombre : 4 étant pris cinq fois eſt égal à 20, donc 4 eſt une partie aliquote de 20.

47. La *partie aliquante* d'un nombre eſt une partie qui étant priſe pluſieurs fois, eſt toujours ou moindre ou plus grande que ce nombre, ſans pouvoir jamais lui être égale : 6 pris trois fois eſt moindre que 20, & le même 6 pris quatre fois, cinq fois, &c. eſt plus grand que 20. Donc 6 eſt partie aliquante de 20.

48 Toute partie aliquante d'un nombre peut ſe partager en deux

ou pluſieurs parties aliquotes. Par exemple 6, partie aliquante de 20, peut ſe couper en deux parties 4 & 2, dont la premiere eſt contenue cinq fois dans 20, & la ſeconde y eſt contenue dix fois : le même 6 peut ſe couper encore en deux parties 5 & 1, dont la premiere eſt contenue quatre fois dans 20, & l'autre y eſt contenue vingt fois.

49. C'eſt par le moyen des parties aliquotes, & des aliquantes réduites en aliquotes qu'on fait la multiplication compoſée, ainſi qu'on verra après que nous aurons établi les deux principes ſuivans.

50. THÉORÊME I. *Si l'on diviſe un nombre entier par* 10, *le quotient ſera toujours égal à toutes les parties du dividende, excepté la derniere à droite, qui ſera une fraction, dont le dénominateur ſera* 10.

DÉMONSTRATION. Soit le nombre 3642, à diviſer par 10. Je le diviſe à la façon ordinaire; & je vois que dans chaque opération le premier nombre 1 du diviſeur eſt contenu dans le caractere correſpondant du dividende, autant de fois que ce caractere contient d'unités; & que le ſecond caractere o du diviſeur laiſſe toujours ſubſiſter le caractere du divdende qui lui répond : donc après la derniere opération, je dois avoir au quotient les caracteres 364 qui ſont les trois premiers caracteres du dividende, & le dernier caractere eſt un reſte à diviſer par 10, & par conſéquent ce reſte eſt $\frac{2}{10}$.

36.42	10
30	364+$\frac{2}{10}$
64	
60	
42	
40	
(2	

De-là il ſuit qu'au lieu de faire la diviſion demandée, on n'a qu'à retrancher tout d'un coup le dernier caractere & écrire 364 $\frac{2}{10}$.

51. THÉORÊME II. *Si l'on diviſe un nombre par* 20, *le quotient ſera toujours égal à la moitié de tous les termes de ce nombre qui précédent le dernier, & le reſte ſera une fraction qui aura pour dénominateur* 20.

DÉMONSTRATION Soit le nombre 4652 à diviſer par 20. Je fais la diviſion, & je trouve que le premier caractere 2 du diviſeur me donne dans chaque opération la moitié du caractere du dividende qui ſe trouve ſous lui : parce que c'eſt la même choſe de prendre la moitié ou de diviſer par 2 : & que le ſecond caractere zéro du diviſeur laiſſe toujours ſubſiſter le caractere du dividende qui ſe trouve ſous lui. Donc après la derniere opé-

46.52	20
40	232+$\frac{12}{20}$
65	
60	
52	
40	
(12	

ration, je dois avoir au quotient 232; c'eſt-à-dire la moitié des trois premiers caracteres 465 du dividende; & après avoir pris cette moitié, il reſte 1 dixaine, laquelle jointe au dernier caractere 2 du dividende fait 12, c'eſt-à-dire 12 à diviſer par 20, ou $\frac{12}{20}$.

De-là il ſuit qu'au lieu de faire la diviſion demandée, il n'y a qu'à retrancher du dividende le dernier caractere à droite, & prendre la moitié en allant de gauche à droite; ainſi on dira la moitié de 4 eſt 2; la moitié de 6 eſt 3, & la moitié de 5 eſt 2; & il reſte 1 dixaine, qui jointe au caractere retranché 2 fait $\frac{12}{20}$, & l'on aura $232\frac{12}{20}$.

Je laiſſe examiner aux commençans ce qui arriveroit, ſi l'on diviſoit un nombre par 30, 40, 50, 60, & ainſi du reſte; & je vais propoſer quelques exemples, ou réſoudre quelques problêmes, ſur cette matiere.

DE LA MULTIPLICATION COMPOSÉE.

Problême I. *Un ouvrier a fait* 365 *toiſes d'ouvrage à* 4 *livres* 10 *ſols la toiſe : combien lui revient-il?*

Solution. J'écris le nombre à multiplier 365, & ſous ſon dernier caractere à droite j'écris 4 livres & j'avance 10 ſols : enſuite je multiplie 365 par 4; ce qui donne 1460 livres.

Maintenant pour multiplier par 10 ſols, je dis : ſi l'aune ne coutoit qu'une livre ou 20 ſols, le prix de 365 aunes ſeroit 365 livres : mais 10 ſols eſt la moitié d'une livre; donc je ne dois avoir que la moitié de 365. Je dis donc : la moitié de 3 eſt 1 & il reſte 1 qui joint au caractere ſuivant 6 fait 16; la moitié de 16 eſt 8; la moitié de 5 eſt 2, & il reſte 1 livre à partager en deux ou une moitié de livre : or la moitié d'une livre eſt 10, & par conſéquent j'écris 10 ſols, & ajoutant enſemble les deux produits, j'ai 1642 livres 10 ſols, pour le prix de 365 toiſes.

365 toiſes	
4 l.	10 ſ.
1460	
182	10
1642	10

Problême II. *A* 5 *livres* 13 *ſols* 6 *deniers la toiſe, combien vaudront* 535 *toiſes?*

Solution. Je multiplie 535 par 5 livres; ce qui donne 2675 livres : enſuite les 13 ſols n'étant pas une partie aliquote de 20 ſols, ou d'une livre, je coupe 13 ſols en trois parties 10, 2, & 1, dont la premiere eſt la moitié d'une livre, la ſeconde eſt le dixieme, & la troiſieme eſt le vingtieme. Je multiplie donc par 10 ſols, en diſant : ſi la toiſe ne valoit que 1 livre, le prix de 535 toiſes

535. toiſes		
5 l.	13 ſ.	6 d.
2675		
267	10	
53	10	
26	15	
13	7	6
3036	2	6

ne vaudroit que 535 livres ; or 10 eſt la moitié de la livre ; donc je ne dois prendre que la moitié : & prenant cette moitié, j'ai 267 livres 10 ſols.

Pour multiplier par 2 ſols qui eſt le dixieme d'une livre, je prens le dixieme de 535 que rendroit une livre ; or pour prendre le dixieme, ou pour diviſer par 10, je coupe le dernier caractere de 535 (50) ; & j'ai 53 livres, & le reſte eſt une fraction $\frac{5}{10}$: mais chaque dixieme vaut 2 ſols ; donc 5 dixiemes valent 10 ſols, & par conſéquent j'ai 53 livres 10 ſols pour le produit de 2 ſols.

Pour multiplier par 1 ſol, je prends le vingtieme de 535 livres qu'une livre rendroit, c'eſt-à-dire, je diviſe 535 par 20. Ainſi je coupe le dernier caractere 5 ; & je prends la moitié de 53 qui eſt 26 (51) ; & il reſte 1, lequel joint au dernier caractere fait $\frac{15}{20}$. Or chaque vingtieme vaut 1 ſol ; donc $\frac{15}{20}$ font 15 ſols : j'ai donc 26 livres 15 ſols pour le produit de 1 ſol.

Maintenant pour multiplier par 6 deniers, je prends la moitié de ce que 1 ſol m'a rendu, à cauſe que 6 deniers eſt la moitié d'un ſol ; & j'ai 13 livres 7 ſols 6 deniers. Mais ſi avant les ſix deniers je n'avois eu que 10 ſols, & que par conſéquent je n'euſſe point le produit d'un ſol qui me fait voir tout d'un coup que 6 deniers doivent me rendre la moitié de ce produit, je ferois une ſuppoſition en diſant : ſi j'avois à multiplier par 2 ſols qui eſt le dixieme d'une livre, je n'aurois qu'à retrancher le dernier caractere de 535, & j'aurois 53 livres & $\frac{5}{10}$, chacun deſquels valant 2 ſols font 10 ſols. Ainſi j'aurois 53 livres 10 ſols pour le produit de 2 ſols : or 6 deniers ſont le quart de 2 ſols : donc 6 deniers doivent me produire le quart de 53 livres 10 ſols ; & prenant le quart, je dirois : le quart de 5 eſt 1, & il reſte 1, qui avec le 3 ſuivant fait 13 ; le quart de 13 eſt 3, & il reſte 1 livre ou 20 ſols, qui joint aux 10 ſols ſuivans font 30 ſols ; le le quart de 30 ſols eſt 7 ſols, & il reſte 2 ſols ou 24 deniers, dont le quart eſt 6 ; ainſi j'aurois 13 livres 7 ſols 6 deniers pour le produit de 6 deniers.

J'ajoute enſemble tous les produits que je viens de trouver, & le produit total 3036 livres 2 ſols 6 deniers eſt le prix des 535 aunes.

PROBLÊME III. 327 *toiſes* 3 *pieds* 6 *pouces à* 3 *livres* 9 *ſols* 4 *deniers la toiſe, combien valent-elles ?*

SOLUTION. Je néglige les 3 pieds 6 pouces du multiplicateur, & je multiplie 327 par 3 : ce qui donne 981 livres.

Comme 9 ſols n'eſt pas une partie aliquote de 20 ſols, je coupe

9

9 en 2 parties 5 & 4, dont l'une eſt le quart, & l'autre le cinquieme d'une livre. (48).

Je multiplie par 5 ſols, en prenant le quart de 327. Le quart de 32 eſt 8; le quart de 7 eſt 1; & il reſte 3 livres à diviſer par 4, ou $\frac{3}{4}$ de livres. Or chaque quart vaut 5 ſols : donc $\frac{3}{4}$ valent 15 ſols; & par conſéquent j'ai 81 livres 15 ſols, pour le produit de 5 ſols.

32.7 toiſes	3 pieds	6 pouces.
31.	9 ſ	4 d.
981		
81	15	
65	8	
5	9	
1	14	8
0	5	9 $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$
1135	12	5 $\frac{1}{3}$

Je multiplie par 4 ſols en prenant le cinquieme de 327, le cinquieme de 32 eſt 6; & il reſte 2, qui avec le caractere ſuivant 7 ſont 27 : le cinquieme de 27 eſt 5, & il reſte 2 à diviſer par 5, ou $\frac{2}{5}$: or chaque cinquieme vaut 4 ſols; donc $\frac{2}{5}$ valent 8 ſols. Ainſi j'ai 65 livres 8 ſols, pour le produit de 4 ſols.

Pour multiplier par 4 deniers, je ſuppoſe que j'euſſe à multiplier par 2 ſols, qui eſt le dixieme d'une livre : & en ce cas j'aurois 32 livres $\frac{7}{10}$ ou 14 ſols, pour le produit de deux ſols. Or 4 deniers ſont le ſixieme de 2 ſols : donc je dois prendre le ſixieme de 32. Mais ce ſixieme eſt 5; & il reſte 2 livres ou 40 ſols, leſquels joints aux 14 ſols font 54 ſols; & le ſixieme de 54 ſols, eſt 9 ſols : donc j'ai 5 livres neuf ſols, pour le produit de 4 deniers.

Il reſte encore les 3 pieds 6 pouces, que j'ai négligé. Or puiſque la toiſe coûte 3 livres 9 ſols 4 deniers; 3 pieds, qui ſont la moitié de la toiſe, ne doivent coûter que la moitié de 3 livres 9 ſols 4 deniers. Je dis donc : la moitié de 3 livres eſt 1 livre; & il reſte 1 livre ou 20 ſols, leſquels joints aux 9 ſols font 29 ſols : la moitié de 29 eſt 14, & il reſte 1 ſol ou 12 deniers, leſquels joints aux 4 deniers font 16 deniers, & la moitié de 16 eſt 8.

Six pouces ſont le ſixieme de 3 pieds : car la valeur de chaque pied étant de 12 pouces, 3 pieds en valent 36, dont 6 eſt le ſixieme. Je prends le ſixieme de ce que trois pieds m'ont rendu, en diſant : le ſixieme de 1 livre eſt zero de livres; & il reſte une livre ou 20 ſols, leſquels joints aux 14 ſols ſont 34 ſols; le ſixieme de 34 eſt 5 ſols; & il reſte 4 ſols ou 48 deniers, leſquels joints aux 8 deniers font 56 : le ſixieme de 56 eſt 9 deniers, & il reſte $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ que j'écris.

J'ajoute enſemble tous les produits que j'ai trouvés; & la ſomme totale 1135 livres 12 ſols 5 deniers $\frac{1}{3}$, eſt la valeur des 327 toiſes 3 pieds 6 pouces.

52. REMARQUE. J'ai dit au ſujet des 4 deniers, qu'en ſuppoſant que j'euſſe à multiplier par 2 ſols, qui eſt le dixieme d'une livre, je

n'avois qu'à retrancher le dernier caractere de 327 ; & que j'aurois 32 livres 14 ſols pour le produit de 2 ſols, c'eſt-à-dire qu'il faudroit doubler le dernier caractere 7 en le mettant au rang des ſols, & cela pour les raiſons que j'en ai apportées (50). Or en voulant multiplier par 4 deniers, qui eſt le ſixieme de 2 ſols, j'ai pris le ſixieme de 32 qui eſt 5 ; & il m'eſt reſté 2 livres ou quatre dixaines de ſols, leſquelles jointes aux 14 ont fait 54 ſols, dont j'ai pris le ſixieme. D'où l'on voit que j'ai doublé le reſte 2, de même qu'il faut doubler le dernier caractere 7 du nombre 327. Or ſi l'on ne veut doubler ni le reſte ni le dernier caractere ; on n'a qu'à prendre le tiers au lieu du ſixieme, & dire le tiers de 27 ſols eſt 9 ſols ; & la raiſon de cela, c'eſt que le tiers de 27, qui eſt la moitié de 54, eſt égal au ſixieme du tout de 54 : & on fera de même dans tous les cas ſemblables, en prenant pour le reſte & pour le dernier caractere, une fraction dont le dénominateur ne ſeroit plus que la moitié du dénominateur de celle qu'on prenoit.

Ainſi ſi l'on vouloit multiplier par 2 deniers, qui ſont le douzieme de 2 ſols, on prendroit le douzieme de 32 qui eſt 2, & il reſteroit 8, qui avec le dernier caractere 7 feroit 87, & au lieu d'en prendre le douzieme on en prendroit le ſixieme, en diſant : le ſixieme de 8 eſt 1, & il reſte 2, qui avec 7 font 27 : le ſixieme de 27 eſt 4, & il reſte 3 ou $\frac{1}{6}$. Or chaque ſixieme de ſol vaut 2 deniers : donc $\frac{1}{6}$ font 6 deniers. On auroit donc 2 livres 14 ſols 6 deniers, pour le produit de 2 deniers, & ainſi des autres.

PROBLÊME. IV. *A* 3 *livres* 4 *ſols* 3 *deniers, combien valent* 535 *aunes* $\frac{1}{4}$?

SOLUTION. Je néglige d'abord la fraction ; & multipliant 535 par 3, j'ai 1605 livres.

Enſuite, 4 ſols étant la cinquieme partie d'une livre ; je prends le cinquieme de 535, & j'ai 107 livres.

Pour multiplier par 3 deniers, je ſuppoſe que j'aye à multiplier par 2 ſols, & en ce cas retranchant le dernier caractere de 535, j'aurois 53 livres $\frac{5}{10}$ ou 10 ſols, pour le produit de 2 ſols. Or 3 deniers eſt le huitieme de 2 ſols : je prends donc le huitieme de 53 livres qui eſt 6, & il reſte 5 livres qu'il faudroit doubler pour avoir 10 dixaines, leſquelles jointes au double 10 du dernier caractere, feroient 110 dont il faudroit prendre le huitieme. Mais pour n'être pas obligé

535 aunes $\frac{1}{4}$			
3 l.	4 ſ.	3 d.	
1605			
107			
6	13	9	
0	16	0	$\frac{3}{4}$
1719	9	9	$\frac{3}{4}$

de doubler rien, je laiſſe ſubſiſter le reſte 5, & le dernier caractere 5 : ce qui ne fait plus que 55, c'eſt-à-dire la moitié de 110, & je prends non plus le huitieme, mais le quart de 55; parce que le quart de la moitié eſt égal au huitieme du tout. Or le quart de 55 ſols eſt 13 ſols; & il reſte 3 ou $\frac{3}{4}$ qui valent 9 deniers: parce que chaque quart de ſols vaut 3 deniers, j'ai donc 6 livres 13 ſols 9 deniers pour le produit de 3 deniers.

Il reſte à multiplier par le quart d'aune que j'ai négligé. Or la valeur d'une aune étant 3 livres 4 ſols 3 deniers; la valeur d'un quart ne doit être que le quart de 3 livres 4 ſols 3 deniers. Je dis donc : le quart de 3 livres eſt zero de livres, & il reſte 3 livres ou 60 ſols, leſquels joints aux 4 ſuivans font 64 : le quart de 64 ſols eſt 16 ſols; le quart de 3 deniers eſt zero de deniers, & il reſte $\frac{3}{4}$ que j'écris.

J'ajoute enſemble tous les produits trouvés, & le produit total 1719 livres 9 ſols 9 deniers $\frac{3}{4}$ eſt la valeur des 535 aunes $\frac{1}{4}$.

DE LA DIVISION COMPOSÉE.

53. La *diviſion compoſée* ſeroit trop embarraſſante à faire par les parties aliquotes, ſur-tout lorſque le dividende & le diviſeur ſeroient des nombres compoſés. C'eſt pourquoi, avant de faire l'opération, on réduit tout aux moindres eſpeces, ainſi qu'on va voir dans les exemples ſuivans, qui ſerviront de preuves aux exemples de la multiplication compoſée que je viens de donner.

PROBLÊME I. *On a donné à un Ouvrier* 1642 *livres* 10 *ſols pour avoir fait* 365 *toiſes d'ouvrage : combien vaut la toiſe de cet ouvrage?*

SOLUTION. D'abord 1642 livres 10 ſols viennent d'avoir multiplié les 365 toiſes par le prix de la toiſe : donc ſi je diviſe le produit 1642 livres 10 ſols, par le nombre à multiplier 365; le quotient ſera le multiplicateur ou la valeur de la toiſe qu'on demande. (28.)

Avant de faire la diviſion, je réduis les livres en ſols, c'eſt à dire, je multiplie 1642 par 20, à cauſe que chaque livre vaut 20 ſols; & j'ai 32840, auxquelles ajoutant les 10 ſols, la ſomme eſt 32850 ſols, & c'eſt le dividende.

Maintenant le dividende étant devenu vingt fois plus grand, à cauſe de cette multiplication; le quotient de-

1642 l.
20 ſ.
32840
10
32850 *Dividende.*

365
20
7300 *Diviſeur.*

7300 | 32850 (4 l.
3650
20
73000 ſ.

7300 | 73000 (10 ſ.
00
0

viendroit vingt fois plus grand que ſi je n'avois pas augmenté le dividende. Car le diviſeur eſt d'autant plus contenu dans le dividende, que ce dividende eſt plus grand ; & par conſéquent le quotient devient plus grand. C'eſt pourquoi je multiplie le diviſeur par le même nombre 20, qui a multiplié le dividende. Ainſi le dividende & le diviſeur ſont encore entre eux, comme ſi je ne les avois pas multipliés (33) ; & par conſéquent le quotient doit être le même qu'il ſeroit, ſi je n'avois fait aucune multiplication.

Le produit de 365 par 20 étant 7300 ; je diviſe 32850 par 7300, & le quotient eſt 4 livres, & il reſte 3650 ou $\frac{3650}{7300}$ qui eſt une fraction de livre, & qui par conſéquent eſt la même choſe que 3650 livres à diviſer par 7300. Je réduis ces livres en ſols, en multipliant par 20 : ce qui donne 73000 ſols, que je diviſe par le diviſeur 7300, & le quotient eſt 10 ſols. Ainſi le prix de la toiſe eſt 4 livres 10 ſols ; & ceci eſt la preuve du premier exemple ou du premier problême de la multiplication compoſée.

J'aurois pu me paſſer de multiplier le diviſeur 365 par 20 ; & alors faiſant la diviſion, le quotient auroit contenu des ſols : puiſque le dividende auroit contenu des ſols, & que le diviſeur n'auroit pas été augmenté à proportion du dividende : ainſi j'aurois eu 90 ſols. Or pour réduire 90 ſols en livres, il faut les diviſer par 20, c'eſt-à-dire, chercher combien il y a de fois 20 ſols ou 1 livre dans 90 ſols : & par conſéquent retranchant le dernier caractere 0, j'aurois pris la moitié de 9 qui eſt 4 livres, & il ſeroit reſté 1 qui avec le 0 retranché auroit fait $\frac{10}{20}$ ou 10 ſols ; & j'aurois eu 4 livres 10 ſols, pour le prix de la toiſe. Or quoique cette méthode ſoit plus abrégée, cependant comme elle ſeroit embarraſſante dans certains cas, j'ai mieux aimé donner la précédente qui convient à tous les cas, comme on verra dans les exemples ſuivans.

```
 365
32850 (90 ſ.
0000    4 l. 10
    0
```

54. Il faut remarquer en paſſant que lorſqu'on multiplie par un nombre dont le dernier caractere à droite eſt un zéro, il faudroit multiplier tous les caracteres du nombre à multiplier par zéro ; & que par conſéquent on auroit un rang de zéros comme on voit ici : après quoi il faudroit multiplier le nombre à multiplier 1642 par le ſecond caractere 2 du multiplicateur, & écrire le produit par deſſous le rang des zéros, en commençant à écrire ſous les dixaines. Or pour abréger, on n'écrit qu'un zéro ſous les unités ; & à côté de ce zéro on écrit

```
 1642      1642
   20        20
 ----      ----
 0000     32840
 3284
 ----
32840
```

le ſecond produit 3284 : ce qui donne le même produit total que ſi on avoit écrit le rang des zéros tout entier.

De même, pour multiplier 1642 par le multiplicateur 200, qui a deux zéros de droite à gauche; au lieu d'écrire un rang de zéros pour le premier zéro, enſuite un ſecond rang de zéros pour le ſecond zéro, enſuite un troiſieme rang pour le produit 3284, on écrira ſimplement deux zéros, l'un ſous les unités & l'autre ſous les dixaines; & enſuite on écrira le produit 3284 à côté de ces zéros; c'eſt-à-dire, à commencer ſous le rang des centaines. Car par ce moyen le produit 3284 aura toujours ſa même valeur, & le produit total ſera toujours le même.

1642	1642
200	200
0000	328400
0000	
3284	
328400	

PROBLÊME II. 535 *toiſes d'ouvrage ont couté* 3036 *livres* 2 *ſols* 6 *deniers : combien vaut la toiſe ?*

SOLUTION. Pour faire cette diviſion, je réduis les livres en ſols, en les multipliant par 20 : ce qui fait 60720 ſols, auxquels ajoutant les 2 ſols; j'ai 60722 ſols. Je réduis ces ſols en deniers en les multipliant par 12 : ce qui fait 728664 deniers, auxquels ajoutant les 6 deniers, la ſomme eſt 728670, & c'eſt le dividende.

3036	535
20	20
60720	10700
2	12
60722	21400
12	10700
121444	128400 *Diviſeur.*
60722	
728664	
6	
728670 *Dividende.*	

Or ce dividende ayant été multiplié par 20 & par 12, eſt devenu beaucoup plus grand qu'il ne faut par rapport au diviſeur; & par conſéquent le quotient deviendroit plus grand qu'il ne faut pour exprimer des livres. C'eſt pourquoi, afin de conſerver le rapport du dividende au diviſeur, je multiplie auſſi le diviſeur 535 par 20, & enſuite par 12 : ce qui donne 128400.

128400		184000	
728670	(51.	1733400	(13
86670		449400	
20		64200	
1733400		12	
		128400	
		64200	
		770400	
128400			
770400	(6 d.		
000000			

plie auſſi le diviſeur 535 par 20, & enſuite par 12 : ce qui donne 128400.

Je diviſe 728670 par 128400 ; & le quotient eſt 5 livres. Car quoique j'aie réduit le nombre à multiplier en deniers, cependant comme j'ai multiplié le diviſeur par 20 & 12, c'eſt comme ſi je n'avois rien fait, & par conſéquent il doit me venir des livres au quotient, & la fraction reſtante $\frac{86670}{128400}$ eſt une fraction de livres.

J'évalue cette fraction en multipliant ſon numérateur par 20, à cauſe que la livre contient 20 ſols (40); & je diviſe le produit 1733400 par le dénominateur 128400, & le quotient eſt 13 ſols & une fraction de ſols $\frac{64200}{128400}$.

J'évalue cette ſeconde fraction en multipliant ſon numérateur par 12, à cauſe que le ſol contient 12 deniers ; & je diviſe le produit 770400 par le dénominateur 128400 : ce qui me donne 6 deniers, & il ne reſte rien. Ainſi la valeur de la toiſe eſt 5 livres 13 ſols 6 deniers, & c'eſt la preuve du ſecond exemple ou du ſecond problême de la multiplication compoſée.

PROBLÊME III. *327 toiſes 3 pieds 6 pouces ont coûté 1135 livres 12 ſols 5 deniers $\frac{1}{3}$: ſur quel pied a-t'on payé la toiſe ?*

SOLUTION. Je réduis le dividende 1135 livres 12 ſols 5 deniers $\frac{1}{3}$, en ſols en multipliant les livres par 20 ; & le produit eſt 22700 ſols, auxquels ajoutant les 12 ſols, la ſomme eſt 22712 ſols. Je réduis ces ſols en deniers, en les multipliant par 12 ; & le produit eſt 272544 deniers, auxquels ajoutant les 5 deniers, la ſomme eſt 272549 deniers. Enfin je réduis ces deniers en tiers, en les multipliant par 3 ; & le produit eſt 817647, auquel ajoutant 1 tiers que j'ai, la ſomme eſt 817648 tiers de deniers.

Je réduis auſſi le diviſeur 327 toiſes 3 pieds 6 pouces en pieds ; en multipliant 327 par 6, à cauſe que la toiſe contient 6 pieds ; & le produit eſt 1962 pieds ; auxquels ajoutant les 3 pieds, la ſomme eſt 1965 pieds. Je réduis ces pieds en pouces, en les

1135 l.	
20	
22700	
12	
22712 ſ.	
12	
45424	
22712	
272544	
5	
272549 d.	
3	
817647	
1	
817648 tiers	
6	
4905888 *Dividende.*	

327 toiſes.	
6	
1962	
3	
1965 pieds.	
12	
3930	
1965	
23580	
6	
23586 pieds.	
20	
471720	
3	
1415160 *Diviſeur.*	

multipliant par 12, à cauſe que le pied contient 12 pouces; & le produit eſt 23580, auquel ajoutant les 6 pouces, la ſomme eſt 23586 pouces.

Le dividende & le diviſeur ſont donc réduits par-là à leurs dernieres eſpeces. Mais afin de conſerver le même rapport qu'ils avoient avant ces multiplications, je tâche de faire en ſorte qu'ils ſe trouvent également multipliés par les mêmes nombres; & pour cela je multiplie les tiers de deniers par 6, à cauſe que les 327 ont été multipliés par 6; & je multiplie les pouces par 20 & par 3, à cauſe que les 1135 livres ont été multipliées par 20 & par 3. Par ce moyen le dividende & le diviſeur ſe trouvant multipliés l'un & l'autre par 20, 12, 6, & 3, ſont entre eux dans le même rapport que ſi on ne les avoit pas multipliés.

Ces multiplications faites; je diviſe le dividende 4905888 par le diviſeur 1415160 : & achevant le reſte comme dans l'exemple précédent, je trouve 3 livres 9 ſols 4 deniers, pour le prix de la toiſe : & c'eſt la preuve du troiſieme exemple ou du troiſieme problême de la multiplication compoſée.

1415160
4905888 (3 l.
660408
20
13208160

1415160
13208160 (9 ſ.
471720
12
94344o
471720
5660640

1415160
5660640 (4. d.
000000

Problême IV. *Un homme a acheté* 535 *aunes* $\frac{1}{4}$ *d'étoffe, qui lui ont coûté* 1719 *livres* 9 *ſols* 9 *deniers* $\frac{3}{4}$ *: combien l'aune lui a-t'il coûté?*

Solution. Je réduis les livres en ſols, les ſols en deniers, & les deniers en quarts : ce qui donne 1650711 quarts de deniers. Je réduis de même les aunes en quarts : ce qui donne 2141 quarts d'aunes.

1719 l. 9 ſ. 4 d.
20
34380
9
34389 ſ.
12
68778
34389
412668
9
412677 d.
4
1650708
3
1650711 quarts de den.

535 aunes $\frac{1}{4}$
4
2140
1
2141 quarts d'aunes.
20
42820
12
85640
42820
513840 Diviſeur.

513840
1650711 (3 l.
109191
20
2183820

513840
2183820 (4 ſ.
128460
12
256920
128460
1541510

513840
1541520 (3 d.
000000

Or comme les aunes n'ont été multipliées que par 4, tandis que les livres ont été multipliées par 20, par 12, & par 4; je multiplie les 2141 quarts d'aunes par 20 & par 12 : afin que le dividende & le diviſeur ſoient entre eux dans le même rapport qu'ils étoient avant la multiplication; & par conſéquent j'ai pour dividende 1650711, & pour diviſeur 513840.

Je diviſe le dividende par le diviſeur, & évaluant les fractions à l'ordinaire, je trouve 3 livres 4 ſols 3 deniers, pour la valeur de l'aune : & ceci eſt la preuve du quatrieme exemple, ou du quatrieme problême de la multiplication compoſée.

55. Ce ſeroit ici le lieu d'expliquer les autres opérations de l'Arithmétique : mais comme les démonſtrations de ces régles dépendent des principes que je donnerai dans les Chapitres ſuivans, je n'en parlerai qu'en leur lieu, pour être plus court & en même tems plus clair.

CHAPITRE V.

DE L'ALGEBRE.

56. LA difficulté, l'ennui, & ſouvent même l'impoſſibilité que l'on trouve à réſoudre grand nombre de queſtions & de problêmes concernant les nombres, lorſqu'on veut ſe ſervir des regles ordinaires de l'Arithmétique, ont été cauſe qu'on a cherché une autre méthode, qui, par les principes les plus ſimples, nous mît en état de découvrir les vérités propoſées, ſans fatiguer trop l'eſprit. Cette méthode fut nommée par ſes Auteurs *Arithmétique ſpécieuſe* ou *Logiſtique ſpécieuſe*; & comme elle ne rouloit que ſur les nombres, les uns y employoient les chiffres ordinaires avec les lettres nommées *Majuſcules*; à l'exemple de *Diophante* d'Alexandrie; & les autres à l'imitation de *Viete*, ne ſe ſervoient que des lettres majuſcules.

Les préceptes de cette ſcience étoient extrêmement ſimples & très-naturels : mais la maniere obſcure dont on annonçoit la plupart des choſes, les dénominations barbares que l'on donnoit à certaines quantités, & les expreſſions embarraſſantes que l'on y employoit, la rendoit ſi dégoûtante, qu'il ſe trouvoit très-peu de perſonnes qui vouluſſent s'en accommoder. Dans la ſuite M. Deſcartes, non-ſeulement la délivra de tout ce qui la rendoit ſi hériſſée, en donnant des dénominations plus faciles, des expreſſions plus courtes,

&

& en ſubſtituant les petites letttes de l'alphabet au lieu des grandes : mais encore il la perfectionna, & l'étendit à la quantité continue, qui eſt l'objet de la Géométrie. C'eſt cette méthode que l'on nomme aujourd'hui *Analyſe*, pour les raiſons que nous dirons dans le chapitre ſuivant, où nous expliquerons ſes préceptes, & la maniere de les mettre en uſage.

57. *L'Algebre* eſt la ſcience qui apprend à faire les opérations de l'Arithmétique ſur les lettres de l'alphabet.

58. Les caracteres que l'on emploie dans l'Arithmétique ayant une valeur déterminée, il eſt sûr que ſi on veut les ajouter, les ſouſtraire, les multiplier ou les diviſer, on peut trouver d'autres caracteres qui repréſentent leur ſomme, ou leur reſte, ou leur produit, ou leur quotient. Mais il n'en eſt pas de même des lettres de l'alphabet; car comme on peut ſuppoſer que la lettre a ou la lettre b repréſente un nombre tantôt plus grand, tantôt moindre, ſelon les différentes queſtions que l'on veut réſoudre; on ne ſçauroit dire qu'une troiſieme lettre c ou d, ſoit leur ſomme, ou leur reſte, ou leur produit, ou leur quotient, ſans faire des ſuppoſitions qui ſeroient fort embarraſſantes, ſur-tout lorſque le calcul viendroit un péu long. C'eſt pourquoi on a trouvé des ſignes qui d'un côté préviennent ces embarras, & qui de l'autre mettent tant de netteté dans les opérations, qu'après avoir réſolu la queſtion propoſée, on voit d'un coup d'œil & le point d'où l'on eſt parti, & tous les pas que l'on a fait. Ces ſignes ſont les ſuivans.

DES SIGNES DE L'ALGEBRE.

59. Le ſigne $+$ ſignifie *plus*, & marque l'addition : $a + b$ fait voir que la grandeur exprimée par la lettre b, eſt ajoutée à la grandeur exprimée par la lettre a.

60. Le ſigne $-$ ſignifie *moins*, & marque la ſouſtraction : $a - d$ ſignifie que la grandeur d eſt retranchée de la grandeur a.

61. Le ſigne $\times$ eſt la marque de la multiplication : $a \times b$ c'eſt la grandeur a multipliée par la grandeur b. Ordinairement on retranche ce ſigne, & l'on ſe contente de joindre enſemble les lettres que l'on veut multiplier. Ainſi ab ſignifie que a eſt multiplié par b.

62. Lorſqu'on écrit une ou pluſieurs lettres au-deſſus du ſigne $-$ & une ou pluſieurs lettres au-deſſous, cela ſignifie que ce qui eſt au-deſſus eſt diviſé par ce qui eſt en-deſſous : $\frac{a}{b}$ fait voir que la grandeur a eſt diviſée par la grandeur b : $\frac{ab}{cd}$ ſignifie que le produit de a par b,

eſt diviſé par le produit de c par d: $\frac{a+d}{c-b}$ marque que la ſomme des deux quantités a & d eſt diviſée par c, duquel on a retranché b; ou par la différence de c à b : car cette différence n'eſt autre choſe que ce qui reſte après qu'on a retranché la grandeur b de la grandeur c.

63. Le ſigne $=$ ſignifie que la grandeur qui eſt à gauche de ce ſigne, eſt égale à celle qui eſt à droite. $a = b$ marque que a eſt égal à b : $ab = cd$ ſignifie que le produit de a par b eſt égal au produit de la grandeur c par la grandeur d : $a + b = c + d$ marque que la ſomme des grandeurs a, b, eſt égale à la ſomme des grandeurs c, d, & ainſi des autres. On trouve dans quelques Auteurs le ſigne oc au lieu du ſigne $=$: mais ce dernier eſt aujourd'hui le plus uſité.

64. Quand une grandeur eſt égale à une autre, cela ſe nomme *équation* ou *égalité*. La grandeur qui eſt à gauche du ſigne $=$ ſe nomme premier *membre* de l'équation; & celle qui eſt à droite, ſe nomme ſecond *membre*. Dans l'équation $a = b$, la grandeur a eſt le premier membre, & la grandeur b eſt le ſecond. De même dans l'équation $a + b = c - d$; la grandeur $a + b$ eſt le premier membre, & la grandeur $c - d$ eſt le ſecond, & ainſi des autres.

65. Le ſigne $>$ marque que la grandeur qui eſt à gauche de ce ſigne, eſt plus grande que celle qui eſt à droite. $a > b$ ſignifie que a eſt plus grand que b : $a + b > e + f$ ſignifie que $a + b$ eſt plus grand que la ſomme des grandeurs e, f.

66. Le ſigne $<$ marque que la grandeur miſe à gauche eſt moindre que la grandeur miſe à droite. $a < b$ ſignifie que a eſt moindre que b.

67. Ce ſont là les ſignes les plus fréquens dans l'algébre : quant aux autres, nous les expliquerons en leur lieu.

Des grandeurs complexes & incomplexes, poſitives & négatives.

68. Par le mot de *grandeur* en général, on entend tout ce qui peut s'augmenter ou ſe diminuer, & qui par conſéquent a des parties. Il y en a de deux ſortes, l'une qu'on nomme *ſucceſſive*, parce que ſes parties ſe ſuccedent les unes aux autres, ſans exiſter jamais toutes à la fois, comme la durée ou le tems; & l'autre qu'on nomme *permanente*, parce que ſes parties exiſtent en même tems. La grandeur *permanente* ſe diviſe encore en grandeur ou quantité *diſcrete* dont les parties ne ſont pas liées, telles que ſont les nombres, & tous les aſſemblages où la continuité & la liaiſon des parties ne ſont pas néceſſaires; & en grandeur ou quantité *continue*, c'eſt-à-dire, dont les parties ont une étroite liaiſon, telles que ſont tous les corps ſolides. Comme l'algébre peut employer ſon calcul ſur ces différentes

eſpeces de grandeurs, on a donné le nom de *grandeur* en général, aux lettres dont elle ſe ſert.

69. La grandeur *complexe* eſt une grandeur compoſée de deux ou pluſieurs autres grandeurs, entre leſquelles ſe trouvent le ſigne + ou le ſigne —. Ainſi $a+b$ eſt une grandeur complexe; de même que $a+c-d$. Mais ab, quoique formée par le produit de deux lettres, n'eſt pas une grandeur complexe : parce qu'il ne ſe trouve entre elles ni le ſigne + ni le ſigne —.

70. La grandeur *incomplexe* eſt celle qui n'eſt pas liée avec une ou pluſieurs autres par le ſigne + ou par le ſigne —. Ainſi a eſt une grandeur incomplexe, & le produit ab l'eſt auſſi.

71. La grandeur *poſitive* ou *réelle* eſt une grandeur qui a le ſigne + ou qui n'en a point du tout : parce qu'alors on ſous-entend qu'elle a le ſigne +. Ordinairement la lettre qui commence une expreſſion algébrique n'a point de ſigne : ainſi l'on écrit $a+b$, au lieu de mettre $+a+b$. Mais ſi cette premiere lettre avoit le ſigne —, alors il faudroit abſolument écrire $-a+b$: car ſi on ne mettoit pas ce ſigne —, on ſous-entendroit que la lettre a auroit le ſigne +; ce qui ſeroit faux.

72. La grandeur *négative* ou fauſſe eſt une grandeur qui a le ſigne —, & qu'on devroit appeller plutôt un défaut de grandeur. Un homme qui n'ayant rien doit 10 écus, eſt certainement au-deſſous du rien, en fait de bien : puiſqu'il faudroit lui donner 10 écus pour payer ſa dette, & faire que ſon bien fût égal à zero. Ainſi les 10 écus qu'il doit, ſont une grandeur négative ou un défaut qui le mettent au-deſſous du rien. De même une longueur de 70 toiſes comparée à une grandeur de 80, eſt égale à 80 moins dix, c'eſt-à-dire qu'il faudroit lui donner 10 pour la rendre égale à 80 : donc ce 10 qu'elle n'a pas, eſt pour elle une grandeur négative ou un défaut, & ainſi des autres. Au reſte, cette façon de parler n'eſt pas particuliere à l'algebre : car tous les jours dans les converſations on dit fort bien qu'un homme a 100 moins 2 ans, qu'un autre a 20 écus moins 10 ſols, & ainſi du reſte.

DE L'ADDITION DES GRANDEURS LITTÉRALES.

73. Pour ajouter deux ou pluſieurs grandeurs incomplexes, on les écrit de ſuite, en mettant entre elles les ſignes qu'elles ont. Pour ajouter $+a$ avec $+b$, ou a avec b, on écrit $a+b$. Pour ajouter les quatre grandeurs poſitives a, b, c, d, on écrit $a+b+c+d$. Pour ajouter les trois grandeurs $a, b, -d$, dont la derniere eſt négative, on écrit $a+b-d$; & non pas $+d$: parce qu'ajouter un défaut,

c'eſt retrancher une grandeur poſitive. Si j'ai 20 écus, & qu'on me charge d'une dette de 10, c'eſt comme ſi on me retranchoit 10 écus.

74. Si parmi les grandeurs incomplexes qu'on veut ajouter, il s'en trouve quelques-unes qui ſoient exprimées par une même lettre, & qui aient le même ſigne; on n'écrit qu'une fois cette lettre, & l'on met à ſa gauche le caractere arithmétique qui marque le nombre des grandeurs exprimées par la même lettre. Pour ajouter les grandeurs a, a, a, b, b, on écrit $3a + 2b$, au lieu d'écrire $a + a + a + b + b$: & cela s'appelle *corriger l'expreſſion*, c'eſt-à-dire la rendre plus ſimple & plus nette; ce qu'il ne faut jamais négliger: parce que la netteté des expreſſions partage moins l'attention de l'eſprit, & contribue à la netteté des idées.

Que ſi parmi les grandeurs exprimées par la même lettre, les unes avoient le ſigne + & les autres le ſigne —; on prendroit le nombre qui exprime combien il y en a qui ont le ſigne +, & le nombre qui exprime combien il y en a qui ont le ſigne —; & retranchant ce dernier nombre du premier, on écriroit une fois la lettre qui exprime l'une de ces grandeurs, & à gauche de cette lettre on mettroit le reſte de la ſouſtraction. Ainſi pour ajouter les grandeurs $a, a, a, a, -a, -a$, on écriroit $+2a$. Car les quatre premieres ayant le ſigne + feroient $4a$, ou $+4a$; & les deux autres ayant le ſigne — feroient $-2a$: or $4a - 2a$, c'eſt la même choſe que de retrancher $2a$ de $4a$; ce qui fait $+2a$: & par conſéquent $4a - 2a$ feroient $+2a$ ou ſimplement $2a$. Si j'ai 4 écus, & qu'on me charge d'une dette de 2 écus, je n'en aurai plus que 2.

Enfin ſi le nombre qui exprime combien il y a de grandeurs qui ont le ſigne +, & qui ſont exprimées par la même lettre, eſt moindre que celui qui exprime combien il y en a qui ont le ſigne —, & qui ſont exprimées auſſi par la même lettre; on ne pourra retrancher ce ſecond nombre du premier, mais on retranchera le premier du ſecond, & on écrira le reſte avec le ſigne —. Ainſi pour ajouter les grandeurs $a, a, -a, -a, -a, -a$, les deux premieres ayant le ſigne +, feront $2a$ ou $+2a$; & les quatre dernieres ayant le ſigne —, feront $-4a$. Ainſi ajoutant $2a$ avec $-4a$, on auroit $2a - 4a$ ou $-2a$. Car ſi j'ai 2 écus, & qu'on me charge d'une dette de 4; il eſt clair qu'après avoir donné les 2 écus que j'avois, je devrai encore 2 écus.

Il faut bien prendre garde à ces ſortes de corrections: car autrement le calcul algébrique deviendroit embrouillé & embarraſſant.

L'addition des grandeurs complexes ſe fait de même que l'addition des incomplexes, en obſervant ce qui vient d'être dit.

Pour ajouter $a+b$ avec $c+d$, on écrit $a+b+c+d$. De même pour ajouter $a+b$ avec $e+f$, on écrit $a+b+e+f$.

Pour ajouter $4a+2b+d$ avec $3a+3b+e$; on écrit les grandeurs exprimées par les mêmes lettres les unes sous les autres, ensuite on dit $4a$ & $3a$ font $7a$; $2b$ & $3b$ font $5b$, après quoi on écrit $+d+e$.

$$\begin{array}{l} 4a+2b+d \\ 3a+3b+e \\ \hline 7a+5b+d+e \end{array}$$

Pour ajouter $8a+5b+d$ avec $5a-2b-f$; on écrit les grandeurs marquées par les mêmes lettres les unes sous les autres : ensuite on dit, $8a$ & $5a$ font $13a$: $5b$ moins $2b$ font $+3b$: après quoi on écrit $+d-f$.

$$\begin{array}{l} 8a+5b+d \\ 5a-2b-f \\ \hline 13a+3b+d-f \end{array}$$

Pour ajouter $5a+2b+f$ avec $-6a-3b-f$; on écrit les grandeurs de même nom les unes sous les autres, & l'on dit : $5a$ moins $6a$ fait moins un a, ou $-a$: $2b-3b$ fait moins un b, ou $-b$: $f-f$ ne fait rien; parce qu'un de reçu & un de donné, il ne reste rien : ainsi la somme est $-a-b$, & de même des autres.

$$\begin{array}{l} 5a+2b+f \\ -6a-3b-f \\ \hline -a-b \end{array}$$

DE LA SOUSTRACTION DES GRANDEURS LITTÉRALES.

75. La soustraction des grandeurs littérales incomplexes se fait en changeant toujours le signe de la grandeur qui doit être soustraite.

Si l'on veut soustraire $+a$ de $+b$, on écrit $b-a$. Car si de 10 écus que j'ai, on m'en retranche 4; il m'en restera $10-4$.

Pour soustraire $+c$ de $-d$, on écrit $-d-c$. Si je dois dix écus, & qu'on m'en retranche encore 5, ou qu'on m'en fasse devoir encore 5; il est clair que je devrai payer $10+5$, & que par conséquent mon bien sera diminué non-seulement de 10, mais encore de 5.

Si l'on veut soustraire $-a$ de $+b$, on écrit $b+a$. Car si tandis que j'ai 10 écus, on me retranche une dette de 4 écus, ce qu'on ne peut faire qu'en me donnant ces 4 écus; on voit bien que j'aurai 14 écus ou 10 écus plus 4.

Pour soustraire $-a$ de $-b$, on écrit $-b+a$. Car si je dois 10 écus, & que quelqu'un supprime une partie de cette dette, par exemple 4 écus, ce qu'il ne peut faire qu'en me donnant 4 écus; il est sûr que je devrai 10 d'un côté, mais que j'aurai 4 de l'autre : ainsi j'aurai $-10+4$.

76. La soustraction des grandeurs complexes se fait de même que celle des grandeurs incomplexes, en observant ce que nous avons dit ci-dessus touchant la correction des expressions.

Pour ſouſtraire $a+b$ de $c+d$, on écrit $c+d-a-b$. De même pour ſouſtraire $a-c$ de $d-f$, on écrit $d-f-a+c$, & ainſi des autres.

Pour ſouſtraire $2a+2b+c$, de $5a+4b+d$: on écrit les grandeurs marquées des mêmes lettres les unes ſous les autres, enſuite on dit : de $5a$ ôtez $2a$, il reſte $3a$: de $4b$ ôtez $2b$, il reſte $2b$; & de d ôtez c, il reſte $d-c$.

$$\begin{array}{r} 5a+4b+d \\ 2a+2b+c \\ \hline 3a+2b+d-c \end{array}$$

Pour ſouſtraire $3a-4b-2d$, de $6a+2b-4d$, on dit : de $6a$ ôtez $3a$, il reſte $3a$. De $2b$ ôtez $-4b$, il reſte $6b$: car puiſqu'il faut changer le ſigne $-$ en $+$; j'ai $2b+4b$ qui ſont $6b$. De $-4d$ ôtez $-2d$, il reſte $-2d$: car puiſqu'il faut changer le ſigne de $-2d$ en $+$; j'ai $-4d+2d$. Mais $+2d$ effacent $-2d$ de $-4d$; à cauſe que $-$ & $+$ ſe détruiſent : ainſi il reſte $-2d$.

$$\begin{array}{r} 6a+2b-4d \\ 3a-4b-2d \\ \hline 3a+6b-2d \end{array}$$

Pour ſouſtraire $6a+4b-3d$ de $4a-3b-2d$, on dit : de $4a$ ôtez $6a$, il reſte $-2a$: car $4a-6a$ ſont la même choſe que $-2a$; puiſque dans $-6a$ il y a moins $4a$ qui effacent $+4a$, il reſte $-2a$. De $3b$ ôtez $4b$, il reſte $-b$. De $-2d$ ôtez $-3d$, il reſte $+d$: car puiſqu'il faut changer le ſigne de $-3d$, j'ai $-2d+3d$: or dans $+3d$, il y a $2d$ qui effacent $-2d$; & il reſte encore un d, & par conſéquent j'ai $+d$, & ainſi des autres.

$$\begin{array}{r} 4a+3b+2d \\ 6a+4b-3d \\ \hline -2a-b+d \end{array}$$

DE LA MULTIPLICATION DES GRANDEURS LITTÉRALES.

77. Si les deux grandeurs que l'on veut multiplier l'une par l'autre ont toutes les deux le ſigne $+$, ou toutes les deux le ſigne $-$, le produit a toujours le ſigne $+$: & ſi l'une ayant le ſigne $+$, l'autre a le ſigne $-$, le produit a toujours le ſigne $-$: d'où l'on tire cette regle, *plus par plus, ou moins par moins, donne plus ; & plus par moins, ou moins par plus, donne moins.*

Démonstration. Nous avons dit (11) que dans la multiplication on doit prendre le nombre à multiplier, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur. Donc 1°. ſuppoſant que le nombre à multiplier ſoit a, & le multiplicateur b, & que l'un & l'autre ſoient poſitifs ; il faudra prendre la grandeur poſitive a autant de fois que la grandeur poſitive b contiendra d'unités : c'eſt pourquoi ſi b contient trois unités, le produit ab ſera la grandeur poſitive $3a$, & par conſéquent ab aura le ſigne plus. 2°. Si le nombre à multiplier a eſt poſitif, & le multiplicateur b eſt négatif, c'eſt-à-dire, s'il eſt $-b$, ou -3 ; il faudra prendre la grandeur poſitive a, non pas trois fois,

mais — 3 fois : parce que le multiplicateur ne contient pas trois unités, mais — 3 unités. Ainſi le produit ab ſera la même choſe que la grandeur négative $-3a$, & ſon ſigne ſera négatif : car prendre une grandeur — 3 fois, c'eſt la ſouſtraire trois fois. 3°. Si le nombre à multiplier a eſt négatif, c'eſt-à-dire, s'il eſt $-a$, & que le multiplicateur b ſoit poſitif ; il faudra prendre le défaut $-a$, autant de fois qu'il y a d'unités dans b ou 3 : & par conſéquent le produit ab ſera la même choſe que $-3a$, & ſon ſigne ſera encore négatif. 4°. Enfin ſi a & b ont tous deux le ſigne moins, il faudra prendre le défaut $-a$, non pas trois fois, mais — 3 fois : à cauſe que b ou 3 ayant le ſigne moins, ne contient pas trois unités, mais — 3 unités. Or prendre — 3 fois, c'eſt ſouſtraire trois fois ; & ſouſtraire trois fois un défaut ou une dette, c'eſt donner trois fois ce qu'il faut pour la réparer : puiſqu'il n'eſt pas poſſible qu'on éteigne une dette que j'aurois, ſi on ne me donnoit ce qui eſt néceſſaire pour la payer. Donc prendre — 3 fois le défaut $-a$, c'eſt donner $3a$, & par conſéquent le produit ab eſt la même choſe que $3a$, & ſon ſigne eſt poſitif. Donc la regle que nous venons de donner eſt véritable.

78. La multiplication des grandeurs complexes ſe fait à peu près comme la multiplication des nombres, & l'on y obſerve les regles que nous venons de donner touchant les ſignes. En voici quelques exemples.

EXEMPLE I. Pour multiplier $a+b$, par $a+c$; on écrit le multiplicateur $a+c$ ſous la grandeur à multiplier, & l'on multiplie tous les termes de la grandeur à multiplier par le premier terme a du multiplicateur. $+a$ par $+a$ donne $+aa$: $+b$ par $+a$ donne plus ab. Enſuite on multiplie tous les termes de la grandeur à multiplier par le ſecond terme c du multiplicateur. $+a$ par $+c$ donne $+ac$; & $+b$ par $+c$ donne $+bc$: ainſi le produit eſt $aa+ab+ac+bc$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+c \\ \hline aa+ab+ac+bc \end{array}$$

EXEMPLE II. Pour multiplier $a+b+c$, par $a+b+d$; j'écris le multiplicateur $a+b+d$, ſous la grandeur à multiplier $a+b+c$; & je multiplie d'abord tous les termes $a+b+c$, par le premier terme a du multiplicateur. $+a$ par

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ a+b+d \\ \hline aa+ab+ac \\ +ab+bb+bc \\ +ad+bd+cd \\ \hline aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd \end{array}$$

$+a$ donne $+aa$: $+b$ par $+a$ donne $+ab$; & $+c$ par $+a$ donne $+ac$.

Je multiplie tous les termes $a+b+c$, par le ſecond terme b du multiplicateur. $+a$ par $+b$ donne $+ab$; & comme j'ai déja un produit $+ab$, j'écris celui-ci ſous le premier ; ce qu'il faut toujours obſerver lorſqu'il ſe trouve des produits qui ont les mêmes lettres : $+b$ par b donne $+bb$; & $+c$ par $+b$ donne $+bc$.

Enfin je multiplie de la même façon tous les termes $a+b+c$, par le troiſieme terme d du multiplicateur : ce qui donne $+ad+bd+cd$, & corrigeant l'expreſſion, c'eſt-à-dire mettant $+2ab$ au lieu de $+ab+ab$, le produit eſt $aa+2ab+ac+bb+bc+ad+bd+cd$.

EXEMPLE III. Pour multiplier $a+b$, par $a-b$; je multiplie les termes $a+b$ par le premier terme a du multiplicateur : ce qui donne $aa+ab$. Je multiplie les mêmes termes par le ſecond terme $-b$ du multiplicateur, en diſant : $+a$ par $-b$ donne $-ab$ que j'écris ſous $+ab$; & $+b$ par $-b$ donne $-bb$. Je corrige l'expreſſion en effaçant $+ab-ab$, à cauſe que ces grandeurs ſe détruiſent par des ſignes contraires ; & le produit eſt $aa-bb$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ -ab-bb \\ \hline aa\qquad -bb \end{array}$$

EXEMPLE IV. Pour multiplier $a+b-c$, par $a-b+c$; je multiplie tous les termes $a+b-c$ par le premier terme a du multiplicateur : ce qui donne $aa+ab-ac$. Je multiplie les mêmes termes par le ſecond terme $-b$ du multiplicateur : ce qui donne $-ab-bb+bc$, que j'écris en mettant $-ab$ ſous $+ab$. Je multiplie les mêmes termes par le troiſieme terme $+c$ du multiplicateur : ce qui donne $+ac+bc-cc$, que j'écris en mettant $+ac$ ſous $-ac$; & $+bc$ ſous $+bc$. Je corrige l'expreſſion en effaçant $+ab-ab$, & $-ac+ac$; parce que ces grandeurs ſe détruiſent par des ſignes contraires ; & en mettant $+2bc$ au lieu de $+bc+bc$; & le produit eſt $aa-bb+2bc-cc$.

$$\begin{array}{r} a+b-c \\ a-b+c \\ \hline aa+ab-ac \\ -ab\qquad -bb+bc \\ +ac\qquad +bc-cc \\ \hline aa\qquad -bb+2bc-cc \end{array}$$

79. *REMARQUE.* Il faut prendre garde que dans les produits de deux ou pluſieurs lettres, chaque lettre conſerve ſa valeur, ſoit qu'elle ſoit miſe ou après les autres, ou entre deux ; ainſi ab ou ba ſont la même choſe : de même abc, bac, bca, cab, cba ont toujours la même valeur. De même $ab+bc$, ou $bc+ab$ ne ſont pas différens ; &

en

en ceci l'algebre differe beaucoup de l'arithmétique, dont on ne ſçauroit déranger aucun caractere ſans changer ſa valeur.

DL LA DIVISION DES GRANDEURS LITTÉRALES.

80. Il en eſt des ſignes + & — à l'égard de la diviſion, de même qu'à l'égard de la multiplication ; c'eſt-à-dire que ſi l'on diviſe + par + ou — par —, le quotient a le ſigne + ; & ſi l'on diviſe + par —, ou — par +, le quotient a le ſigne —.

DÉMONSTRATION. Suppoſons que le dividende ſoit 6, & le diviſeur 2. 1°. Si l'un & l'autre ont le ſigne +, le dividende 6 contiendra poſitivement le diviſeur 2, trois fois : ainſi le quotient 3 aura le ſigne +. 2°. Si l'un & l'autre ont le ſigne —, le défaut — 6 contiendra poſitivement trois fois le défaut — 2 ; & par conſéquent le quotient 3 aura encore le ſigne +. 3°. Si le dividende eſt — 6 & le diviſeur + 2, le défaut — 6 ne contiendra pas trois fois la grandeur poſitive, mais trois fois le défaut de 2 : ainſi le quotient 3 aura le ſigne —. 4°. Si le dividende eſt + 6, & le diviſeur — 2, la grandeur poſitive 6 ne contiendra pas trois fois le défaut — 2, mais trois fois ſon contraire ou la grandeur poſitive 2 : donc le quotient 3 aura le ſigne —.

Et pour être encore plus convaincu de ceci, il n'y a qu'à obſerver que le diviſeur étant exact dans la ſuppoſition que nous venons de faire, il faut néceſſairement que le produit du diviſeur par le quotient ſoit égal au dividende (29). Or cela ne ſçauroit être, ſi le quotient n'avoit pas le ſigne que notre regle lui donne. Car dans le premier cas, ſi le quotient étoit — 3 ; le produit de — 3 par le diviſeur + 2, donne — 6 ; au lieu que le dividende eſt + 6. Dans le ſecond cas, ſi le quotient étoit — 3 ; le produit de — 3 par le diviſeur — 2 donne + 6, au lieu que le dividende eſt — 6. Dans le troiſieme cas, ſi le quotient étoit + 3, le produit de + 3 par le diviſeur + 2, donneroit + 6, & non pas — 6. Enfin dans le quatrieme cas, ſi le quotient étoit + 3, le produit de + 3 par le diviſeur — 2, donneroit — 6, au lieu de + 6.

81. La même choſe arriveroit encore, ſi le diviſeur n'étoit pas exact, ou s'il n'étoit pas contenu exactement & ſans reſte dans le dividende. Suppoſons que le dividende ſoit 7 & le diviſeur 2 : le quotient ſera 3 avec un reſte 1. Or ſi 7 & 2 ſont poſitifs, le quotient doit être poſitif : parce que + 3 par + 2 font plus 6, lequel ajouté au reſte 1 fait + 7 égal au dividende 7. Si 7 & 2 ſont négatifs, le quotient ſera poſitif : car + 3 par — 2 fait — 6, lequel ajouté au reſte — 1, qui eſt négatif, puiſque c'eſt le reſte de — 7, donne la

ſomme — 7 égale au dividende — 7. Si 7 eſt négatif, & 2 eſt poſitif; le quotient doit avoir — : parce que — 3 par + 2 fait — 6, lequel ajouté au reſte 1, qui eſt encore négatif, à cauſe que c'eſt le reſte de — 7, donne la ſomme — 7 égale au dividende. Enfin ſi 7 eſt poſitif & 2 eſt négatif; le quotient doit être poſitif : à cauſe que — 3 par — 2 fait + 6, lequel étant ajouté au reſte 1 qui eſt poſitif, puiſque c'eſt le reſte de + 7, donne la ſomme + 7 égale au dividende.

82. Pour diviſer + a par + b, ou — a par — b, on écrira + $\frac{a}{b}$, ou $\frac{a}{b}$; & pour diviſer — a par + b, ou + a par — b, on écrira — $\frac{a}{b}$.

83. Si le dividende & le diviſeur étoient exprimés par une même lettre a; on écriroit + 1, au lieu de $\frac{a}{a}$; ou — 1, au lieu de — $\frac{a}{a}$: car le quotient 1 multiplié par le diviſeur + a, donne le dividende a, & le même quotient 1 multiplié par le diviſeur — a donne le dividende — a. De même le quotient — 1 multiplié par le diviſeur — a, donne le dividende + a; & le quotient — 1 multiplié par le diviſeur + a, donne le dividende — a.

Pour marquer la diviſion de ab par b; au lieu d'écrire $\frac{ab}{b}$, on écrira ſimplement a : parce que le quotient a, multiplié par b, donne le dividende ab. Par la même raiſon, au lieu d'écrire $\frac{aac}{aa}$, on écrira c; au lieu d'écrire $\frac{acb}{cb}$, on écrit a : & ainſi des autres. D'où l'on voit que *quand il y a des grandeurs marquées par les mêmes lettres au dividende & au diviſeur; il faut les effacer en même nombre de fois de part & d'autre*; & c'eſt une regle qu'il faut obſerver pour abréger les expreſſions. Ainſi au lieu de $\frac{aabbc}{abc}$, on écrira ab : au lieu de $\frac{abc}{a\,l\,d}$, on écrira $\frac{c}{d}$: au lieu de $\frac{aabbcdef}{abbcde}$, on écrira af : ce qui, comme on voit, abrege beaucoup, & donne plus de clarté.

84. S'il y avoit des nombres à gauche du dividende & du diviſeur; on diviſeroit ces deux nombres à la façon ordinaire, & l'on mettroit le quotient à gauche du quotient littéral. Pour abréger l'expreſſion $\frac{6aabbcd}{3abcd}$, on diviſeroit 6 par 3 : ce qui donne 2, & l'on écriroit $2ab$. Pour abréger l'expreſſion $\frac{9aaccd}{3acce}$, on écriroit $\frac{3acd}{e}$; & ainſi des autres.

Mais ſi la diviſion des chiffres ne pouvoit ſe faire exactement, on les laiſſeroit ſubſiſter : on écriroit donc $\frac{7aab}{3}$, au lieu de $\frac{7aaab}{3a}$; & ainſi du reſte.

85. La division des grandeurs complexes se fait à peu près comme la division ordinaire ; & l'on y observe les regles que nous avons données touchant les lignes + & — : en voici quelques exemples qui serviront de preuve à ceux que nous avons donnés touchant la multiplication des grandeurs complexes.

EXEMPLE I. Pour diviser $aa + ab + ac + bc$ par $a + c$; je mene une ligne sous le dividende, & une autre ligne ou un arc à droite, pour y placer le quotient. Ensuite j'écris le diviseur $a + c$ sous le dividende, en mettant ses termes sous ceux du dividende qui ont les mêmes lettres.

$aa + ab + ac + bc$	$a + b$
$a \quad + c$	
$+ ab \quad + bc$	
$a \quad + c$	
0	0

Je dis donc aa divisé par $+ a$, donne au quotient a. (82). Je multiplie le caractere du quotient par le diviseur ; & je retranche le produit, du dividende, en disant : $+ a$ par $+ a$ donne $+ aa$; & de $+ aa$ ôtez $+ aa$, il ne reste rien. Je mets un point sur le terme aa du dividende : pour marquer qu'il a été divisé. Ensuite $+ a$ par $+ c$ fait $+ ac$; & du terme $+ ac$ du dividende, ôtez le produit $+ ac$, il ne reste rien ; & je marque un point sur ac.

Je mene une ligne sous $a + c$; & abbaissant les deux termes $+ ab + bc$ du dividende qui n'ont pas été divisés, j'écris sous eux le diviseur $a + c$, & je dis : $+ ab$ divisé par $+ a$ donne au quotient $+ b$. Je multiplie ce quotient par $a + c$, & retranchant le produit $ab + bc$, des termes $ab + bc$ du dividende ; il ne reste rien. Ainsi le quotient est $a + b$; & c'est la preuve du premier exemple de la multiplication des grandeurs complexes. Car notre dividende étoit le produit dans cet exemple, & notre diviseur étoit le multiplicateur ; & par conséquent notre quotient $a + b$ a dû être le nombre à multiplier.

EXEMPLE II. Pour diviser $aa + 2ab + ac + bb + bc + ad + bd + cd$ par $a + b + c$, j'écris le dividende & le diviseur comme dans

$aa + 2ab + ac + bb + bc + ad + bd + cd$	$a + b + c$
$a + b + c$	
$+ ab \quad + bb + bc$	
$a \quad + b + c$	
$+ ad + bd + cd$	
$+ a + b + c$	
0 0 0	

l'exemple précédent. Enſuite je dis : aa diviſé par $+a$ donne a au quotient. Je multiplie les termes $a+b+c$ du diviſeur, par le quotient : a par $+a$ donne aa : & du terme aa du dividende retranchant aa, il ne reſte rien. a par $+b$ donne ab ; & de $+2ab$ retranchant ab, il reſte ab que j'écris au-deſſous, en mettant un point ſur $2ab$ de même que ſur aa, pour marquer qu'ils ont été diviſés : ce qui doit toujours être obſervé. a par $+c$ donne $+ac$; & de $+ac$ retranchant $+ac$, il ne reſte rien.

J'abbaiſſe les termes $bb+bc$ du dividende, & j'écris par-deſſous le diviſeur $a+b+c$. Puis je dis : $+ab$ diviſé par a donne au quotient $+b$; & multipliant ce quotient par le diviſeur, & retranchant le produit des termes $ab+bb+bc$; il ne reſte rien. J'abbaiſſe les trois derniers termes $ad+db+cd$, & écrivant le diviſeur $a+b+c$, je trouve au quotient $+d$; & achevant le reſte de la même façon, il ne reſte rien. Ainſi le quotient total eſt $a+b+d$; & c'eſt la preuve du ſecond exemple de la multiplication des grandeurs complexes.

86. *Remarque.* Il arrive ſouvent que la diviſion ſemble ne pouvoir pas ſe faire, parce qu'il manque au dividende des termes qui contiennent quelqu'un des termes du diviſeur, lorſqu'il ſe trouve multiplié par le quotient. Cependant il y a bien des cas où la diviſion devient poſſible, en donnant au dividende la grandeur qui lui manque, une fois ſous le ſigne $+$, & une autre fois ſous le ſigne $-$: ce qui eſt la même choſe que ſi on ne lui donnoit rien. Les deux exemples ſuivans feront mieux comprendre ceci.

Exemple III. Pour diviſer $aa-bb$, par $a-b$; je dis : aa diviſé par $+a$ donne $+a$ au quotient. Je multiplie le diviſeur par ce quotient, en diſant : a par $+a$, donne $+aa$, & du terme aa du dividende ôtant $+aa$ il ne reſte rien. a par $-b$ donne $-ab$; or il n'y a point de terme dans le dividende qui contienne le produit ab ; ainſi il ſemble que la diviſion ne puiſſe pas ſe faire : cependant voici comme je m'y prens. Je ſuppoſe que le dividende, outre les termes $aa-bb$, contient encore les termes $+ab-ab$: ce qui ne l'augmente ni le diminue ; puiſque $+ab-ab$ n'eſt rien ; & je dis : du terme $-ab$ du dividende, ôtant le produit $-ab$ du quotient par le caractere $-b$ du diviſeur, il ne reſte rien.

$$\begin{array}{l|l} aa-bb & a+b \\ \hline a-b & \\ \hline +ab-bb & \\ \hline a-b & \end{array}$$

J'abbaiſſe les deux termes $+ab-bb$ du dividende, & écrivant le diviſeur par deſſous, je dis : $+ab$ diviſé par a, donne b au quotient. Multipliant donc ce quotient par le diviſeur $a-b$, j'ai $ab-bb$

qui ôté de $ab - bb$ ne laiſſe rien. Ainſi le quotient total eſt $a + b$ & c'eſt la preuve du troiſieme exemple de la multiplication.

EXEMPLE IV. Pour diviſer $aa - bb + 2bc - cc$, par $a - b + c$; je dis : aa diviſé par $+ a$ donne au quotient $+ a$; & multipliant ce diviſeur par ce quotient, j'aurai aa, qui retranché de aa ne laiſſe rien. a par $- b$ donne $- ab$; & de $- ab$, que je ſuppoſe être au dividende, retranchant $+ ab$, il ne reſte rien. Mais à cauſe que j'ai ſuppoſé au dividende $- ab$, ce qui n'eſt pas vrai; j'écris $+ ab$ au-deſſous : ainſi $+ ab - ab$, que je donne au dividende, ne l'augmentent ni ne le diminuent.

a par $+ c$ donne $+ ac$; & de $+ ac$ que je ſuppoſe au dividende, ôtant $+ ac$, il ne reſte rien. Mais j'écris $- ac$ par deſſous; afin de corriger ma ſuppoſition.

$$\begin{array}{l|l} aa - bb + 2bc - cc & a - b + c \\ \hline a - b + c & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} + ab - ac - bb + 2bc & \\ a \quad - b + c & \\ \hline - ac \quad + bc - cc & \\ a \quad - b + c & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

J'abbaiſſe les termes $- bb + 2bc$ du dividende, à côté de $+ ab - ac$; & j'écris le diviſeur par-deſſous en diſant : ab diviſé par $+ a$, donne b au quotient. Je multiplie ce quotient par le diviſeur : b par $+ a$ donne ab, qui retranché de ab ne laiſſe rien : b par $- b$ donne $- bb$; & de $- bb$ ôtez $- bb$, il ne reſte rien : b par $+ c$ donne $+ bc$; & de $+ 2bc$ ôtez bc, il reſt bc que j'écris au-deſſous.

J'abbaiſſe les termes reſtans $- ac - cc$ du dividende; & écrivant le diviſeur par deſſous, il me vient $- c$ au quotient : j'acheve le reſte à l'ordinaire, & le quotient total eſt $a + b - c$. C'eſt la preuve du quatrieme exemple de la multiplication.

87. Si par le moyen de ces ſortes de ſuppoſitions la diviſion ne pouvoit pas ſe faire; on écriroit le diviſeur ſous le dividende, de même qu'on fait pour les fractions.

DES PUISSANCES DES GRANDEURS INCOMPLEXES.

88. On appelle *puiſſances d'une grandeur*, les différens degrés par leſquels elle s'éleve en ſe multipliant elle-même ſucceſſivement deux fois, trois fois, quatre fois, & ainſi de ſuite à l'infini. Les anciens appelloient premiere *puiſſance* d'une grandeur, le produit de cette grandeur multipliée par elle-même, c'eſt-à-dire ſon quarré : mais aujourd'hui on appelle premiere puiſſance, la grandeur priſe

en elle-même. Ainſi a eſt la premiere puiſſance de a : multipliant a par a, le produit aa eſt la ſeconde puiſſance ou le quarré de a : multipliant aa par a, le produit aaa eſt la troiſieme puiſſance ou le cube de a ; & ainſi de ſuite : de ſorte que $aaaa$ eſt la quatrieme puiſſance, $aaaaa$ eſt la cinquieme puiſſance, &c : ce que l'on peut continuer à l'infini.

89. La grandeur a eſt la racine de toutes ces puiſſances : c'eſt-à-dire a eſt la racine quarrée de ſa ſeconde puiſſance ou de ſon quarré aa : il eſt la racine troiſieme de ſa troiſieme puiſſance ou de ſon cube aaa ; la racine quatrieme de ſa quatrieme puiſſance $aaaa$, & ainſi du reſte.

90. Pour abréger l'expreſſion de ces puiſſances, on n'écrit qu'une fois la lettre avec un petit chiffre à droite un peu élevé, lequel marque combien de fois la lettre devroit être écrite. Ainſi au lieu de aa, aaa, $aaaa$, $aaaaa$, &c; on écrit a^2, a^3, a^4, a^5, &c : ce qui ſignifie a élevé au quarré, au cube ou à la troiſieme puiſſance, à la quatrieme, à la cinquieme, &c : ces chiffres ſe nomment *expoſants* ; parce qu'ils marquent à quel degré la grandeur eſt élevée.

91. Il ne faut pas confondre ces *expoſants* avec les chiffres qui ſe trouvent quelquefois à gauche d'une grandeur algébrique : Ceux-ci ſe nomment *coëfficiens*, & marquent une addition réitérée de la grandeur qui eſt à leur droite : au lieu que les *expoſans* marquent la multiplication réitérée de la grandeur par elle-même ; ce qui eſt bien différent. Par exemple, ſi a vaut 3 ; l'expreſſion $4a$ marquera que a doit être pris quatre fois ; ce qui fait 12. Au contraire a^4 marquera que a doit être multiplié par lui-même pour faire aa ou a^2 ; ce qui fait d'abord 9 : qu'enſuite a^2 doit être multiplié par a ; ce qui fait aaa ou a^3, & par conſéquent 27 : & enfin que a^3 doit être multiplié encore par a ; ce qui donne $aaaa$ ou a^4 ; & par conſéquent 81, qui eſt différent de 12 ou de $4a$.

DES PUISSANCES DES GRANDEURS COMPLEXES.

92. Les grandeurs complexes prennent différens noms ſelon qu'elles ont plus ou moins de termes : on les nomme *binomes* lorſqu'elles ont deux termes ; *trinomes* quand elles en ont trois ; *quadrinomes* quand elles en ont quatre, &c ; & en général on les nomme *multinomes*, par exemple, $a+b$ eſt un binome ; $c+d+e$ eſt un trinome, &c.

93. De même qu'on peut élever les grandeurs incomplexes à la ſeconde puiſſance, à la troiſieme, à la quatrieme, &c ; on peut élever auſſi les grandeurs complexes aux mêmes puiſſances ; & ces

grandeurs venant à ſe multiplier elles-mêmes, donnent des produits qui ont toujours plus de termes qu'elles, & dont il eſt bon de connoître la formation.

Pour cela, prenons un binome dont nous ferons ſucceſſivement les puiſſances : après quoi, ce qui arrivera dans ces différentes multiplications, nous fera juger aiſément de ce qui doit arriver aux termes des trinomes, des quadrinomes, &c.

94. Soit donc le binome $a+b$. Je le multiplie par lui-même ; ce qui me donne le quarré $aa+2ab+bb$. Je multiplie ce quarré par $a+b$; & j'ai le cube $a^3+3a^2b+3abb+b^3$. Je multiplie ce cube par $a+b$; ce qui donne la quatrieme puiſſance $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$; & continuant de la même façon, je trouve les autres puiſſances de $a+b$, telles qu'on les voit dans la table ſuivante qu'on nomme Table des puiſſances.

Table des puiſſance d'un binome.

1re *Puiſſance.*	a	b				
2e	a^2	$2ab$	bb			
3e	a^3	$3a^2b$	$3abb$	b^3		
4e	a^4	$4a^3b$	$6a^2bb$	$4ab^3$	b^4	
5e	a^5	$5a^4b$	$10a^3bb$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	b^5

Cette Table contient deux ſortes de rangs : les uns qui vont de gauche à droite, & qui contiennent les puiſſances de $a+b$; & les autres qui vont de haut en bas. Les cellules de tous ces rangs ſont remplies de différens produits, qui ont tous leurs *coëfficiens*, ou des nombres à leur gauche : car ceux qui n'en ont point ſont cenſés avoir l'unité pour coëfficient ; puiſque b^3 ou b^4 eſt la même choſe que $1b^3$ ou $1b^4$.

Si nous ne faiſons attention qu'aux produits littéraux, nous trouverons que les cellules de chaque rang de gauche à droite contiennent les puiſſances du premier terme a, leſquelles vont en diminuant juſqu'à la derniere cellule où le terme a ne ſe trouve point ; & qu'au contraire les puiſſances de b vont en augmentant dans ces mêmes cellules, depuis la ſeconde où b eſt à la premiere puiſſance, juſqu'à la derniere où b ſe trouve élevé à la même puiſſance que a eſt dans la premiere cellule.

Pour ſavoir *comment ſe forment les coëfficiens*, il n'y a qu'à examiner 1°. que dans le premier rang à gauche qui va de haut en bas ;

les puiſſances de *a* qui ſe trouvent dans ſes cellules, n'ont d'autre coëfficient que l'unité. 2°. Que dans le ſecond rang de haut en bas, les coëfficiens qui ſe trouvent dans ſes cellules, ſont les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. 3°. Que dans le troiſieme du haut en bas, les coëfficiens des produits littéraux ſont les ſommes ſucceſſives des coëfficiens du rang de haut en bas qui eſt à gauche, ou qui précede celui-ci. Ainſi les coëfficiens du rang précédent étant 1, 2, 3, 4 & 5, on trouve que le coëfficient de la premiere cellule du troiſieme rang eſt 1 : que le coëfficient de la ſeconde eſt 3, c'eſt-à-dire, la ſomme des coëfficiens 1, 2, du rang précédent : que le coëfficient de la troiſieme cellule eſt 6, c'eſt-à-dire, la ſomme des coëfficiens 1, 2, 3, du rang précédent, & ainſi de ſuite. 4°. On trouvera de même que les coefficiens du quatrieme rang du haut en bas, ſont les ſommes ſucceſſives des coëfficiens du troiſieme rang, & ainſi des autres. De ſorte que pour avoir le coëfficient d'une cellule quelconque de l'un de ces rangs, par exemple le coëfficient 6 de la troiſieme cellule du troiſieme rang du haut en bas ; on n'a qu'à prendre le coëfficient 3 de la cellule qui lui eſt ſupérieure, & l'ajouter au coëfficient 3 de la cellule qui eſt à gauche de celle-ci : ce qui ſera le coëfficient 6 que l'on cherche. Car le coëfficient 3 de la cellule ſupérieure étant la ſomme des coëfficiens 1 & 2 du rang précédent ; ſi on ajoute à cette ſomme le coëfficient 3 du rang à gauche, la ſomme 6 ſera la ſomme des coëfficiens 1, 2, 3, du rang précédent ; & par conſéquent elle ſera le coëfficient demandé.

Par le moyen de ceci on peut *continuer la table à l'infini*, ſans être obligé de faire les multiplications qu'il faudroit faire pour avoir les puiſſances que cette table ne contient pas. Par exemple, pour avoir la ſixieme puiſſance de $a+b$, je fais un ſixieme rang de gauche à droite, & je mets dans les ſix premieres cellules $a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a$; & en commençant depuis la ſeconde juſqu'à la ſeptieme, je mets $b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6$. Ainſi j'aurai déja tous les produits littéraux $a^6, a^5b, a^4bb, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6$; & il ne reſte plus que les coëfficiens ; & pour cela je mets dans la ſeconde cellule le coëfficient 6, parce que cette cellule ſe trouvera dans le ſecond rang du haut en bas, qui comprend les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Dans la troiſieme je mets la ſomme 15 du coëfficient 10 de la cellule de la cinquieme puiſſance qui ſera au-deſſus de ma troiſieme, & du coëfficient 5 de la cellule du cinquieme rang qui eſt à gauche de celle qui a le coëfficient 10 : & continuant de la même façon, j'aurai $a^6 + 6a^5b + 15a^4bb + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, qui ſera la ſixieme puiſſance de $a+b$, & ainſi des autres.

95. Si le ſecond terme b avoit le ſigne — au lieu du ſigne +, les puiſſances du binome $a-b$ ſeroient les mêmes que celles du binome $a+b$, à l'exception que leurs termes auroient alternativement le ſigne + & le ſigne —. Ainſi le quarré de $a-b$ ſeroit $aa-2ab+bb$, ſon cube ſeroit $a^3-3aab+3abb-b^3$, & de même des autres.

96. La table des puiſſance que nous venons de donner, nous fait donc voir,

I°. *Que le quarré du binome* a+b *contient le quarré* aa *de ſon premier terme* a ; *deux produits du premier terme* a *par le ſecond* b, *ou le double du premier terme* a *multiplié par le ſecond* b ; *& le quarré* bb *du ſecond.*

II°. *Que le cube de* a+b *contient le cube* a^3 *du premier terme* a ; *trois quarrés du premier par le ſecond ; trois fois le premier multiplié par le quarré du ſecond & le cube du ſecond.* Et il eſt facile d'examiner de la même façon quels ſont les produits contenus dans les autres puiſſances.

Puiſſances d'un Multinome.

97. Maintenant pour ſavoir ce qui arriveroit à un multinome de quelque nombre de termes qu'il fût, prenons un trinome $a+b+c$; & concevons que ſes deux premiers termes $a+b$ n'en faſſent qu'un : ce qui pourroit arriver aiſément ſi nous mettions leur valeur en nombre, & que nous fiſſions la ſomme des deux. Ainſi ce trinome n'eſt plus qu'un binome, dont le premier terme eſt $a+b$, & le ſecond eſt c. Donc le quarré de ce binome contient le quarré de ſon premier terme $a+b$, le double de ce terme multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond. Mais le premier terme $a+b$ étant lui-même un binome ; ſon quarré contient le quarré de a, le double de a multiplié par b, & le quarré de b. Donc le quarré du trinome $a+b+c$ contient le quarré du premier terme a, le double du premier par le ſecond, le quarré du ſecond, le double des deux premiers par le troiſieme, & le quarré du troiſieme.

De même ſi nous conſidérons le quadrinome $a+b+c+d$, comme un binome, dont le premier terme eſt $a+b+c$, & le ſecond eſt d ; le quarré de ce binome contient le quarré du premier terme $a+b+c$, le double de celui-ci multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond. Mais le premier terme $a+b+c$, étant lui-même un trinome, contient le quarré de a, le double de a multiplié par b, le quarré de b, le double de $a+b$ multiplié par c, & le quarré de c. Donc le quarré du quadrinome $a+b+c+d$ contient le quarré du premier terme, le double du premier multiplié par le

ſecond, le quarré du ſecond, le double des deux premiers multiplié par le troiſieme, le quarré du troiſieme, le double des trois premiers multiplié par le quatrieme, & le quarré du quatrieme. En faiſant le même raiſonnement à l'égard d'un multinome de 5 termes, de 6, de 7, &c; on aura la regle générale ou le théoreme ſuivant.

98. THÉORÊME I. *Le quarré d'un multinome quelconque contient le quarré de ſon premier terme; le double du premier multiplié par le ſecond, le quarré du ſecond; le double des deux premiers multiplié par le troiſieme, le quarré du troiſieme; le double des trois premiers multiplié par le quatrieme, le quarré du quatrieme;* & ainſi de ſuite.

99. Pour trouver les produits que contiennent les cubes des trinomes, quadrinomes; prenons le trinome $a+b+c$, & conſidérons-le comme un binome dont le premier terme eſt $a+b$, & le ſecond eſt c. Le cube de ce binome contiendra le cube du premier terme $a+b$, trois quarrés de ce premier terme multipliés par le ſecond c, trois quarrés du ſecond multipliés par le premier, & le cube du ſecond (94). Or le premier terme $a+b$ étant lui-même un binome, contient le cube de a, trois quarrés de a multipliés par b, trois quarrés de b multipliés par a, & le cube de b. Donc le cube du trinome $a+b+c$ contient le cube du premier terme, trois quarrés du premier multipliés par le ſecond, trois quarrés du ſecond multipliés par le premier, le cube du ſecond, trois quarrés de la ſomme des deux premiers multipliés par le troiſieme, trois quarrés du troiſieme multipliés par la ſomme des deux premiers, & le cube du troiſieme. Et faiſant les mêmes obſervations ſur un quadrinome, un quinquinome, &c; on aura la regle générale ou le théorême ſuivant.

100. THÉORÊME II. *Le cube d'un multinome quelconque contient le cube du premier terme, trois quarrés du premier multipliés par le ſecond, trois quarrés du ſecond multipliés par le premier; le cube du ſecond, trois quarrés de la ſomme des deux premiers multipliés par le troiſieme, trois quarrés du troiſieme multipliés par la ſomme des deux premiers; le cube du troiſieme; trois quarrés de la ſomme des trois premiers multipliés par le quatrieme; trois quarrés du quatrieme multipliés par la ſomme des trois premiers: le cube du quatrieme, &c;* ainſi de ſuite.

101. On peut de la même façon trouver quels ſont les termes contenus dans les puiſſances quatriemes, cinquiemes, ſixiemes, &c, des multinomes qui ont plus de deux termes.

EXTRACTION DES RACINES DES GRANDEURS LITTERALES.

102. *Extraire* la *racine* d'une grandeur, c'eſt chercher le nombre qui, en ſe multipliant une ou pluſieurs fois, a produit cette grandeur. La racine d'un quarré, ou la *racine quarrée*, eſt le nombre qui, en ſe multipliant une fois, a produit le quarré. La racine d'un cube, ou la *racine cubique*, ou la racine troiſieme, eſt le nombre qui, en ſe multipliant deux fois ſucceſſivement, a produit le cube : la *racine quatrieme* eſt le nombre qui, en ſe multipliant trois fois ſucceſſivement, a produit la quatrieme puiſſance, & ainſi de ſuite.

103. Quand la grandeur dont on veut extraire une racine quelconque, eſt une grandeur incomplexe ; on connoît aiſément ſi la racine qu'on cherche peut s'extraire, ou ſi elle ne le peut pas. Par exemple il eſt évident que la racine quarrée de aa eſt a ; que la racine quarrée de $aabb$ eſt ab ; que la racine cubique de aaa ou a^3 eſt a ; que celle de a^3c^3 eſt ac ; & ainſi des autres. Au contraire, on voit bien que la racine quarrée ou cubique de ac ne peut s'extraire, non plus que celle de a, de bd, &c.

104. Quand on ne peut pas extraire la racine d'une grandeur, on écrit à gauche de cette grandeur, le ſigne $\sqrt{}$, qu'on nomme le ſigne radical, & l'on met au-deſſus le nombre qui marque le degré de cette racine. Par exemple, $\sqrt[2]{a}$ ou ſimplement $\sqrt{a}$, eſt la racine quarrée de a : $\sqrt[3]{b}$ eſt la racine cubique ou troiſieme de b : $\sqrt[4]{ac}$ eſt la racine quatrieme de ac. Ces ſortes de racines ſe nomment *ſourdes*, ou *irrationnelles*, ou *incommenſurables* : parce qu'on ne peut pas exprimer le rapport qu'elles ont avec quelqu'autre grandeur connue que ce ſoit.

105. Quand la grandeur ſimple dont on veut extraire une racine quelconque, eſt une fraction ; on extrait la racine du numérateur, & celle du dénominateur, & l'on en fait une nouvelle fraction, qui eſt la racine cherchée. La racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$ eſt $\frac{a}{b}$: la racine cubique de $\frac{c^3}{d^3}$ eſt $\frac{c}{d}$; celle de $\frac{a^3c^3}{b^3}$ eſt $\frac{ac}{b}$: la racine quatrieme de $\frac{a^4b^4}{c^4d^4}$ eſt $\frac{ab}{cd}$. La racine quarrée de $\frac{ac}{ab}$, eſt $\frac{\sqrt[2]{ac}}{\sqrt[2]{ab}}$ ou ſimplement $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ab}}$, ou encore $\sqrt{\frac{ac}{ab}}$, en faiſant enſorte que la jambe du ſigne radical embraſſe le numérateur & le dénominateur. La racine cubique de $\frac{abc}{df}$ eſt $\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{df}}$, ou $\sqrt[3]{\frac{abc}{df}}$, &c.

106. Les racines des grandeurs complexes ſe tirent par le moyen

de la table que nous avons donnée ci-devant. En voici quelques exemples, que nous allons propoſer en forme de problêmes.

PROBLÊME I. Extraire la racine quarrée de $cc + 2cd + dd$.

SOLUTION. J'écris la grandeur donnée; & je tire une ligne ſous cette grandeur & une à droite, pour écrire après elle les termes de la racine que je cherche. Après quoi, conſultant la table ou le théorême du nombre 98, je vois que le quarré propoſé contient le quarré de ſon premier terme, le double du premier multiplié par le ſecond, le quarré du ſecond, &c: donc ſi en retranchant de la grandeur propoſée ces différens produits il ne reſte rien; ce ſera une marque que cette grandeur eſt un quarré, & j'en aurai la racine cherchée.

$$\begin{array}{l|l} cc + 2cd + dd & c + d \\ \hline c + 2c & \\ \hline & d \end{array}$$

Je dis donc: le premier quarré en allant de gauche à droite eſt cc, dont la racine eſt c: j'écris c au lieu marqué pour la racine, & je l'écris auſſi ſous le quarré cc. Je multiplie la racine c par elle-même, c'eſt-à-dire par la lettre c que j'ai écrite ſous le quarré cc, & le produit eſt cc; lequel étant retranché de cc ne laiſſe rien. Ainſi le quarré propoſé ne contient plus le quarré que je viens de retrancher: c'eſt pourquoi je mets un point ſur le quarré cc, pour marquer qu'il a été retranché.

Je double la racine c que je viens de trouver; ce qui fait $2c$: & comme $2c$ multiplié par la ſeconde racine eſt dans le reſte du quarré propoſé, j'écris $2c$ ſour le terme $2cd$, & je diviſe $2cd$, par $2c$: ce qui donne d, lequel doit être la ſeconde racine. Car puiſque le terme $2cd$ eſt le produit de $2c$ multiplié par la ſeconde racine; il eſt sûr par les regles de la multiplication & de la diviſion, qu'en diviſant $2cd$ par le nombre à multiplier $2c$, le quotient doit être le multiplicateur, & par conſéquent doit être d. Je multiplie la racine ou le quotient d par le diviſeur $2c$; ce qui donne $2cd$: de $2cd$ ôtez $2cd$, il ne reſte rien, & je mets un point au-deſſus.

Or le quarré propoſé doit encore contenir le quarré de la ſeconde racine d: ainſi j'écris d ſous le terme dd de la grandeur propoſée; & multipliant d par lui-même ou par la ſeconde racine d, le produit eſt dd, lequel retranché de dd ne laiſſe rien: la racine cherchée eſt donc $c + d$.

PROBLÊME II. Extraire la racine quarrée de $bb + 2bc + cc + 2bd + 2cd + dd$.

SOLUTION. Je dis: le premier terme à gauche eſt bb, dont

$$\begin{array}{l|l} bb + 2bc + cc + 2bd + 2cd + dd & b + c + d \\ \hline b + 2b + c + 2b + 2c + d & \end{array}$$

la racine eſt b, que j'écris au lieu deſtiné pour la racine, & ſous la grandeur bb. Je multiplie b par b : ce qui donne bb, lequel retranché de bb ne laiſſe rien, & je mets un point ſur le terme bb.

Je double la racine trouvée b ; ce qui fait $2b$, que j'écris ſous le terme $2bc$: & diviſant ce terme par $2b$, la ſeconde racine eſt c que j'écris. Je multiplie $2b$ par c ; & le produit eſt $2bc$, lequel retranché de $2bc$, ne laiſſe rien. J'écris c ſous le terme cc ; & multipliant c par la racine c, le produit eſt cc, lequel retranché de cc ne laiſſe rien.

Je double les deux premieres racines ; ce qui fait $2b+2c$, que j'écris ſous les termes $2bd+2cd$: & diviſant ces termes par $2b+2c$, le quotient d eſt la troiſieme racine. Je multiplie cette racine par $2b+cd$, ce qui donne $2bd+2cd$, lequel retranché de $2bd+2cd$, ne laiſſe rien. J'écris d ſous le dernier terme dd, & multipliant d par la troiſieme racine d, le produit eſt dd, lequel retranché de dd, ne laiſſe rien. Ainſi la racine cherchée eſt $b+c+d$.

PROBLÊME III. Extraire la racine quarrée de $cc-2cd+dd$.

SOLUTION. Je trouve que la premiere racine eſt c, dont le quarré étant retranché du terme cc, ne laiſſe rien. Je double la premiere racine ; ce qui fait $+2c$: & diviſant $-2cd$ par $+2c$, le quotient eſt $-d$.

$$\begin{array}{r|l} cc-2cd+dd & c-d \\ \hline & c+2c-d \end{array}$$

Je multiplie $+d$ par $+2c$: ce qui donne $-2cd$, lequel retranché de $-2cd$ ne laiſſe rien. J'écris $-d$ ſous le terme dd ; & multipliant $-d$ par la racine $-d$, le produit eſt $+dd$, lequel retranché de $+dd$ ne laiſſe rien.

PROBLÊME IV. Extraire la racine cubique de $c^3+3ccd+3cdd+d^3$.

SOLUTION. Je dis, en ſuivant les préceptes du théorême du nombre 100 : la racine cubique du premier terme c^3 eſt c ; & faiſant le cube c^3 de cette racine, je le retranche du terme c^3, & il ne reſte rien. Je fais le quarré cc de cette premiere racine : je le multiplie par 3 ; ce qui fait $3cc$: & comme la grandeur propoſée doit contenir $3cc$ multiplié par la ſeconde racine, je diviſe $3ccd$ par $3cc$, & le quotient d eſt la ſeconde racine cherchée.

$$\begin{array}{r|l} c^3+3ccd+3cdd+d^3 & c+d \\ \hline & c^3+3cc+3dd+d^3 \end{array}$$

Je multiplie la ſeconde racine d par $3cc$; & le produit $3ccd$ étant retranché de $3ccd$ ne laiſſe rien. Je fais le quarré dd de la ſeconde racine d, & je le multiplie par 3 & par c ; parce que la grandeur propoſée doit contenir trois fois ce quarré multiplié par c : & le produit eſt $3cdd$, lequel retranché du terme $3cdd$, ne laiſſe rien. En faiſant

le cube d^3 de la ſeconde racine, & le retranchant du terme d^3, il ne reſte rien ; & la racine cherchée eſt $c+d$.

PROBLÊME V. Extraire la racine quatrieme de $c^4+4c^3d+6c^2dd+4cd^3+d^4$.

SOLUTION. Je prends le quatrieme rang de gauche à droite de la table des puiſſances (94), lequel contient la quatrieme puiſſance du binome $a+b$; & je vois que cette quatrieme puiſſance contient la quatrieme puiſſance du premier terme a, quatre fois le cube de a multiplié par le ſecond terme d, ſix fois le quarré du premier terme a multiplié par le quarré du ſecond, quatre fois le cube du ſecond multiplié par le premier, & la quatrieme puiſſance du ſecond.

Je dis donc : le premier terme c^4 eſt la quatrieme puiſſance de c : ainſi j'écris c au lieu deſtiné pour les racines. J'éleve c à la quatrieme puiſſance c^4 ; & retranchant c^4 de c^4, il ne reſte rien. Je fais le cube c^3 de la premiere racine c, & le multipliant par 4, j'ai $4c^3$: je diviſe le terme $4c^3d$ par $4c^3$; & le quotient d eſt la ſeconde racine, à cauſe que la grandeur propoſée doit contenir $4c^3$ multiplié par la ſeconde racine. Je multiplie $4c^3$ par la ſeconde racine d : ce qui donne $4c^3d$, lequel retranché de $4c^3d$, ne laiſſe rien.

$$\begin{array}{r|l} c^4+4c^3d+6c^2dd+4cd^3+d^4 & c+d \\ \hline c^4+4c^3 \quad +6c^2dd+4cd^3+d^3 & \end{array}$$

Je fais le quarré dd de la ſeconde racine d ; & je le multiplie par 6, & enſuite par le quarré c^2 de la premiere : ce qui fait $6c^2dd$, qui retranché de $6c^2dd$ ne laiſſe rien. Je fais le cube d^3 de la ſeconde racine : je le multiplie par 4 & par c ; ce qui donne $4cd^3$, qui retranché de $4cd^3$, ne laiſſe rien. Enfin j'éleve la ſeconde racine à ſa quatrieme puiſſance d^4 ; & d^4 retranché de d^4, ne laiſſe rien : la racine cherchée eſt donc $c+d$.

PROBLÊME VI. Extraire la racine quarrée de la grandeur $\frac{aa+2ab+bb}{cc}$ qui eſt une fraction.

SOLUTION. Je tire la racine du numérateur, laquelle eſt $a+b$; & la racine du dénominateur, laquelle eſt c ; & j'écris $\frac{a+b}{c}$, & ainſi des autres. La raiſon en eſt, qu'une fraction qui ſe multiplie elle-même produit ſon quarré : or pour multiplier une fraction par elle-même, on multiplie le numérateur par lui-même, ce qui donne le quarré du numérateur, & l'on multiplie auſſi le dénominateur par lui-même, ce qui donne le quarré du dénominateur : donc pour extraire la racine, il faut extraire la racine du numérateur & celle du dénominateur.

Il faut dire la même choſe de la *racine cubique d'une fraction.* Car une fraction, en ſe multipliant deux fois ſucceſſivement, produit ſon cube : or pour cuber une fraction, on multiplie ſon numérateur par lui-même deux fois ſucceſſivement ; & ſon dénominateur auſſi : donc pour extraire la racine cubique, il faut extraire la racine cubique du nuérateur, & la racine cubique du dénominateur. Il en eſt de même à l'égard des puiſſances plus élevées des fractions.

PROBLÊME VII. Extraire la racine cubique de $a^3 + b^3$.

SOLUTION. J'écris $\sqrt{a^3 + b^3}$; parce que cette racine ne peut pas s'extraire : & j'obſerve que le ſigne radical s'étende ſur tous les termes de la grandeur propoſée. De même pour extraire la racine quarrée de $\frac{aa + ab + bc}{cc - dd}$; j'écris $\frac{\sqrt{aa + ab + bc}}{\sqrt{cc - dd}}$, ou $\sqrt{\frac{aa + ab + bc}{cc - dd}}$.

107. *REMARQUE.* Ce que nous venons de dire va nous ſervir pour l'extraction des racines des grandeurs numériques. Mais comme il n'y a gueres que la racine quarrée, & la racine cubique qui ſoient en uſage ; nous nous en tiendrons à ces deux-ci ; ce que nous en dirons, fera aiſément juger de ce que l'on devroit faire, ſi l'on étoit obligé d'extraire les racines des grandeurs plus élevées.

EXTRACTION DE LA RACINE QUARRÉE DES GRANDEURS NUMÉRIQUES.

108. Pour extraire la *racine quarrée* des grandeurs numériques, il faut d'abord connoître les quarrés des dix premiers nombres 1, 2, 3, 4, &c : ces quarrés ſont tels qu'on les voit dans la Table ſuivante.

Racines	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quarrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

109. Quand les quantités dont il faut extraire la racine quarrée, ſont plus grandes que le plus grand des quarrés contenus dans la table ; on en extrait la racine de la même façon qu'on extrait la racine quarrée des grandeurs littérales ; mais la difficulté eſt de ſavoir quelle place occupent les produits qu'il faut retrancher de la quantité propoſée. Pour en venir donc à bout, il n'y a qu'à voir de quelle maniere ſe forme un quarré numérique, & en tirer enſuite des regles pour l'extraction de ſa racine.

Formation du Quarré.

EXPLICATION. Soit le nombre 36, qu'il faut élever au quarré. Je le multiplie par lui-même, en écrivant 36 ſous 36 ; & je dis ſix fois 6 font 36 : j'écris 6 ſous les unités, & j'avance 3 ſous les dixaines au lieu de les retenir. Je dis enſuite : ſix fois 3 font 18 : j'écris 8 ſous les dixaines & j'avance 1 au lieu de le retenir.

Je multiplie 36 par le ſecond caractere du multiplicateur, en diſant : trois fois 6 font 18, j'écris 8 ſous les dixaines & j'avance 1. Je dis enſuite : trois fois 3 font 9 ; & j'écris 9 au rang des centaines. Ainſi cette façon de multiplier, quoique différente en apparence de la façon ordinaire, n'altere point le produit total.

J'ajoute tous les produits que j'ai trouvés ; & la ſomme eſt 1296. Je coupe ce nombre par tranches de deux en deux ; & je vois que le quarré 9 du premier caractere 3 de la racine 36, eſt à gauche de la premiere tranche en prenant les tranches de gauche à droite : que les deux produits 18, 18, du premier caractere 3 multiplié par le ſecond 6, ſont contenus partie à gauche & partie à droite : enfin que le quarré 36 du ſecond caractere 6, eſt contenu entre les deux tranches.

```
  36
  36
 ----
 |36|
1|8
1|8
 9|
 ----
12|96|
```

Si l'on faiſoit de la même façon le quarré 104329 de 323 ; on trouveroit qu'en coupant ce quarré par tranches de deux en deux, tels qu'on les voit ici 10|43|29 ; le quarré du premier caractere 3 de ſa racine ſeroit contenu dans les caracteres 10 qui ſont à gauche de la premiere tranche : que le double de ce caractere multiplié par le ſecond 2, ſeroit partie à gauche & partie à droite de la premiere tranche : que le quarré 4 du ſecond caractere 2 ſeroit à gauche de la ſeconde tranche : que le double des deux premiers caracteres multiplié par le troiſieme 3, ſeroit partie à gauche & partie à droite de la ſeconde tranche : enfin que le quarré 9 du troiſieme caractere ſeroit à gauche de la troiſieme tranche, & on trouveroit la même choſe ſi le quarré propoſé avoit un plus grand nombre de tranches. Cela poſé, nous allons donner quelques problêmes ſur l'extraction de la racine quarrée : mais auparavant il eſt bon de faire l'obſervation ſuivante.

109 *bis*. REMARQUE. Les *nombres quarrés* ſont ainſi nommés; parce que ce ſont les ſeuls qu'on puiſſe ranger de façon qu'ils forment une figure quarrée dont chaque côté contient

```
                  IIII
          III     IIII
   II     III     IIII
I  II     III     IIII
```

tient un même nombre d'unités. Le nombre 4, rangé comme on voit ici, contient à chaque côté deux unités : le nombre 9 en contient 3 à chaque côté : le nombre 16 en contient 4 à chaque côté, & ainſi des autres.

PROBLÊME I. *On veut faire un Bataillon quarré d'une troupe compoſée de* 3844 *hommes : combien y aura-t-il d'hommes de front & d'hommes de file ; c'eſt-à-dire combien y aura-t-il d'hommes à chaque côté de ce quarré ?*

SOLUTION. J'écris le nombre 3844, ſous lequel je mene une ligne, & une autre à ſa droite pour y mettre la racine cherchée. Je coupe ce nombre par tranches de deux en deux caracteres ; & je dis : le plus grand quarré contenu dans les caracteres 38 qui ſont à gauche de la premiere tranche, eſt 36 dont la racine eſt 6. J'écris 6, au lieu deſtiné pour la racine, & 6 ſous 38. Je multiplie la racine 6 par elle-même ; ce qui donne 36 : & 36 retranché de 38 laiſſe 2. C'eſt pourquoi je mene une ligne ſous le 6, que j'ai mis au-deſſous du nombre propoſé ; & j'écris le reſte 2.

38|44(62
6
2.44
1 22
000

J'abbaiſſe les deux autres caracteres 4 & 4 du nombre propoſé, leſquels ſe trouvent entre la premiere & la ſeconde tranche : & doublant la premiere racine 6, ce qui fait 12 ; j'écris 12 ſous 244 ; en ſorte que ſon dernier caractere 2 ſoit à droite de la premiere tranche & l'autre à gauche. Comme les caracteres 24 du nombre propoſé doivent contenir ce double 12 multiplié par la ſeconde racine ; je diviſe 24 par 12, & le quotient 2 eſt la ſeconde racine que j'écris en ſon lieu. Je multiplie 12 par la racine 2 : ce qui fait 24, lequel retranché de 24 ne laiſſe rien.

J'écris la racine 2 ſous le dernier caractere 4 ; & multipliant 2 par 2, le produit eſt 4, lequel ôté de 4 ne laiſſe rien. Donc la racine eſt 62 ; & par conſéquent il y aura 62 de front & 62 de file.

110. Lorſqu'en diviſant ce qui reſte de la grandeur propoſée par le double de la premiere racine ou des deux premieres, ou des trois premieres, &c, on trouve un quotient dont le quarré ne peut pas être contenu dans les caracteres de la grandeur propoſée deſquels on doit le retrancher ; il faut diminuer ce quotient ou cette racine, d'autant d'unités qu'il en faut pour faire que ce quarré puiſſe être retranché : c'eſt ce que nous allons voir dans l'exemple ou dans le problême ſuivant.

PROBLÊME II. Soit le nombre propoſé 4831204 : je le coupe par tranches à la maniere accoutumée, & je vois qu'il y aura quatre

racines. Je dis donc : le plus grand quarré contenu dans le caractere à gauche, eſt 4, dont la racine eſt 2 ; & retranchant le quarré 4 de la racine, du caractere 4, il ne reſte rien. J'abaiſſe les deux caracteres 83 : & doublant la premiere racine, ce qui fait 4 ; je l'écris ſous 83, c'eſt-à-dire ſous 8 qui eſt immédiatement à droite de la premiere tranche. Je diviſe 8 par 4 ; ce qui donne 2 : mais comme après avoir retranché de 8 le produit de la racine 2 par 4, il ne reſteroit plus que 3 qui ne peut pas contenir le quarré 4 de ce quotient 2, je ne mets que 1 au lieu de 2. Ainſi 1 fois 4 eſt 4, qui retranché de 8, laiſſe 4 : & écrivant la racine 1 ſous le caractere 3, j'ai une fois 1, qui eſt 1 & qui retranché de 3 laiſſe 2.

```
4|83|12|04 (2198
2
---
 83
 41
---
 42.12
  429
-----
 351.04
  4388
-------
  0000
```

J'abbaiſſe les deux caracteres 12 qui ſont entre la ſeconde & la troiſieme tranche : & doublant les deux premieres racines 21, ce qui fait 42 ; j'ecris 42 ſous 4212 ; de façon que ſon dernier terme 2 ſoit immédiatement à droite de la ſeconde tranche, de laquelle je marque la place par un point à meſure que j'abaiſſe les termes du quarré propoſé. Or ce double 42, multiplié par la troiſieme racine, eſt contenu dans les termes 421 du quarré propoſé. Diviſant donc 421 par 42 diſpoſé comme il eſt, je trouve 9 pour la troiſieme racine. Car dans 42 le nombre 4 eſt 9 fois ; & il reſte beaucoup plus qu'il ne faut pour faire que 2 ſoit contenu auſſi 9 fois, & que le quarré de 9 ſoit contenu dans le reſte joint au dernier caractere 2 de 4212. J'écris donc 9 ſous ce dernier caractere ; & je dis : neuf fois 9 font 81, lequel ne peut ſe retrancher de 2 : mais en empruntant 8 j'ai 82, & de 82 ôtez 81 il reſte 1 : neuf fois 2 font 18, & 8 d'emprunté font 26, lequel ne peut être retranché de 1 : mais j'emprunte 3, ce qui fait 31 ; & de 31 ôtez 26, il reſte 5 : neuf fois 4 font 36 & 3 font 39, & de 42 ôtez 39, il reſte 3.

J'abaiſſe les deux derniers caracteres 04 du quarré popoſé : je double les trois premieres racines, ce qui donne 438, que j'écris de façon que ſon dernier caractere ſoit immédiatement à droite de la troiſieme tranche ; & diviſant 3510 par 438 diſpoſé comme il eſt, je trouve 8 pour la troiſieme racine. J'écris donc 8 à la racine, & ſous le dernier caractere 4 du quarré. Après quoi multipliant 4388 par la racine 8, & retranchant le produit du nombre 35104, de même que dans l'opération précédente ; il ne reſte rien, & la racine cherchée eſt 2198.

40. PROBLÉME III. Pour extraire la racine quarrée de la fraction $\frac{121}{144}$; j'extrais la racine du numérateur 121 à la façon ordinaire, & cette racine eſt 11 : j'extrais de même la racine 12 du dénominateur 144, & j'ai $\frac{11}{12}$ qui eſt la racine de la fraction donnée. J'ai donné la démonſtration de ceci dans le ſixieme exemple de l'extraction des racines des grandeurs littérales (101.)

111. Lorſqu'après avoir fait toutes les opérations néceſſaires pour extraire la racine quarrée d'un nombre, on trouve un reſte; cela marque que le nombre donné n'eſt pas un *quarré parfait*, & que par conſéquent on ne ſçauroit en extraire la racine. Ainſi on marque ce nombre avec le ſigne radical.

Soit par exemple 126 : j'en extrais la racine, & je trouve 11 avec un reſte 5. Ce nombre n'eſt pas un nombre quarré : c'eſt pourquoi j'exprime ſa racine en écrivant $\sqrt{126}$. Nous ferons bientôt voir que ces racines ne peuvent s'exprimer ni par un nombre entier, ni par un nombre rompu, ni par un nombre compoſé d'un entier & d'une fraction; & que cependant on peut approcher de ſa véritable valeur toujours de plus en plus près, ſans pouvoir jamais y atteindre. En attendant voici quelques théorêmes auſquels il eſt bon de faire attention.

112. THÉORÊME I. *Si l'on ajoute à un nombre entier un autre nombre entier, ſi on lui retranche un nombre entier, ou ſi on le multiplie par un nombre entier; la ſomme, ou le reſte, ou le produit ſera un nombre entier : mais ſi on le diviſe par un nombre entier, le quotient n'eſt pas toujours un nombre entier.*

DÉMONSTRATION. I°. Un nombre entier eſt une ſomme exacte d'unités ſans fraction : ſi l'on ajoute donc deux pareilles ſommes, le total ne peut être qu'un amas d'unités ſans fraction; & ſi d'une ſomme exacte d'unités, on ôte une autre ſomme exacte d'unités, mais moindre, le reſte doit être encore une ſomme d'unités ſans fraction. De même comme en multipliant un nombre entier par un autre nombre entier, on prend le premier autant de fois que l'unité eſt contenue dans le ſecond, & que ce ſecond contient l'unité exactement; il eſt clair qu'on prend la ſomme exacte d'unités du premier un certain nombre de fois ſans fraction, & que par conſéquent le produit doit être ſans fraction.

II°. Au contraire quand on diviſe un nombre entier par un autre nombre entier, il peut ſe faire que le diviſeur ne ſoit pas contenu exactement un certain nombre de fois dans le dividende : ce qui donne un reſte qui eſt une fraction.

113. THÉORÊME II. *Si on ajoute à un nombre entier une fraction, ou ſi on lui retranche une fraction; la ſomme ou le reſte ne ſera pas un nombre entier : mais ſi on multiplie ou ſi on diviſe un nombre entier par une fraction, le produit ou le quotient peuvent être un nombre entier.*

DÉMONSTRATION. I°. Si la fraction eſt moindre que l'unité, il eſt clair qu'en ajoutant cette fraction à un nombre entier, la ſomme ſera compoſée d'une ſomme exacte d'unités & d'une fraction; & que ſi on la retranche d'un nombre entier, le reſte ſera une ſomme d'unités moins une partie d'unité : & par conſéquent le reſte ou la ſomme ne ſeront pas des nombres entiers qui contiennent exactement l'unité.

II°. Mais ſi l'on multiplie ou ſi l'on diviſe un entier par une fraction; il pourra ſe faire que le produit ou le quotient ſoient des nombres entiers. Par exemple, ſi l'on multiplie le nombre entier 3 par $\frac{2}{3}$; le produit $\frac{6}{3}$ ſera un entier qui vaudra 2 : & au contraire multipliant 3 par $\frac{3}{4}$, le produit $\frac{9}{4}$ ne ſera pas un entier. De même ſi on diviſe 2 par $\frac{2}{3}$, ou ce qui revient au même, $\frac{6}{3}$ par $\frac{2}{3}$; le quotient 3 ſera un nombre entier : & au contraire ſi l'on diviſe 3 par $\frac{2}{3}$; le quotient $4\frac{1}{2}$ ne ſera pas un nombre entier.

114. THÉORÊME. III. *Si une fraction eſt réduite à ſes moindres termes; ſon quarré, ſon cube, &c, ſeront des fractions réduites à leurs moindres termes.*

DÉMONSTRATION. Soit la fraction $\frac{a}{b}$, réduite à ſes moindres termes : ſon quarré eſt $\frac{aa}{bb}$. Si l'on veut que cette fraction ou ce quarré $\frac{aa}{bb}$ ne ſoit pas réduite à ſes moindres termes; on pourra donc trouver un nombre qui diviſera exactement le numérateur aa & le dénominateur bb. Suppoſons que les deux quotiens ſoient xx, yy : en ſorte que la fraction $\frac{xx}{yy}$ ſoit égale à la fraction $\frac{aa}{bb}$ réduite à ſes moindres termes. La racine quarrée de cette fraction ſera donc $\frac{x}{y}$; & cette racine ſera égale à la racine $\frac{a}{b}$ de la fraction $\frac{aa}{bb}$. Or à cauſe que les quarrés xx, yy ſont moindres que les quarrés aa, bb; les racines x, y ſeront auſſi moindres que les racines a, b; & par conſéquent la fraction $\frac{a}{b}$ ſera exprimée en termes plus grands que ceux de ſon égale $\frac{x}{y}$: donc cette

fraction $\frac{a}{b}$ n'eſt pas réduite à ſes moindres termes, comme on le ſuppoſoit; puiſqu'elle pourroit être exprimée par $\frac{x}{y}$: donc, &c.

115. Nous pourrions ajouter ici grand nombre de Théorêmes ſur cette matiere; mais les 3 ou 4 ſuivans ſuffiront pour donner tous les éclairciſſemens néceſſaires.

Eclairciſſemens ſur les Fractions.

116. THÉORÊME I. *Si deux fractions, réduites à leurs moindres termes, n'ont pas un même dénominateur; elles ne peuvent être égales.*

DÉMONSTRATION. Soient les fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, réduites à leurs moindres termes; & dont les dénominateurs ſont différens. Si l'on veut que ces deux fractions ſoient égales, le numérateur a ſera auſſi grand par rapport à ſon dénominateur b, que le numérateur c par rapport à ſon dénominateur d. C'eſt pourquoi ſi d eſt plus grand que b, le numérateur c ſera plus grand que a; & la fraction $\frac{c}{d}$ ſera exprimée par des termes plus grands que ceux de ſon égale $\frac{a}{b}$: donc cette fraction $\frac{c}{d}$ n'aura pas été réduite à ſes moindres termes comme on le ſuppoſoit; puiſqu'elle pourroit être exprimée par $\frac{a}{b}$. Que ſi au contraire d eſt moindre que b, le numerateur c ſera auſſi moindre que le numérateur a; & la fraction $\frac{a}{b}$ étant exprimée par des termes plus grands que ceux de ſon égale $\frac{c}{d}$, n'aura pas été réduite à ſes moindres termes; ce qui eſt encore contre la ſuppoſition : donc, &c.

117. THÉORÊME II. *Si deux fractions qui ont un même dénominateur, ſont enſemble égales à un entier, & que l'une des deux ſoit réduite à ſes moindres termes, l'autre l'eſt auſſi.*

DÉMONSTRATION. Soient les fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$, qui ont même dénominateur, & dont la premiere $\frac{a}{b}$ eſt réduite à ſes moindres termes. La ſomme des deux numérateurs $a + c$ eſt égale ou à b, ou à $2b$, ou à $3b$, &c : & par conſéquent cette ſomme eſt un entier. Si l'on veut que la ſeconde fraction $\frac{c}{b}$ ne ſoit pas réduite à ſes moindres termes, nous trouverons un nombre que je nomme x, lequel di-

viſant exactement le numérateur & le dénominateur de cette fraction, la réduira à ſes moindres termes. Si l'on ſuppoſe donc $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{b}{b}$: c'eſt-à-dire $a + c = b$; le nombre x qui diviſe exactement b, diviſera exactement la quantité $a + c$; & comme ce nombre diviſe exactement la partie c de cette quantité, il diviſera exactement l'autre partie a. Donc on aura un nombre x, qui pourra diviſer exactement les termes de la fraction $\frac{a}{b}$; & par conſéquent cette fraction n'aura pas été réduite à ſes moindres termes : ce qui eſt contre la ſuppoſition. Ce ſeroit la même choſe ſi on ſuppoſoit $a + c = 2b$: car le nombre x qui diviſeroit exactement b, diviſeroit auſſi exactement $2b$ ou $a + c$; &c.

118. THÉORÈME III. *Si deux fractions réduites à leurs moindres termes, ont le même dénominateur ; leur ſomme peut être égale à un entier : mais ſi leurs dénominateurs ſont différens, leur ſomme eſt toujours une fraction plus grande ou moindre que l'unité.*

DÉMONSTRATION. I°. Soient les deux fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ réduites à leurs moindres termes, & qui ont le même dénominateur. Il peut aiſément ſe faire que la ſomme des numérateurs a, c, ſoit égale à b ou à $2b$, &c. Par exemple dans les fractions $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$, qui ſont réduites à leurs moindres termes, la ſomme $2 + 3$ des numérateurs eſt égale à 5 : & par conſéquent ces deux fractions font $\frac{5}{5}$, ou un entier. De même dans les fractions $\frac{8}{7}$ & $\frac{6}{7}$, réduites à leurs moindres termes, la ſomme $8 + 6$ des numérateurs eſt double du dénominateur 7 ; & les deux fractions valent $\frac{14}{7}$, ou deux entiers ; & ainſi des autres.

II°. Maintenant ſoient les fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, réduites à leurs moindres termes, & dont les dénominateurs ſont différens. Je cherche la quantité h qu'il faut ajouter au numérateur a, pour le rendre égal à ſon dénominateur ; & faiſant la fraction $\frac{h}{b}$, la ſomme $\frac{a}{b} + \frac{h}{b}$ ſera égale à $\frac{b}{b}$, & par conſéquent un entier ; & à cauſe que la fraction $\frac{a}{b}$ eſt réduite à ſes moindres termes, la fraction $\frac{h}{b}$ le ſera auſſi (117). Si l'on veut donc que les deux fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, priſes enſemble, vaillent un entier ; je les réduis au même dénominateur ; ce qui donne $\frac{ad}{bd}, \frac{cb}{bd}$: partant il faut que $ad + cb$ ſoit égal à bd. Je multiplie les termes de la fraction $\frac{h}{b}$ par d ; ce qui donne $\frac{hd}{bd}$: ainſi à cauſe que les deux

$\frac{a}{b}+\frac{h}{b}$ valent un entier; les deux $\frac{ad}{bd}+\frac{hd}{bd}$, qui ſont les mêmes, valent auſſi un entier, ou 1. Or par la ſuppoſition qu'on fait, les deux $\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}$ valent auſſi 1 : donc $\frac{ad}{bd}+\frac{hd}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}$, & retranchant $\frac{ad}{bd}$ de part & d'autre, nous aurons $\frac{hd}{bd}=\frac{cd}{bd}$. Mais $\frac{hd}{bd}$ eſt la même que $\frac{h}{b}$, & $\frac{cb}{bd}$ la même que $\frac{c}{d}$: donc les deux fractions $\frac{h}{b}$ & $\frac{c}{d}$, réduites à leurs moindres termes, & qui ont des dénominateurs inégaux, ſont égales; ce qui eſt impoſſible (116) : donc il eſt impoſſible auſſi que les deux $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, vaillent enſemble l'unité, ou un entier.

III°. Que ſi on prétend que les deux fractions vaillent deux entiers, ou trois, ou quatre, &c; je cherche ce qui manque au numérateur a de la fraction $\frac{a}{b}$, pour être égal à $2b$, $3b$, &c : & faiſant h égal à cette quantité, je forme la fraction $\frac{h}{b}$. Ainſi les deux enſemble $\frac{a}{b}+\frac{h}{b}$ valent ou $\frac{2b}{b}$, ou $\frac{3b}{b}$, &c, c'eſt-à-dire, ou trois unités, ou quatre, ou cinq, &c : & continuant le même raiſonnement & les mêmes opérations que ci-deſſus, je ferai voir aiſément que les deux $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ ne peuvent valoir ni deux unités, ni trois, ni quatre, ni aucun nombre entier; & que par conſéquent, leur ſomme eſt une fraction plus ou moins grande que l'unité.

119. THÉORÊME IV. *Si l'on multiplie une fraction par elle-même, le produit eſt une fraction, & jamais un entier.*

DÉMONSTRATION. I°. Si la fraction eſt *moindre que l'unité*, je la réduis à ſes moindres termes; & ſuppoſant qu'elle ſoit exprimée par $\frac{a}{b}$, ſon quarré eſt $\frac{aa}{bb}$. Or à cauſe que a eſt moindre que b, & que pour faire le quarré on a multiplié le numérateur de la fraction $\frac{a}{b}$ par a, & le dénominateur par b plus grand que a; le dénominateur bb du quarré $\frac{aa}{bb}$, eſt plus grand par rapport à ſon numérateur aa, que le dénominateur b de la fraction $\frac{a}{b}$ par rapport à ſon numérateur a : & par conſéquent $\frac{aa}{bb}$ eſt moindre que la fraction $\frac{a}{b}$. Mais $\frac{a}{b}$ eſt moindre que l'unité; donc à plus forte raiſon $\frac{aa}{bb}$ eſt moindre que l'unité.

II°. Si la fraction eſt *plus grande que l'unité*, elle contiendra un

ou pluſieurs entiers, plus une fraction moindre que l'unité. Suppoſant donc que l'entier ou les entiers qu'elle renferme ſoient exprimés par m, & que la fraction reſtante réduite à ſes moindres termes ſoit $\frac{a}{b}$; cette fraction ſera $m+\frac{a}{b}$, & ſon quarré $mm+\frac{2ma}{b}+\frac{aa}{bb}$. Or dans ce quarré le premier terme mm eſt un entier : le ſecond $\frac{2ma}{b}$ étant le produit de la fraction $\frac{a}{b}$ par l'entier $2m$, eſt ou entier ou une fraction (113) : & le dernier $\frac{aa}{bb}$ eſt une fraction; puiſqu'il eſt le quarré de la fraction $\frac{a}{b}$ moindre que l'unité. Donc ſi les deux premiers termes ſont des entiers, leur ſomme ſera un entier (112); & ajoutant à cet entier la fraction $\frac{aa}{bb}$, la ſomme ne ſera pas un entier (113).

Que ſi le ſecond terme $\frac{2ma}{b}$ eſt une fraction ; cette fraction ou ſera réduite à ſes moindres termes, ou ne le ſera pas. Si elle eſt réduite à ſes moindres termes ; il eſt clair que ſon dénominateur ne ſera pas le même que le dénominateur bb du troiſieme terme $\frac{aa}{bb}$, qui, par la ſuppoſition, eſt auſſi une fraction réduite à ſes moindres termes (114): ainſi les deux termes $\frac{2ma}{b}$, $\frac{aa}{bb}$ formeront enſemble une fraction plus grande, ou moindre que l'unité (118). Mais ſi le ſecond terme $\frac{2ma}{b}$ n'eſt pas réduit à ſes moindres termes, je les réduits ; & il eſt clair que ſon dénominateur ſera moindre que b, & par conſéquent moindre que le dénominateur bb du troiſieme terme $\frac{aa}{bb}$: donc le ſecond & le troiſieme terme, n'ayant pas le même dénominateur, formeront encore enſemble une fraction plus grande ou moindre que l'unité (18); & par conſéquent ces deux termes joints au premier mm, ne feront pas non plus un entier ſans fraction.

120. THÉORÊME V. *Si la racine quarrée d'un nombre entier n'eſt pas un nombre entier; elle ne pourra s'exprimer ni par une fraction, ni par un nombre compoſé d'entier & de fraction.*

DÉMONSTRATION. Si cette racine pouvoit s'exprimer par une fraction ; il s'enſuivroit que le produit de cette fraction par elle-même, ſeroit un nombre entier ; ce qui eſt impoſſible (119) : & ſi elle pouvoit s'exprimer par un entier & fraction ; il s'enſuivroit encore qu'un entier & fraction multiplié par lui-même, ſeroit un nombre entier ; ce qui eſt auſſi impoſſible (119) : donc, &c.

121

121. COROLLAIRE. Il ſuit de-là que *la racine d'un nombre entier qu'on ne peut tirer exactement, ne peut s'exprimer autrement que par le ſigne radical :* puiſqu'on ne peut l'exprimer ni par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & fraction. C'eſt l'une des choſes que j'avois promis ailleurs de démontrer (111).

122. THÉORÊME. *Si les racines de deux quarrés ne different entre elles que de l'unité, le plus grand des deux quarrés ſurpaſſe le petit de deux fois la racine du petit, plus l'unité.*

DÉMONSTRATION. Soit la racine du premier quarré a : celle du ſecond ſera donc $a + 1$. Le quarré de la premiere ſera aa ; & la quarré de la ſeconde ſera $aa + 2a + 1$. Or ſi de ce ſecond quarré, je retranche le premier quarré aa ; il eſt viſible que le reſte ſera $2a + 1$. Mais ce reſte eſt le double de la premiere racine a, plus l'unité : donc, &c.

$$\begin{array}{l} a+1 \\ a+1 \\ \hline aa+a+1 \\ \quad +a \\ \hline aa+2a+1 \text{ quarré.} \\ aa \\ \hline 2a+1 \text{ reſte, ou différence.} \end{array}$$

123. PROBLÊME. *Avec 4001 hommes, on veut faire un bataillon quarré ; & l'on demande, au cas qu'il y ait des hommes de trop, combien il faudroit en ajouter ou en retrancher, pour faire que le quarré ſoit parfait, & qu'il ne reſte rien.*

SOLUTION. J'extrais la racine quarrée du nombre 4001 ; & je trouve 63 avec un reſte 32 : ce qui me fait voir que ce quarré aura 63 hommes de front & de file, mais qu'il en reſtera 32. Si l'on veut donc employer ces 32, il faut en ajouter un certain nombre, lequel joint au nombre 4001 faſſe un quarré dont la racine ſurpaſſe la racine 63 d'une unité : or le quarré dont la racine eſt 64, ſurpaſſe le quarré dont la racine eſt 63 de deux fois 63 plus l'unité, c'eſt-à-dire de 126 + 1, ou de 127 : donc ſi 4001 étoit exactement le quarré de 63, il faudroit lui ajouter 127 hommes pour avoir le quarré de 64. Mais comme 4001 en contient déjà 32 de plus, je ne dois lui ajouter que 127 moins 32, c'eſt-à-dire 95 hommes ; & la ſomme eſt 4096, dont la racine eſt effectivement 64.

$$\begin{array}{l|l} 40\,01(63 & 127 \\ 6 & 32 \\ \hline 401 & 95 \\ 123 & 4001 \\ \hline 32 & 4096 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 40\,96(64 & \\ & \\ \hline & \\ 496 & \\ 124 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Que ſi on vouloit ſeulement le quarré de 63,

il eſt clair qu'en retranchant 32 hommes de 4001, le reſte 3969 ſeroit le quarré de 63.

124. COROLLAIRE. Il ſuit du théorême précédent que ſi après avoir extrait la racine d'un nombre, il reſte quelque choſe; ce reſte eſt moindre que le double de la racine trouvée, plus l'unité: & par conſéquent ce reſte, ajouté à la racine trouvée, ne peut pas l'augmenter de l'unité. Car, par exemple, ſi après avoir extrait la racine de 4001, qui eſt 63 avec un reſte 32, ce reſte 32 ſe trouvoit égal au double de 63 plus 1, c'eſt-à-dire à 127; le nombre 4001 diminué de 127 ſeroit le quarré de 63: or en ajoutant au quarré deux fois ſa racine 63, plus l'unité, c'eſt-à-dire 127, on le feroit devenir le quarré de 64: donc 4001 ſeroit exactement le quarré de 64, & par conſéquent en tirant ſa racine, on trouveroit 64, & non pas 63 avec un reſte.

EXTRACTION DE LA RACINE QUARRÉE DES GRANDEURS NUMÉRIQUES PAR APPROXIMATION.

125. Quand un nombre entier n'eſt pas un quarré parfait, ſa racine ne peut s'exprimer ni par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & fraction (120). Or tout ce qu'on peut faire dans ces occaſions, c'eſt d'opérer de façon que l'on approche ſi près de la véritable racine, que le reſte ſoit moindre qu'une quantité donnée quelque petite qu'elle ſoit; & c'eſt ce qu'on appelle *extraire la racine par approximation.* Par exemple, ſi l'on propoſe d'extraire cette racine, en ſorte que ce qui reſtera ſoit moindre qu'un dixieme d'unité, ou qu'un centieme, ou qu'un dix millieme, & ainſi de ſuite; la maniere de ſatisfaire à cette queſtion s'appelle extraire la racine quarrée par approximation: cette extraction eſt fondée ſur le théorême ſuivant.

126. THÉORÊME. *Si l'on prend l'unité, & qu'à ſa droite on mette un zéro, ou deux zéros, ou trois zéros, &c; ce qui donnera les nombres* 10, 100, 1000, 10000, *&c; les quarrés de ces nombres contiendront encore l'unité, plus un nombre de zéros double du nombre de zéros que leurs racines contiennent.*

La démonſtration de ceci étant tirée de la nature de la multiplication, on la trouvera bientôt ſi l'on multiplie chacun des nombres 10, 100, 1000, &c. par lui-même. Car on verra que le quarré de 10, qui eſt 100, contient l'unité plus deux zéros; au lieu que 10 ne contient que l'unité & un zéro: que le quarré de 100 qui eſt 10000, contient l'unité plus quatre zéros; au lieu que 100 ne contient que l'unité

& deux zéros, & ainſi des autres. Cela poſé, ſoit l'exemple ou le problême ſuivant.

PROBLÊME *Extraire la racine de* 3, *qui n'eſt pas un quarré parfait.*

SOLUTION. I°. Je réduis le nombre 3 en une fraction dont le dénominateur ſoit 100 : c'eſt-à-dire, je multiplie 3 par 100; ce qui fait 300; & je le diviſe par 100; ce qui fait $\frac{300}{100}$ égal à 3 (37). J'extrais la racine de cette fraction : c'eſt-à-dire j'extrais d'une part la racine du numérateur, & de l'autre la racine du dénominateur, pour faire de ces deux racines une nouvelle fraction qui ſera la racine cherchée (104). Or la racine du dénominateur 100 eſt 10, par le théorême précédent : donc il ne s'agit plus que de tirer la racine du numérateur 300. J'extrais cette racine à la façon ordinaire, & je trouve 17. Ainſi la racine de la fraction eſt $\frac{17}{10}$, ou $1\frac{7}{10}$: & il reſte 11 qui eſt moindre qu'une unité de la racine (124), c'eſt-à-dire *moindre qu'un dixieme*. Par conſéquent j'ai tiré la racine de 3; & ce qui reſte eſt moindre qu'un dixieme.

```
3|00(17
1   10
2.00
 27
 11
```

II°. Si je veux que ce qui reſte ſoit *moindre qu'un centieme*, & que par conſéquent la racine trouvée approche davantage de la véritable, je multiplie 3, non pas par 100, mais par 10000; & le diviſant par 10000, j'ai la fraction $\frac{30000}{10000}$, qui eſt égale à 3. Or la racine du dénominateur eſt 100 par le théorême précédent : ainſi je n'ai plus qu'à extraire la racine du numérateur; & cette racine étant extraite à la façon ordinaire eſt 173. Par conſéquent la racine de la fraction eſt $\frac{173}{100}$; ou $1\frac{73}{100}$ avec un reſte 71 qui eſt moindre qu'un centieme.

```
3|00|00(173
1    100
2.00
 27
 11.00
  343
   71
```

III°. Si je veux en approcher davantage, j'ajoute encore deux zéros au numérateur & au dénominateur de la fraction $\frac{30000}{10000}$: ce qui fait $\frac{3000000}{10000000}$. Or la racine du dénominateur 10000000 eſt 1000 : ainſi extrayant la racine du numérateur qui eſt 1732, je trouve que la racine cherchée eſt $\frac{1732}{1000}$; ou $1\frac{732}{1000}$ avec un reſte 276 qui eſt *moindre qu'un millieme.*

```
3|00|00|00(1732
1    1000
2.00
 27
 11.00
  349
   71.00
    3462
     276
```

IV°. En continuant toujours de la même façon, en ajoutant toujours deux zéros au numérateur & au dénominateur, j'approcherois toujours de plus en plus de la véritable valeur de la fraction, ſans pouvoir jamais y atteindre : parce qu'il me reſtera toujours un reſte, à cauſe que la racine

de 3 ne pouvant s'extraire en nombre entier, ne ſauroit s'extraire non plus en nombre rompu ou en nombre compoſé d'entier & de fraction. (120.).

127. COROLLAIRE. *La regle eſt donc d'ajouter au nombre dont on veut extraire la racine par approximation, ou deux zeros, ou quatre, ou ſix & ainſi de ſuite, toujours en nombre pair; & d'en extraire la racine ſous laquelle on mettra l'unité avec la moitié du nombre de zeros qu'on a ajouté au nombre propoſé*: ce qui donnera une fraction qui ſera la racine cherchée; & plus le nombre de zéros ajoutés ſera grand, plus auſſi on approchera de la véritable valeur (1).

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE DES QUANTITÉS NUMÉRIQUES.

128. Pour extraire la *racine cubique* d'un nombre, il faut d'abord ſe rendre familiers les cubes des dix premiers nombres que l'on voit dans cette table.

Racines cubiq.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Enſuite ſi le cube propoſé eſt plus grand que les cubes de cette table, on en extrait la racine cubique à peu près de même qu'on extrait celle des grandeurs littérales; mais la difficulté conſiſte à trouver les places qu'occupent les différens produits contenus dans le cube propoſé, & c'eſt ce que nous allons voir, en examinant de quelle façon ſe forme un cube.

Formation du Cube.

EXPLICATION. Soit le nombre 54 qu'il faut élever au cube. Je le multiplie d'abord par lui-même, en écrivant chaque produit à la place qu'il doit occuper ſans rien retenir: ce qui me donne les quatre produits que le quarré de 54 contient. Ainſi la ſomme de ces quatre produits donneroit le quarré de 54, de même que ſi j'avois multiplié à la façon ordinaire; & par conſéquent en multipliant ces quatre produits encore par 54, le produit total ſera le cube.

J'écris donc 54 par-deſſous, & je multiplie chacun des quatre produits d'abord par 4, & enſuite par 5: ce qui me donne huit produits, leſquels ajoutés enſemble font le cube 157464 de 54.

```
                54
                54
               ----
                16
               20
               20
              25
              ----
                54
               ----
                64
               80
              80
             10 0
               80
             10 0
             10 0
            125
            ----
            157|464 Cube.
```

(1) On trouvera dans le Cours de Mathématiques Élémentaires de Ml'Abbé PARA DU PHANJAS, une belle théorie & une fort élegante méthode, pour la formation du quarré & du cube, & pour l'extraction des racines quarrées & cubiques.

Je coupe ce cube par tranches de trois en trois caracteres de droite à gauche; & je vois que le cube 125 du premier caractere 5, ſe trouve à gauche de la premiere tranche, en allant de gauche à droite: que les trois produits 100, 100, 100, ſont partie à gauche, & partie à droite de la premiere tranche: que les trois produits 80, 80, 80, ſont à droite de la premiere tranche: & qu'enfin le cube 64 du ſecond caractere 4 de la racine eſt à gauche de la ſeconde tranche.

Or les trois produits 100, 100, 100, ſont chacun le produit du quarré 25 du premier caractere 5 de la racine multiplié par le ſecond caractere 4; & les trois produits 80, 80, 80, ſont chacun le produit du quarré 16 du ſecond caractere 4 de la racine multiplié par le premier caractere 5: donc le cube de 54, coupé par tranches, contient à gauche de la premiere tranche le cube du premier caractere 5; enſuite trois quarrés de ce premier caractere 5 multipliés par le ſecond, partie à gauche & partie à droite de la premiere tranche; puis trois quarrés du ſecond caractere 4 multipliés par le premier caractere à droite de la premiere tranche; & enfin le cube du ſecond caractere à gauche de la ſeconde tranche.

Que ſi le cube avoit un plus grand nombre de tranches, ce qui ne pourroit ſe faire ſans que ſa racine eût un plus grand nombre de caracteres; on trouveroit de même que les cubes du premier, du ſecond, du troiſieme, &c, ſeroient toujours à gauche des tranches premiere, ſeconde, troiſieme, &c: & que les produits que le cube contiendroit, ſeroient toujours partie à gauche & partie à droite de ces tranches. Cela poſé, ſoient les exemples ou les problêmes ſuivans.

PROBLÊME. Ier. *Trouver la racine cubique du nombre* 804357.

SOLUTION. Je mene une ligne ſous ce nombre, & une autre à droite, pour écrire la racine à côté. Je coupe ce nombre par tranches de trois en trois caracteres, en allant de droite à gauche. Après quoi je dis: le plus grand cube contenu dans les trois premiers caracteres 804 qui ſont à gauche de la premiere tranche, eſt 729: ce que je trouve par le moyen de la table des cubes des dix premiers nombres. Or la racine de 729 eſt 9, que j'écris au lieu deſtiné; & mettant le cube 729 de cette racine ſous 804, je le retranche de 804, & le reſte eſt 75.

```
804|357(93
729
 75 357
 243
 75 357
 00000
```

729
243
27
75357

J'abbaiſſe les caracteres 357 du cube: & faiſant le quarré 81 du premier caractere 9 de la racine, je le multiplie par 3; ce qui donne

243. Or 243, ou le triple du quarré de la premiere racine multiplié par la ſeconde, eſt dans 753. J'écris donc 243 ſous ce nombre, en ſorte que ſon dernier caractere 3 ſoit à droite de la premiere tranche dont je marque la place par un point à meſure que j'abbaiſſe les caracteres 357 compris entre la premiere & la ſeconde tranche. C'eſt pourquoi je diviſe 753 par 243; & le quotient 3 étant le nombre qui multiplie 243 dans 753, eſt par conſéquent la ſeconde racine.

Je multiplie 243 qui eſt la ſomme des trois quarrés de la premiere racine par la ſeconde racine 3; & le produit eſt 729 que j'écris à part. Je fais le quarré 9 de la ſeconde racine, & le multipliant par 3 pour en avoir le triple, & enſuite par la premiere racine 9, ce qui donne 243; j'écris 243 ſous 729 en l'avançant d'un rang vers la droite: parce que le cube propoſé contient ce produit 243 en avançant d'un rang. Enfin je fais le cube 27 de la ſeconde racine, & je l'écris ſous le produit 243, en l'avançant d'un rang à droite; parce que le cube propoſé contient le cube 27 de cette façon: & faiſant la ſomme des trois produits, laquelle eſt 75357, je l'écris ſous le reſte 75357; & retranchant la ſomme 75357 du reſte 75357, il ne reſte rien. Ainſi la racine cherchée eſt 93; puiſqu'en retranchant du cube propoſé, le cube du premier caractere, le triple du quarré de ce premier caractere multiplié par le ſecond, le triple du quarré du ſecond multiplié par le premier, & enfin le cube du ſecond, il n'eſt rien reſté.

PROBLÊME IV. *Extraire la racine cubique du nombre propoſé* 80621568.

SOLUTION. Je coupe le nombre par tranches; & je trouve que la racine aura trois caracteres: puiſqu'il y a trois tranches.

Je dis donc: le plus grand cube contenu dans les caracteres 80 qui ſont à gauche de la premiere tranche eſt 64, dont la racine cubique eſt 4: ce que je trouve par la table des cubes des dix premiers nombres. J'écris donc 4 au lieu deſtiné pour la racine, & 64 ſous 80; je retranche 64 de 80; & le reſte eſt 16.

80|621|568(432	
64	144
16.621	108
48	27
15507	15507
1.114.568	11094
55467	516
1114568	8
0000000	1114568

J'abaiſſe les trois caracteres 621 qui ſont entre la premiere & la ſeconde tranche. Je fais le quarré du premier caractere; & le multipliant par 3, le produit eſt 48: &

comme 48 multiplié par la ſeconde racine eſt dans les trois caracteres 166, je diviſe 166 par 48; & le quotient 3 eſt la ſeconde racine. Je multiplie 48 par la ſeconde racine 3 : ce qui donne le produit 144 que j'écris à part. Je fais le quarré de la ſeconde racine 3; je le multiplie par 3, & enſuite par la premiere racine 4 : ce qui donne 108, que j'écris à part ſous 144, en l'avançant d'un rang à droite. Enfin je fais le cube 27 de la ſeconde racine; & je l'écris à part ſous 108 en l'avançant d'un rang à droite. Je fais la ſomme 15507 des produits, que j'ai écrite à part; & l'écrivant ſous le reſte 16621 de la premiere opération, je retranche 15507 de 16621; & le reſte eſt 1114.

J'abaiſſe les trois caracteres 568, qui ſont entre la ſeconde & la troiſieme tranche; & faiſant le quarré des deux premieres racines 43, je le multiplie par 3 : ce qui fait 5547. Or ce produit multiplié par la troiſieme racine eſt dans 11145. J'écris donc 5547 ſous 11145; & diviſant 11145 par 5547, le quotient 2 eſt la troiſieme racine. Je multiplie 5547 par la troiſieme racine 2, & le produit eſt 11094 que j'écris à part. Je fais le quarré de la troiſieme racine 2; je le multiplie par 3, & enſuite par la ſomme 43 des deux premieres : le produit eſt 516 que j'écris à part ſous 11094 en l'avançant d'un rang à droite. Enfin je fais le cube 8 de la troiſieme racine, & je l'écris à part ſous 516 en l'avançant d'un rang à droite. Je fais la ſomme 1114568 des trois produits mis à part : & retranchant cette ſomme du reſte 1114568 de la ſeconde opération, il ne reſte rien. Ainſi la racine cherchée eſt 432.

129. Il faut obſerver que ſi après avoir pris le triple du quarré de la premiere racine, & diviſé le reſte par ce triple, on trouvoit pour la ſeconde racine un nombre qui fût de telle nature qu'en achevant l'opération juſqu'à la ſeconde tranche, la ſomme des trois produits mis à part fût plus grande que ce qui ſeroit reſté après avoir retranché le premier cube; il faudroit *diminuer la ſeconde racine d'une unité*, ou de deux, ou de trois, juſqu'à ce que la ſouſtraction de la ſomme des trois produits pût ſe faire : la même choſe doit être obſervée à l'égard des opérations ſuivantes, s'il s'en trouve encore à faire.

PROBLÊME IV. *Extraire la racine cubique de la fraction* $\frac{1331}{1728}$.

SOLUTION. J'extrais la racine cubique 11 du numérateur, & la racine cubique 12 du dénominateur; & j'écris $\frac{11}{12}$ pour la racine cherchée, & ainſi des autres. La démonſtration de ceci ſe trouve dans le ſixieme problême de l'extraction des racines des grandeurs littérales.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE DES GRANDEURS NUMÉRIQUES PAR APPROXIMATION.

130. L'approximation de la racine cubique des nombres ſe fait à peu près comme celle de la racine quarrée, & dépend du Théorême ſuivant.

131. THÉOREME I. *Si l'on prend les nombres* 10, 100, 1000, &c. *qui ont tous l'unité jointe à un zéro, à deux, à trois, &c : les cubes de ces nombres auront encore l'unité avec un nombre de zéros triple du nombre de zeros que leur racine contient.*

DÉMONSTRATION. Il eſt aiſé de ſe convaincre de ceci, en faiſant les cubes des nombres propoſés. Car on trouvera que le cube de 10 eſt 1000, lequel contient trois zéros; au lieu que ſa racine n'en contient qu'un : que le cube de 100 eſt 1000000, lequel contient ſix zéros; tandis que ſa racine n'en contient que deux; & ainſi des autres. Cela poſé, ſoit l'exemple ou le problême ſuivant.

PROBLÊME. *Extraire la racine cubique du nombre* 9, *qui n'eſt pas un cube parfait.*

SOLUTION. J'ajoute trois zéros ou ſix, ou neuf, & ainſi de ſuite; en augmentant toujours de trois; ce qui eſt la même choſe que ſi je réduiſois le nombre 9 en une fraction dont le dénominateur fût ou 1000, ou 1000000 : ce qui donneroit ou $\frac{9000}{1000}$, ou $\frac{9000000}{1000000}$, &c. Or la racine cubique du dénominateur eſt 10, quand le dénominateur eſt 1000 : elle eſt 100, quand le dénominateur eſt 1000000 : &c; par le Theorême précédent. Donc en tirant la racine cubique du numérateur, j'aurois des dixiemes à la racine, lorſque la fraction ſeroit $\frac{9000}{1000}$; des centiemes, lorſque la fraction ſeroit $\frac{9000000}{1000000}$; &c : & j'aurois toujours un reſte qui ſeroit moindre qu'une unité de la racine, c'eſt-à-dire, qui ne ſçauroit augmenter la racine d'une unité. Les opérations de ceci ſont faciles à faire : c'eſt pourquoi je me diſpenſe de les donner pour être plus court. Mais voici un theorême par le moyen duquel nous ferons voir que ce qui reſte de l'extraction, ne peut augmenter la racine d'une unité.

132. THEORÊME II. *Si deux nombres ne different que de l'unité; le cube du plus grand ſurpaſſe le cube du moindre, de trois fois le quarré de la racine du moindre, plus trois fois cette racine, plus l'unité.*

DÉMONSTRATION.

DÉMONSTRATION. Je nomme le plus petit nombre a : par conſéquent le ſecond ſera $a+1$. Je fais le cube de $a+1$; & j'ai $a^3+3aa+3a+1$. Je retranche de ce cube, le cube a^3 du petit nombre ; & le reſte $3aa+3a+1$, eſt l'excès du grand ſur le petit. Or cet excès contient trois quarrés de la racine a du petit, plus trois fois cette racine, plus l'unité : donc, &c.

$$\begin{array}{l} a+1 \\ a+1 \\ \hline aa+a+1 \\ \quad +a \\ \hline aa+2a+1 \textit{ quarré} \\ a+1 \\ \hline a^3+2aa+a \\ \quad +aa+2a+1 \\ \hline a^3+3aa+3a+1 \textit{ cube du grand.} \\ a^3 \ldots\ldots\ldots \textit{cube du petit.} \\ \hline 3aa+3a+1 \textit{ différence.} \end{array}$$

133. Pour faire donc voir que ce qui reſte après l'extraction d'une racine cubique ne ſçauroit augmenter cette racine d'une unité ; prenons le nombre 9, & tirons-en la racine ainſi que je viens de l'enſeigner : c'eſt-à-dire multiplions 9 par 1000, & diviſons-le par 1000 ; ce qui donnera la fraction $\frac{9000}{1000}$ égale à 9. Or la racine cubique du dénominateur eſt 10 : tirant donc la racine cubique du numérateur laquelle eſt 20, nous aurons pour la racine approchée $\frac{20}{10}$ ou 2, avec un reſte 1000. Ainſi le numérateur 9000 diminué de ce reſte, c'eſt-à-dire 8000, ſeroit exactement le cube du numérateur 20 de la racine : or ſi l'on veut que le reſte 1000 puiſſe donner une unité de plus à la racine, c'eſt-à-dire que cette racine puiſſe être 21 au lieu de 20 ; il faudra néceſſairement que ce reſte ſoit égal à trois fois le quarré de la racine 20, plus trois fois cette racine, plus l'unité. Mais ſi ce reſte 1000 étoit égal à la ſomme de ces trois quantités, ce reſte ajouté au cube 8000 de 20, ſeroit exactement le cube de 21 : & par conſéquent après avoir tiré la racine de 9000, on auroit 21 à la racine, & il ne reſteroit rien.

$$\begin{array}{l|l} 9\,000 & 20 \\ \hline 8 & 10 \\ \hline 1.000 & \\ 1\,2 & \\ 0000 & \\ \hline 1000 & \end{array}$$

134. Et il ne faut pas dire que ſi on réduiſoit le nombre 9 en une fraction plus grande, par exemple en $\frac{9000000}{1000000}$, ou $\frac{9000000000}{1000000000}$, &c : il pourroit arriver qu'après l'extraction de la racine il ne reſteroit rien. Car ſi cela étoit, on pourroit trouver la racine exacte de 9 : puiſque la fraction dont on auroit tiré la racine ſeroit égale à 9 ; & cette racine ſeroit ou un nombre entier, ou une fraction moindre que l'unité, ou enfin un entier & fraction. Or cette racine ne peut pas être un nombre entier : puiſqu'il n'y a point de nombre entier qui en ſe multipliant deux fois ſucceſſivement lui-même produiſe

9 ; & que d'ailleurs ſi cette racine étoit un nombre entier, on la trouveroit par les regles ordinaires ſans être obligé de réduire le nombre 9 en fraction. Elle ne peut pas être non plus une fraction moindre que l'unité. Car une fraction moindre que l'unité produit une fraction encore moindre qu'elle (119) ; & ce produit multiplié par la même fraction, produit une autre fraction encore moindre que lui. (119). Enfin la racine ne peut pas être un entier & fraction : parce qu'un entier & fraction, multiplié par lui-même, produit un entier & fraction (119) ; & que ce produit multiplié par l'entier & fraction qui l'a produit, doit encore produire un entier & fraction dont la racine ne peut pas être exacte, & par conſéquent on doit toujours trouver un reſte.

135. Comme il ſe rencontre plus de nombres qui ne ſont pas quarrés que des nombres quarrés ; il eſt bon de ſe former à ces ſortes d'approximations.

136. On trouve dans quelques livres d'arithmétique, des approximations qui ne ſont appuyées ſur aucun fondement & dont il faut ſe défier.

Calcul des grandeurs radicales.

137. Les *grandeurs radicales* ſont les mêmes que celles que nous avons nommées *ſourdes*, ou *irrationnelles*, ou *incommenſurables* (104). Le nombre ou la lettre qui eſt ſous le ſigne, eſt la puiſſance dont on veut extraire la racine ; & le ſigne radical avec le nombre qu'on écrit au-deſſus, marque de quel degré eſt la racine qu'on veut extraire. $\sqrt{a}$, ou $\sqrt[2]{a}$, marque qu'on veut extraire la racine quarrée de la grandeur a : $\sqrt[3]{b}$ marque qu'on veut tirer la racine cubique de la grandeur b conſidérée comme un cube, & ainſi des autres.

138. Quoique les grandeurs radicales ſoient incommenſurables en elles-mêmes, de façon qu'on ne peut pas exprimer le rapport qu'elles ont avec quelque autre grandeur connue ; cependant il peut ſe faire qu'elles ſoient *commenſurables entre elles*. Par exemple on ne peut pas exprimer ce que c'eſt que $\sqrt{3}$ par rapport à aucun nombre entier ou rompu, ou compoſé d'entier & de fraction. Cependant on connoît aiſément que $\sqrt{3}$ eſt le tiers de $3\sqrt{3}$; le quart de $4\sqrt{3}$, &c. La même choſe arrivera toutes les fois que les grandeurs qui ſont ſous le ſigne radical ſeront les mêmes, & que le ſigne radical ſera du même degré. Car ſi l'une ou l'autre de ces deux conditions manquoit, les grandeurs radicales n'auroient pas plus de rapport entre elles, qu'elles n'en ont avec des entiers ou

des fractions, ou des entiers & fractions. Ainſi le rapport de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$ ne peut s'exprimer, quoique les racines ſoient du même genre; & la raiſon en eſt, que les grandeurs qui ſont ſous le ſigne ſont différentes. De même $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[4]{2}$ n'ont point un rapport qu'on puiſſe exprimer : parce que les degrés 3 & 4 de leurs racines ſont différens, quoique le nombre qui eſt ſous la racine ſoit le même de part & d'autre.

139. Quand les degrés des ſignes radicaux ſont les mêmes, & que les grandeurs qui ſont ſous le ſigne ſont auſſi les mêmes; les grandeurs radicales ſe nomment *commenſurables entre elles.*

140. On peut faire toutes les opérations de l'arithmétique & de l'algebre ſur les grandeurs radicales, de même que ſur les grandeurs qui ne le ſont pas, moyennant certaines préparations qui dépendent des deux théorêmes ſuivans.

141. THÉORÊME I. *Si l'on multiplie deux quarrés l'un par l'autre; le produit ſera un nouveau quarré dont la racine ſera égale au produit des racines quarrées des deux quarrés. La même choſe doit s'entendre de deux cubes multipliés l'un par l'autre, de deux puiſſances quatriemes, cinquiemes, &c.*

DÉMONSTRATION. Soient les deux quarrés *aa* & *bb*. Je les multiplie l'un par l'autre, & le produit eſt *aabb*, dont la racine quarrée *ab* eſt égale au produit des racines *a*, *b*, des deux quarrés. De même ſoient les deux cubes a^3, b^3. Le produit de l'un par l'autre eſt $a^3 b^3$, dont la racine cubique *ab* eſt égale au produit des deux racines *a*, *b*, des deux cubes; & ainſi des autres.

142. THÉORÊME. II. *La racine quarrée d'une grandeur eſt égale à la racine quatrieme du quarré de cette grandeur; à la racine ſixieme de ſon cube, à la racine huitieme de ſa quatrieme puiſſance; & ainſi de ſuite, en augmentant l'expoſant de la racine de deux unités, à meſure que les puiſſances de la grandeur donnée augmentent d'une unité.*

De même la racine cubique d'une grandeur eſt égale à la racine ſixieme du quarré de cette grandeur; à la racine neuvieme de ſon cube; &c; en augmentant l'expoſant de la racine de trois unités, à meſure que les puiſſances de la grandeur donnée augmentent de l'unité.

Il faut dire la même choſe des racines plus élevées, en augmentant de quatre unités, de 5, 6, &c. les expoſans des racines; à meſure que les puiſſances de la grandeur donnée augmentent de l'unité.

DÉMONSTRATION. Prenons les puiſſances ſucceſſives de la gran-

deur a, lesquelles sont a, aa, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, &c. La grandeur a est certainement la racine quarrée de aa, la racine cubique de a^3, la racine quatrieme de a^4, & ainsi de suite. Or le quarré de aa est a^4, & par conséquent la racine quarrée de la grandeur aa est la même que la racine quatrieme de a^4 quarré de aa.

De même le cube de aa est a^6, sa quatrieme puissance est a^8, sa cinquieme puissance est a^{10}, &c. Par conséquent la racine quarrée de aa est la racine sixieme du cube de aa, la racine huitieme de sa quatrieme puissance, la racine dixieme de sa cinquieme puissance, &c.

De même le quarré de a^3 est a^6, son cube est a^9, sa quatrieme puissance est a^{12}, &c : donc la racine cubique de a^3, laquelle est a, est égale à la racine sixieme du quarré de a^3, à la racine neuvieme de son cube, à la racine douzieme de sa quatrieme puissance, &c.

On trouvera aussi que a, qui est la racine quatrieme de a^4, est la racine huitieme du quarré de a^4, la racine douzieme de son cube, &c; en augmentant toujours l'exposant de la racine de 4, à mesure que l'exposant des puissances de a^4 augmente de l'unité; & de même des autres puissances. Tout ceci est extrêmement facile, & s'il y a quelque chose qui puisse faire de la peine, ce n'est uniquement que l'énoncé qu'il faut se rendre familier.

PROBLÊMES SUR LES GRANDEURS RADICALES.

143. PROBLÊME I. *Changer une grandeur non radicale, en une autre qui soit radicale & dont l'exposant soit donné.*

SOLUTION. Soit la grandeur radicale a, qu'il faut changer en une autre qui ait le signe $\sqrt[2]{}$, ou simplement $\sqrt{}$: car l'un & l'autre sont la même chose. Je fais le quarré de a, lequel est aa; & j'écris $\sqrt[2]{aa}$, ou $\sqrt{aa}$: car cette expression $\sqrt{aa}$, signifie la racine quarrée du quarré aa, laquelle est a, & par conséquent $a = \sqrt{aa}$.

Si le signe radical donné avoit été $\sqrt[3]{}$, j'aurois élevé la grandeur a à sa troisieme puissance a^3; & j'aurois écrit $\sqrt[3]{a^3}$: car $\sqrt[3]{a^3}$ signifie la racine cubique de a^3; mais cette racine est a : donc $a = \sqrt[3]{a^3}$, & ainsi des autres.

La regle est donc d'élever la grandeur donnée à la puissance marquée par le degré de la racine, & d'écrire cette puissance sous le signe radical, en marquant au-dessus le dégré de la racine : & cela

s'appelle *faire paſſer une grandeur ſous le ſigne radical.*

Pour changer $a\sqrt{b}$ en une autre grandeur où tout ſe trouve ſous le ſigne ; je fais le quarré de a qui eſt aa, & j'écris $\sqrt{aab}$: car a eſt la même choſe que $\sqrt{aa}$, & a multiplié par $\sqrt{b}$ eſt la même choſe que $\sqrt{aa}$ multiplié par $\sqrt{b}$, c'eſt-à-dire la racine du quarré aa multipliée par la racine du quarré b. Mais quand deux racines quarrées ſe multiplient, elles produiſent un nombre qui eſt la racine du quarré que produiroient les deux quarrés des deux racines (141) ; & le produit des deux quarrés ſeroit aab : donc la racine produite par les deux racines $\sqrt{aa}$, $\sqrt{b}$ doit être $\sqrt{aab}$; & ainſi des autres.

144. PROBLÊME II. *Tirer une grandeur hors du ſigne radical.*

SOLUTION. Soit la grandeur $\sqrt{4}$ qu'il faut tirer hors du ſigne radical. Je dis : la racine quarrée de 4 eſt 2 : ainſi j'écris 2 au lieu de $\sqrt{4}$. De même au lieu de $\sqrt[3]{a^3}$, j'écris a : au lieu de $\sqrt[4]{a^4b^4}$, j'écris ab ; & ainſi des autres : ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

Mais ſi la grandeur qui eſt ſous le ſigne, n'eſt pas une puiſſance parfaite du degré marqué par la racine ; j'examine ſi elle n'eſt pas le produit de quelque puiſſance de ce degré multipliée par une autre grandeur qui ne ſoit pas élevée à ce degré ; & ſi cela eſt, je laiſſe ſous le ſigne la grandeur qui n'eſt pas du même dégré, & tirant la racine de l'autre, je l'écris hors du ſigne.

Dans $\sqrt{aab}$ je vois que le quarré aa eſt multiplié par b qui n'eſt pas un quarré : je laiſſe b ſous le ſigne, & tirant la racine a du quarré aa, j'écris $a\sqrt{b}$, au lieu de $\sqrt{aab}$.

De même dans $\sqrt{18}$, la grandeur 18 n'eſt pas un quarré : mais je vois que 18 eſt le produit du quarré 9 par 2 qui n'eſt pas un quarré ; je laiſſe 2 ſous le ſigne, & tirant la racine 3 du quarré 9 j'écris $3\sqrt{2}$ au lieu de $\sqrt{18}$.

Dans $\sqrt{a^3c}$ la grandeur a^3 eſt un cube, & la grandeur c ne l'eſt pas : je laiſſe c ſous le ſigne, & tirant la racine cubique de a^3 qui eſt a, j'écris $a\sqrt[3]{c}$, au lieu de $\sqrt{a^3c}$.

Dans $\sqrt[3]{54}$ la grandeur 54 n'eſt pas un cube : mais je vois que 54 eſt le produit de 27 par 2. Or 27 eſt un cube, & 2 ne l'eſt pas : je laiſſe 2 ſous le ſigne, & tirant la racine cubique du cube 27 ; j'écris $3\sqrt[3]{2}$, au lieu de $\sqrt[3]{54}$, &c.

La raiſon de ceci eſt évidente. Car dans $\sqrt{aab}$, je puis regarder

la grandeur *aab* comme étant le produit du quarré *aa* par le quarré *b*. Mais deux quarrés qui ſe multiplient produiſent un autre quarré, dont la racine eſt égale au produit des racines quarrées des deux quarrés qui ſe ſont multipliés (141): donc $\sqrt{aab}$ eſt le produit des racines des quarrés *aa*, *b*; c'eſt-à-dire le produit de $\sqrt{aa}$ multiplié par $\sqrt{b}$. Mais $\sqrt{aa}$ eſt la même choſe que *a*: donc $\sqrt{aa}$ multiplié par $\sqrt{b}$, ou $\sqrt{aab}$, eſt la même choſe que $a\sqrt{b}$. On démontrera la même choſe dans tous les autres cas.

145. Quand on tire les grandeurs hors du ſigne, cela s'appelle *réduire les radicaux à leurs expoſans ou à leurs moindres termes.*

146. Il arrive quelquefois qu'en réduiſant deux grandeurs qui ont le même ſigne à leurs moindres termes; on rend ces grandeurs commenſurables entre elles, au lieu qu'elles ne l'étoient pas auparavant. Par exemple, ſi on réduit les grandeurs $\sqrt{8}$ & $\sqrt{18}$ à leurs moindres termes: on trouvera $2\sqrt{2}$, & $3\sqrt{2}$ qui ſont des grandeurs commenſurables entre elles.

147. PROBLÊME III. *Réduire à un même ſigne, deux ou pluſieurs grandeurs radicales qui ont différens ſignes.*

SOLUTION. Pour réduire à un même ſigne, les deux grandeurs $\sqrt[2]{a}$ & $\sqrt[6]{b}$; il s'agit de faire devenir 6 l'expoſant 2 de $\sqrt[2]{a}$; ce qui peut ſe faire en le prenant trois fois. Or $\sqrt[2]{a}$, étant la racine quarrée de *a*, eſt égal à la racine quatrieme du quarré de *a*, & à la racine ſixieme de ſon cube, (142): donc élevant *a* au cube, ce qui fait a^3; j'écris $\sqrt[6]{a^3}$, qui eſt la même choſe que $\sqrt[2]{a}$. Ainſi j'ai $\sqrt[6]{a^3}$ & $\sqrt[6]{b}$ qui ont le même ſigne.

Pour réduire au même ſigne les deux grandeurs $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{3}$, je vois que l'expoſant 2 de $\sqrt[2]{2}$ eſt contenu préciſément quatre fois dans l'autre expoſant: Ainſi il faut le prendre quatre fois pour avoir l'expoſant 8. Or $\sqrt[2]{2}$, étant la racine quarrée de 2, eſt égal à la racine quatrieme du quarré 2, ou à la racine ſixieme du cube de 2, ou enfin à la racine huitieme de la quatrieme puiſſance de 2; élevant donc 2 à ſa quatrieme puiſſance 16; j'écris $\sqrt[8]{16}$ au lieu de $\sqrt[2]{2}$; & j'ai les deux grandeurs $\sqrt[8]{16}$ & $\sqrt[8]{3}$ qui ont le même ſigne, &c.

148. Si le moindre des deux expoſans n'étoit pas exactement contenu dans le plus grand; on multiplieroit l'un par l'autre, & le produit ſeroit l'expoſant de la racine de l'une & l'autre grandeur.

Pour réduire au même ſigne $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[5]{b}$; je multiplie les expoſans 3 & 5 l'un par l'autre : ce qui donne 15, qui eſt l'expoſant que la racine de l'une & l'autre grandeur doit avoir. Or $\sqrt[3]{a}$, étant la racine cubique de a, eſt par conſéquent la racine ſixieme du quarré de a, la racine neuvieme du cube de a, la racine douzieme de ſa quatrieme puiſſance, & la racine quinzieme de ſa cinquieme puiſſance. Ainſi élevant a à la cinquieme puiſſance a^5; j'écris $\sqrt[15]{a^5}$, au lieu de $\sqrt[3]{a}$; de même $\sqrt[5]{b}$, étant la racine cinquieme de b, eſt par conſéquent la racine dixieme du quarré de b, & la racine quinzieme de ſon cube : donc élevant b au cube, ce qui donne b^3; j'écris $\sqrt[15]{b^3}$, au lieu de $\sqrt[5]{b}$; & j'ai $\sqrt[15]{a^5}$, & $\sqrt[15]{b^3}$ qui ont le même ſigne.

Pour réduire au même ſigne les trois grandeurs $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, & $\sqrt[4]{c}$; je multiplie les trois expoſans 2, 3, 4, les uns par les autres, ce qui donne 24. Mais comme 12 peut être diviſé exactement par 2, par 3, & par 4; je prends 12 pour l'expoſant commun des racines : or $\sqrt[2]{a}$, étant la racine quarrée de a, eſt auſſi la racine quatrieme de ſon quarré; la racine ſixieme de ſon cube; la racine huitieme de ſa quatrieme puiſſance; la racine dixieme de ſa cinquieme puiſſance; & la racine douzieme de ſa ſixieme puiſſance : ainſi élevant a à la ſixieme puiſſance, ce qui donne a^6; j'écris $\sqrt[12]{a^6}$, au lieu de $\sqrt[2]{a}$: & faiſant le même raiſonnement à l'égard des deux autres, je trouve $\sqrt[12]{b^4}$, & $\sqrt[12]{c^3}$, & ainſi des autres.

149. PROBLÊME IV. *Ajouter les grandeurs radicales.*

SOLUTION. Quand les grandeurs radicales ſont commenſurables entre elles; on ajoute enſemble les grandeurs qui ſont hors le ſigne. Ainſi pour ajouter $2\sqrt{3}$, avec $4\sqrt{3}$, on ajoute les deux grandeurs 2 & 4 qui ſont hors le ſigne : ce qui fait 6; & l'on écrit $6\sqrt{3}$. Pour ajouter $3\sqrt{5}$ avec $4\sqrt{5}$; on écrit $7\sqrt{5}$, & de même des autres.

Mais ſi ces grandeurs ne ſont pas commenſurables entre elles, on les réduit au même ſigne, & enſuite à leur expoſant; & ſi par ce moyen elles deviennent commenſurables entre elles, on les ajoute comme il vient d'être dit : mais ſi elles ne le ſont pas, on les ajoute en mettant entre elles le ſigne $+$.

Pour ajouter $\sqrt[3]{81}$ & $\sqrt[3]{192}$, je trouve que la grandeur 81 du premier eſt le produit du cube 27 par 3 : je laiſſe 3 ſous le ſigne; &

tirant la racine cubique de 27 qui eſt 3, j'écris $3\sqrt[3]{3}$, au lieu de $\sqrt[3]{81}$. Je vois de même que la grandeur 192 de la ſeconde, eſt le produit du cube 64 par 3 : je laiſſe 3 ſous le ſigne ; & tirant la racine cubique de 64 qui eſt 4, j'écris $4\sqrt[3]{3}$. Cela fait, j'ajoute les grandeurs 3 & 4 qui ſont ſous le ſigne : ce qui fait 7 ; & j'écris $7\sqrt[3]{3}$.

Pour ajouter enſemble $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{4}$, je multiplie les deux expoſans ; ce qui donne l'expoſant commun 6. Enſuite opérant comme il a été dit (147.), j'ai $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{16}$: & comme je ne puis pas réduire ces grandeurs à des moindres termes ; je les ajoute enſemble en écrivant $\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{16}$. Mais le plus court dans ces occaſions, eſt d'écrire $\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{4}$, dès qu'on voit qu'on ne ſçauroit les rendre commenſurables entre elles.

150. PROBLÊME V. *Souſtraire les grandeurs radicales.*

SOLUTION. Si les grandeurs ſont commenſurables, on ſouſtrait la grandeur qui eſt hors du ſigne de la petite, de la grandeur qui eſt hors du ſigne de la grande ; & le reſte, écrit avec le ſigne & la grandeur qui eſt par deſſous, eſt la ſouſtraction demandée.

Pour ſouſtraire $2\sqrt{3}$ de $6\sqrt{3}$, on retranche 2 de 6 : ce qui fait 4 ; & l'on écrit $4\sqrt{3}$, & ainſi des autres.

Mais ſi ces grandeurs ne ſont pas commenſurables entre elles, on tâche de les rendre telles par les moyens ci-deſſus : & ſi elles le deviennent, on ſouſtrait l'une de l'autre, ainſi qu'on vient de voir. Mais ſi elles ne peuvent le devenir, on fait la ſouſtraction en employant le ſigne —,

Pour ſouſtraire $\sqrt[3]{4}$ de $\sqrt[2]{2}$, on les réduit au même ſigne ; ce qui donne $\sqrt[6]{16}$ & $\sqrt[6]{8}$; & l'on écrit $\sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{16}$, ou ſimplement $\sqrt[2]{2} - \sqrt[3]{4}$.

151. PROBLÊME VI. *Multiplier les grandeurs radicales.*

SOLUTION. Avant de multiplier les grandeurs propoſées, il faut avoir ſoin de les réduire à leurs moindres expreſſions ; & ſur-tout de leur donner un même ſigne : parce qu'il n'y a que les racines d'un même degré, qui produiſent une racine d'un même degré. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, en ſe multipliant elles-mêmes, produiſent $\sqrt{10}$; c'eſt-à-dire la racine du cube qui ſeroit le produit des cubes 2 & 5 (141.). Mais $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{5}$ ne produiſent ni $\sqrt[2]{10}$ ni $\sqrt[3]{10}$.

Ayant

Ayant donc fait les préparations dont nous venons de parler, on multiplie les grandeurs qui ſont hors du ſigne par elles-mêmes, & celles qui ſont ſous le ſigne auſſi; & l'on écrit les deux produits, en mettant entre deux le ſigne radical.

Pour multiplier $\sqrt[2]{a}$ par $\sqrt[2]{b}$, on écrit $\sqrt[2]{ab}$: & pour multiplier $a\sqrt[3]{c}$ par $b\sqrt[3]{d}$, on écrit $ab\sqrt[3]{cd}$. De même $3\sqrt{2}$ par $4\sqrt{6}$ donne $12\sqrt{12}$: ou bien on réduit $\sqrt{12}$ à ſes moindres termes; ce qui fait $2\sqrt{3}$, à cauſe que 12 eſt le produit du quarré 4 par le nombre 3 qui n'eſt pas un quarré, & l'on écrit $12 \times 2\sqrt{3}$, ou $24\sqrt{3}$, & ainſi des autres.

Pour multiplier $a + c\sqrt{d}$ par $a + b\sqrt{c}$; on écrit ces deux nombres l'un ſous l'autre, les entiers ſous les entiers, & les radicaux ſous les radicaux, & on multiplie à la façon ordinaire. Ainſi a par a donne aa; a par $c\sqrt{d}$ donne $ac\sqrt{d}$; a par $b\sqrt{c}$ donne $ab\sqrt{c}$, & $c\sqrt{d}$ par $b\sqrt{c}$ donne $cb\sqrt{dc}$.

$$\begin{array}{r} a + c\sqrt{d} \\ a + b\sqrt{c} \\ \hline aa + ac\sqrt{d} + ab\sqrt{c} + bc\sqrt{dc} \end{array}$$

Pour multiplier $a + b\sqrt{d}$ par $a - b\sqrt{d}$; on fait la multiplication de même que dans l'exemple précédent, & on trouve $aa - bb\sqrt{dd}$. Mais $\sqrt{dd}$ eſt la même choſe que d: donc $-bb\sqrt{dd}$ eſt la même choſe que $-bb \times d$, ou $-bbd$; & par conſéquent le produit eſt $aa - bbd$.

$$\begin{array}{r} a + b\sqrt{d} \\ a - b\sqrt{d} \\ \hline aa + ab\sqrt{d} - bb\sqrt{dd} \\ - ab\sqrt{d} \\ \hline aa \quad - bb\sqrt{dd} \\ \text{ou } aa \quad - bbd \end{array}$$

Ceci fait voir que la multiplication fait quelquefois diſparoître les grandeurs radicales.

152. PROBLÊME VII. *Diviſer les grandeurs radicales.*

SOLUTION. Avant de diviſer on doit avoir ſoin de faire les mêmes préparations que pour la multiplication. Après quoi on diviſe les grandeurs qui ſont hors du ſigne par celles qui ſont hors du ſigne, & celles qui ſont ſous le ſigne par celles qui ſont ſous le ſigne; & l'on écrit les deux quotients.

$\sqrt{ab}$ diviſé par $\sqrt{b}$ donne $\sqrt{a}$: car multipliant le quotient $\sqrt{a}$ par le diviſeur $\sqrt{b}$, on retrouve le dividende $\sqrt{ab}$. De même $cb\sqrt{a^2d}$ diviſé par $c\sqrt{ad}$ donne $b\sqrt{a}$, & ainſi des autres.

Que ſi la diviſion ne peut pas ſe faire, on écrit le diviſeur ſous le dividende: par exemple, pour diviſer $a\sqrt{c}$ par $b\sqrt{d}$, on écrit $\frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{d}}$, &c.

Pour diviſer la grandeur complexe $aa + ac\sqrt{d} + ab\sqrt{c} + bc\sqrt{dc}$, par la grandeur complexe $a + c\sqrt{d}$; on écrit le diviſeur ſous le dividende, & l'on fait la diviſion à l'ordinaire. Ainſi aa diviſé par a donne a; & multipliant le quotient a par les termes du diviſeur, j'ai a par a qui donne aa, lequel retranché de aa ne laiſſe rien : a par $c\sqrt{d}$ donne $ac\sqrt{d}$, qui retranché de $ac\sqrt{d}$ ne laiſſe rien.

$$\begin{array}{l} aa + ac\sqrt{d} + ab\sqrt{c} + bc\sqrt{dc} \;(a + b\sqrt{c} \\ \hline a + c\sqrt{d} \\ \hline \qquad\qquad a + c\sqrt{d} \\ \hline \qquad\qquad 0 \qquad 0 \end{array}$$

J'écris le diviſeur ſous les autres caracteres du dividende, & je trouve que $ab\sqrt{c}$ diviſé par a donne au quotient $b\sqrt{c}$; & multipliant ce quotient par le diviſeur, & faiſant enſuite la ſouſtraction, il ne reſte rien. Ainſi le quotient eſt $a + b\sqrt{c}$; & c'eſt la preuve de la premiere multiplication compoſée (151.).

Pour diviſer la grandeur complexe $aa - bb\sqrt{dd}$, par $a - b\sqrt{d}$; je vois que dans le ſecond terme bbd du dividende, la grandeur d eſt la même choſe que $\sqrt{dd}$, & que par conſéquent bbd eſt la même choſe que $bb\sqrt{dd}$. Ainſi j'écris $aa - bb\sqrt{dd}$ pour le dividende, & enſuite le diviſeur par deſſous : aa diviſé par a donne le quotient a; je multiplie a par a, ce qui donne aa qui retranché de aa ne laiſſe rien. Je multiplie a par $-b\sqrt{d}$, ce qui donne $-ab\sqrt{d}$; & comme il n'y a point de produit de cette eſpece dans le dividende, je ſuppoſe que ce dividende contienne $-ab\sqrt{d} + ab\sqrt{d}$; ce qui ne l'augmente ni ne le diminue : donc $-ab\sqrt{d}$ retranché de $-ab\sqrt{d}$ ne laiſſe rien. J'écris $+ab\sqrt{d}$ par deſſous, & abaiſſant le terme $-bb\sqrt{dd}$, j'écris le diviſeur par deſſous. $ab\sqrt{d}$ diviſé par a donne au quotient $b\sqrt{d}$; & multipliant ce quotient par le diviſeur, puis faiſant la ſouſtraction, il ne reſte rien. Le quotient eſt donc $a + b\sqrt{d}$, & c'eſt la preuve de la ſeconde multiplication. (151.).

$$\begin{array}{l} aa - bb\sqrt{dd} \;(a + b\sqrt{d} \\ \hline a - b\sqrt{d} \\ \hline +ab\sqrt{d} - bb\sqrt{dd} \\ \hline a - b\sqrt{d} \\ \hline 0 \qquad 0 \end{array}$$

Que ſi en opérant, comme on vient de le dire, la diviſion n'étoit pas exacte ; on ſe contenteroit d'écrire le dividende ſous le diviſeur, comme une fraction.

DU CALCUL DES EXPOSANS.

153. Le *Calcul des Expoſans* eſt la maniere de multiplier une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de la même gran-

deur, de diviſer l'une par l'autre, d'élever une puiſſance de cette grandeur à une autre puiſſance, ou d'en extraire la racine, en ne ſe ſervant que des expoſans : en voici les regles dans les problêmes & dans les corollaires ſuivans.

154. PROBLÊME I. *Multiplier une puiſſance d'une grandeur, par une autre puiſſance de la même grandeur.*

SOLUTION. Soit la grandeur a ou a^1; dont les puiſſances ſont a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, &c. Si l'on veut multiplier la puiſſance a^2 par la puiſſance a^3, on ajoute l'expoſant 2 à l'expoſant 3, & la ſomme 5 eſt l'expoſant de la puiſſance qui ſera le produit des deux. Ainſi cette puiſſance ſera a^5 : car la puiſſance à multiplier a^2, eſt la même choſe que aa; & le multiplicateur a^3, eſt la même choſe que aaa. Mais pour multiplier aa par aaa, il faut écrire a^5 : donc le produit a^2 par a^3 eſt effectivement la puiſſance a^5, dont l'expoſant 5 eſt la ſomme des expoſans 2 & 3.

De même pour multiplier a^3 par a^4, on ajoute l'expoſant 3 à l'expoſant 4; ce qui fait 7 : & l'on a a^7 pour le produit. Car a^3 par a^4 eſt la même choſe que aaa par $aaaa$: ce qui donne $aaaaaaa$, ou a^7.

155. PROBLÊME II. *Diviſer une puiſſance d'une grandeur, par une autre puiſſance de la même grandeur.*

SOLUTION. Pour diviſer une puiſſance de la grandeur a par une autre puiſſance de la même grandeur; il faut retrancher l'expoſant du diviſeur, de l'expoſant du dividende : le reſte eſt l'expoſant du quotient. Par exemple,

Pour diviſer a^6 par a^2; on retranche l'expoſant 2, de l'expoſant 6; ce qui donne l'expoſant 4 : & l'on a a^4 pour le quotient. Car a^6 eſt la même choſe que $aaaaaa$; & a^2 eſt la même choſe que aa : mais pour diviſer $aaaaaa$ par aa, on écrit $aaaa$ qui eſt la même choſe que a^4 : donc le quotient de a^6 diviſé par a^2 eſt a^4, dont l'expoſant 4 eſt le reſte de la ſouſtraction des deux expoſans.

156. PROBLÊME III. *Elever une puiſſance d'une grandeur, à une autre puiſſance de la même grandeur.*

SOLUTION. Pour élever une puiſſance donnée de a, à une autre puiſſance dont l'expoſant ſoit donné; on multiplie l'expoſant de la puiſſance donnée par l'expoſant donné, & le produit eſt l'expoſant de la puiſſance cherchée.

Si l'on veut donc élever la puiſſance a^3 au quarré; on multiplie l'expoſant 3, par l'expoſant 2 du quarré ou de la ſeconde puiſſance;

ce qui fait 6 : & a^6 eſt le quarré de a^3. Car a^3 étant la même choſe que *aaa*, ſi l'on multiplie *aaa* par lui-même, on aura *aaaaaa* qui eſt la même choſe que a^6.

De même pour élever la puiſſance a^2 à ſa quatrieme puiſſance ; on multiplie 2 par l'expoſant 4 de la quatrieme puiſſance, ce qui fait 8 ; & l'on écrit a^8 pour le produit. Car *aa* multiplié par lui-même donne ſa ſeconde puiſſance *aaaa* ; & celle-ci multipliée par *aa* donne la troiſieme puiſſance *aaaaaa* de *aa*, & enfin cette troiſieme multipliée par *aa* donne *aaaaaaaa*, ou a^8 qui eſt la quatrieme puiſſance de *aa* ou de a^2.

157. PROBLÊME IV. *Extraire la racine d'une puiſſance d'une grandeur, en ne ſe ſervant que des expoſans.*

SOLUTION. Pour extraire la racine d'une puiſſance de la grandeur *a*, on diviſe l'expoſant de la puiſſance par l'expoſant de la racine ; & le quotient eſt l'expoſant de la racine cherchée.

Si l'on veut donc extraire la racine ſeconde de a^6, on diviſe 6 par 2, ce qui donne 3 ; & l'on a a^3 pour la racine cherchée. Car ſi pour élever a^3 à la ſeconde puiſſance, il faut par la regle précédente, multiplier l'expoſant 3 par l'expoſant 2 de la puiſſance à laquelle on veut élever a^3 ; ce qui donne l'expoſant 6 de la ſeconde puiſſance a^6 de a^3 ; il eſt clair que pour tirer la racine quarrée, il faudra diviſer 6 par 2 pour avoir a^3 qui eſt la racine quarrée de a^6.

158. REMARQUE. Ces regles nous font voir que lorſqu'on veut opérer par les expoſans, ce que l'on devroit faire par la multiplication & la diviſion, on le fait par l'addition & la ſouſtraction ; & ce que l'on devroit faire par l'élévation des puiſſances ou par l'extraction des racines, on le fait par la multiplication & la diviſion.

159. COROLLAIRE I. Il ſuit de-là que ſi on diviſe *a* par *a*, c'eſt-à-dire a^1 par a^1 ; on aura a^{1-1}, ou a^0 (155.). Or *a* diviſé par *a* donne 1 au quotient : donc a^0 eſt égal à 1 : ce qu'il faut bien remarquer.

160. COROLLAIRE II. Il ſuit encore que ſi l'on diviſe a^0 par a^1, on aura a^{0-1} ; & ſi l'on diviſe a^0 par a^2, on aura a^{0-2}, c'eſt-à-dire a^{-2}. De même en diviſant a^0 par a^3, on auroit a^{0-3}, ou a^{-3}, & ainſi de ſuite : ce qui donneroit les puiſſances négatives de *a*, qui ſeroient a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c : de ſorte que a^0 ſeroit entre les puiſſances poſitives de *a*, & les négatives, comme on le voit ici.

$a^{-\infty}$, &c. a^{-5}. a^{-4}. a^{-3}. a^{-2}. a^{-1}. a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5, &c. a^{∞}.

La grandeur a^{∞}, que l'on voit ici, ſignifie la grandeur *a* élevée à une puiſſance infinie, laquelle par conſéquent ſeroit une puiſſance

infiniment grande : & la puiſſance $a^{-\infty}$ ſignifie a^0 diviſé par a^{∞} ; ce qui donne la puiſſance négative $a^{0-\infty}$, laquelle ſeroit une puiſſance infiniment petite : car a^0 étant égal à 1, il eſt clair que 1 diviſé par une grandeur infinie a^{∞}, donneroit un quotient infiniment petit.

161. COROLLAIRE III. *Les puiſſances négatives peuvent s'exprimer de façon que leurs expoſans deviennent poſitifs.* Car a^0 étant la même choſe que 1 ; ſi l'on diviſe à l'ordinaire 1 par a^1, on aura $\frac{1}{a^1}$, qui ſera égal à a^{-1}. De même ſi l'on diviſe 1 par a^2, on aura $\frac{1}{a^2}$ égal à a^{-2}, & ainſi des autres. De ſorte que les puiſſances négatives a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c, ſe changeront en celles-ci $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, &c, dont les expoſans ſont devenus poſitifs : ce qui ſe fait, comme on voit, en faiſant paſſer chaque puiſſance négative au dénominateur d'une fraction dont le numérateur eſt 1 ; & en mettant à ce dénominateur un expoſant poſitif, au lieu du négatif qu'il avoit auparavant.

162. COROLLAIRE IV. De même que les puiſſances négatives de a peuvent devenir poſitives en paſſant au dénominateur d'une fraction dont le numérateur ſoit 1 ; de même auſſi *les puiſſances poſitives peuvent devenir négatives, en paſſant au dénominateur d'une fraction dont l'expoſant ſoit* 1. Ainſi les puiſſances a^1, a^2, a^3, a^4, &c, peuvent ſe changer en celles-ci qui ſont les mêmes $\frac{1}{a^{-1}}$, $\frac{1}{a^{-2}}$, $\frac{1}{a^{-3}}$, &c ; ce que je prouve ainſi : ſi je diviſe a^0 par la puiſſance négative a^{-1}, en me ſervant du calcul des expoſans, je dois retrancher l'expoſant négatif de a^{-1} de l'expoſant 0 de a^0 (155). Mais retrancher —1, c'eſt donner 1 : donc le reſte de la ſouſtraction doit être $0 + 1$, ou 1 ; & par conſéquent le quotient de la diviſion doit être a^1. Or a^0 étant égal à 1, il eſt clair qu'en diviſant 1 par a^{-1}, le quotient eſt $\frac{1}{a^{-1}}$: donc le quotient précédent a^1 eſt égal au quotient $\frac{1}{a^{-1}}$. On prouvera de même que a^2 eſt égal à $\frac{1}{a^{-2}}$: & ainſi du reſte.

163. REMARQUE. Ce que je viens de dire, ſuppoſe que les puiſſances poſitives ou négatives n'aient point d'autres coëfficiens que l'unité. Mais ſi elles en avoient d'autres, ces coëfficiens devroient reſter au numérateur, tandis que les puiſſances paſſeroient au dénominateur. Ainſi pour rendre poſitive la puiſſance $2a^{-1}$, on laiſſeroit le coëfficient au numérateur, & l'on écriroit $\frac{2}{a^1}$. Car $2a^{-1}$ eſt

la même chose que $2 \times a^{-1}$: or a^{-1} est le même que $\frac{1}{a^1}$: donc $2 \times a^{-1}$ est encore le même que $2 \times \frac{1}{a^1}$, ou $\frac{2}{a^1}$.

De même pour rendre négative la puissance $2a^3$, on écriroit $\frac{2}{a^{-3}}$: à cause que $2a^2$ est égal à $2 \times a^2$, & a^2 est égal à $\frac{1}{a^{-2}}$. Par conséquent $2 \times a^2$ est égal à $\frac{2}{a^{-2}}$, &c.

164. Corollaire V. Il suit encore des regles que nous avons données, que si l'on veut la racine quarrée de a, ou sa racine cubique, ou sa racine quatrieme, &c; il faut écrire $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c : & que par conséquent on peut se passer des signes radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, &c. De même pour tirer la racine cinquieme de a^4, on écrira $a^{\frac{4}{5}}$: pour marquer la racine septieme de a^2, on écrira $a^{\frac{2}{7}}$, &c.

165. Remarque. Ce calcul est commode non-seulement pour débarrasser des signes radicaux, mais encore parce qu'on peut multiplier des puissances de différente espece les unes par les autres. Car pour multiplier $a^{\frac{1}{2}}$ par $a^{\frac{1}{3}}$, on écrira $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$: ou bien en réduisant les deux fractions en même dénomination & en les ajoutant ensemble, on aura $a^{\frac{5}{6}}$, qui signifie que ces deux racines multipliées l'une par l'autre donnent la racine sixieme de la puissance 5 de la grandeur a, &c.

Calcul des exposans des puissances multinomes.

166. Il arrive quelquefois qu'au lieu de faire les puissances d'un multinome, on se contente d'écrire ce multinome avec une ligne par dessus qui couvre tous les termes; & à droite de cette ligne on met un nombre qui marque à quelle puissance on veut faire entendre que le multinome doit être élevé. Ainsi au lieu des puissances du binome $a+b$, on écrit $\overline{a+b}^1$, pour marquer la premiere puissance ou le binome lui-même; $\overline{a+b}^2$, pour marquer qu'il faut l'élever au quarré; $\overline{a+b}^3$, pour marquer qu'il faut en faire le cube; $\overline{a+b}^4$, pour signifier qu'on doit l'élever à la quatrieme puissance; & de même des autres.

167. Si l'on exprime donc les puissances d'un multinome ainsi que nous venons de le dire; il est visible qu'on peut appliquer à ces puissances les regles du calcul des exposans. Par exemple, pour

multiplier la puiſſance $\overline{a+b}^{2}$ du binome $a+b$, par la puiſſance $\overline{a+b}^{3}$ du même binome; on doit écrire $\overline{a+b}^{5}$, en ajoutant les deux expoſans enſemble. Pour diviſer la puiſſance $\overline{a+b}^{5}$, par la puiſſance $\overline{a+b}^{2}$; on écrira $\overline{a+b}^{3}$, en retranchant de l'expoſant 6 l'expoſant 3. Pour élever la puiſſance $\overline{a+b}^{3}$ à ſon quarré, on écrira $\overline{a+b}^{6}$; en multipliant l'expoſant 3 de la puiſſance, par l'expoſant 2 de celle à laquelle on veut l'élever. Pour extraire la racine quarrée de la puiſſance $\overline{a+b}^{6}$, on écrira $\overline{a+b}^{3}$, en diviſant l'expoſant 6, par l'expoſant 2 de la racine.

De même ſi on diviſe $\overline{a+b}^{1}$ par lui-même; on aura $\overline{a+b}^{0}=1$; & ſi on diviſe $\overline{a+b}^{3}$ par $\overline{a+b}^{4}$, on aura la puiſſance négative $\overline{a+b}^{-1}$; & ſi on diviſe $\overline{a+b}^{2}$ par $\overline{a+b}^{3}$, on aura la puiſſance négative $\overline{a+b}^{-1}$, &c.

Pour rendre poſitive la puiſſance négative $\overline{a+b}^{-2}$, on écrira $\frac{1}{\overline{b+b}^{2}}$; & au lieu de $3\times\overline{a+b}^{-3}$, on écrira $\frac{3}{\overline{a+b}^{3}}$. Mais il faut prendre garde que le coëfficient 3 doit être hors de la ligne écrite ſur le multinome; car alors l'expreſſion ſignifie 3 multiplié par la puiſſance négative $\overline{a+b}^{-3}$ de $a+b$: au lieu que ſi le chiffre étoit ſous la ligne en cette ſorte $\overline{3\,a+b}^{-3}$, cela ſignifieroit la puiſſance négative $\overline{3\,a+b}^{-3}$ du binome $3\,a+b$; & pour rendre cette puiſſance poſitive, on écriroit $\frac{1}{\overline{3a+b}^{3}}$ & il faut bien obſerver ceci. C'eſt pour cette raiſon que, pour marquer que le coëfficient eſt hors du ſigne, on met toûjours le ſigne $\times$ entre le coëfficient & la grandeur qui eſt ſous le ſigne.

Pour rendre négative la puiſſance $\overline{a+b}^{2}$, on écrit $\frac{1}{\overline{a+b}^{2}}$; & pour rendre négative $4\times\overline{a+b}^{3}$, on écrit $\frac{4}{\overline{a+b}^{3}}$, &c.

Pour exprimer la racine troiſieme de $\overline{a+b}^{1}$, on écrit $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}}$. De même la racine quatrieme de $\overline{a+b}^{3}$, ſe marque ainſi $\overline{a+b}^{\frac{3}{4}}$.

Si l'on veut comprendre aiſément la raiſon de tout ceci, il n'y a qu'à prendre une grandeur x, égale à $a+b$: & alors les puiſſances de $a+b$ ſeront x, x^{2}, x^{3}, x^{4}, x^{5}, &c, ſur leſquelles on pourra opérer par le calcul des expoſans. Mais après toutes ces opérations,

on pourra mettre $a + b$ au lieu de x; & on retrouvera ce qui vient d'être dit.

168. Voilà tout ce qu'il y a de plus eſſentiel à ſavoir touchant les opérations de l'algebre. Voyons à préſent quel eſt l'uſage que l'analyſe en fait pour la ſolution des problêmes numériques. Nous verrons dans la ſuite, comment on applique ce même calcul aux problêmes de la geometrie.

CHAPITRE VI.

DE L'ANALYSE.

169. ON parvient à la découverte de la vérité, par deux ſortes de voyes ou de méthodes, dont l'une s'appelle *Synthèſe*, & l'autre *Analyſe*.

170. La *Synthèſe*, autrement dite *Méthode de compoſition*, commence par les principes les plus ſimples, & s'éleve par dégrés juſqu'à ce qu'elle parvienne à la connoiſſance de ce qui fait l'objet de ſa recherche.

171. L'*Analyſe* au contraire ſuppoſe la choſe faite; & deſcend peu à peu en examinant toutes les conſéquences qui ſuivent de cette ſuppoſition, juſqu'à ce qu'elle ait trouvé d'une maniere claire & évidente la vérité qu'elle cherchoit.

172. On voit par-là que la ſynthèſe & l'analyſe différent entre elles, en ce que l'une commence par le détail, & finit par la compoſition; au lieu que l'autre deſcend de la compoſition au détail.

173. Les anciens employoient la ſynthèſe & l'analyſe de même que nous: mais comme les expreſſions dont ils ſe ſervoient étoient particulieres & uniquement propres pour chaque queſtion qu'ils vouloient réſoudre, il étoit rare qu'ils tiraſſent de leur analyſe les conſéquences générales que nous découvrons aujourd'hui par le moyen des expreſſions & des caracteres dont M. Deſcartes nous a appris à faire uſage.

174. Quoique la ſynthèſe & l'analyſe paroiſſent ſi différentes l'une de l'autre, cependant leurs principes ſont les mêmes; & ces principes, que je vais rapporter ici, ſont ſi ſimples, qu'on aura peine à croire, en les liſant, qu'ils aient pu conduire à la découverte de tant de belles vérités.

Principes ou Axiomes.

175. Le tout eſt plus grand que ſa partie; & il eſt égal à ſes parties priſes enſemble.

176.

176. Si une grandeur eſt parfaitement égale à une autre, on peut prendre indifféremment l'une pour l'autre. Si $a = b$, on peut prendre a au lieu de b ; & b au lieu de a.

177. Si deux grandeurs ne différent entre elles que d'une quantité infiniment petite & qu'on ne peut aſſigner, ces deux grandeurs peuvent être dites égales.

178. Il eſt impoſſible qu'une choſe ſoit en même tems d'une façon & qu'elle ne le ſoit pas.

179. Si deux grandeurs ſont égales chacune à une troiſieme, ces deux grandeurs ſont égales. Si $a = b$, & $c = b$; donc $a = c$.

180. Si à deux grandeurs égales on ajoute ou on retranche des grandeurs égales, les ſommes ou les reſtes ſeront encore des grandeurs égales : & ſi on leur ajoute ou ſi on leur retranche des grandeurs inégales, les ſommes ou les reſtes ſeront inégaux.

181. Si on multiplie ou ſi l'on diviſe deux grandeurs égales par des grandeurs égales, les produits ou les quotiens ſeront égaux ; & ſi on les multiplie, ou ſi on les diviſe par des grandeurs inégales, les produits ou les quotiens ſeront inégaux.

182. Si deux grandeurs ſont égales, leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, &c, ſeront égaux ; de même que leur double, leur triple, leur quadruple, &c ; de même encore que leurs quarrés, leurs cubes, leurs troiſiemes puiſſances, &c ; ou leurs racines ſeconde, troiſieme, quatrieme, &c.

De la nature des Problêmes, & de la façon de les réſoudre par l'analyſe.

183. Dans les problêmes ou dans les queſtions qu'on propoſe à réſoudre, il y a toujours des quantités connues & des quantités inconnues : ſi tout étoit connu, ce ne ſeroit plus une queſtion ; & ſi tout étoit inconnu, ce ſeroit de la magie qu'on propoſeroit. Ces problêmes peuvent être de deux eſpeces : les uns ſe nomment *déterminés ;* parce qu'ils ne ſont ſuſceptibles que d'une ſolution, ou du moins d'un très-petit nombre ; les autres ſe nomment *indéterminés ;* parce qu'on peut les réſoudre d'une infinité de façons.

184. Pour réſoudre les problêmes déterminés, voici comme on fait.

I°. On marque les grandeurs inconnues par les dernieres lettres de l'alphabet x, y, z ; & les connues par les premieres a, b, c, d, &c.

II°. On exprime toutes les conditions du problême ; c'eſt-à-dire, on fait autant d'équations particulieres, que le problême propoſé

renferme de conditions. Car chaque condition d'un problême eſt une équation ; comme on verra dans la ſuite.

III°. S'il y a pluſieurs inconnues, on prend la valeur de l'une de ces inconnues, par le moyen des équations qu'on a formées ; & l'on ſubſtitue la valeur de cette inconnue dans une autre équation : ce qui fait diſparoître cette inconnue. On fait la même choſe à l'égard d'une autre inconnue ; s'il en reſte plus d'une.

IV°. Quand il ne reſte plus qu'une inconnue, ſuppoſé que cela ſe puiſſe ; le problême eſt déterminé : & en ce cas, comme cette inconnue ſe trouve dans l'un des membres, & ſouvent même dans tous les deux, mêlée avec des quantités connues ; on fait en ſorte que cette quantité inconnue ſe trouve toute ſeule dans un membre de l'équation, & que dans l'autre membre il n'y ait que des quantités connues. Alors le problême eſt réſolu : puiſque la quantité inconnue ſe trouvant égale à une ou pluſieurs quantités connues, devient elle-même connue. Toute la difficulté conſiſte à faire en ſorte que la quantité inconnue puiſſe reſter ſeule dans un membre ; ce que l'on appelle *dégager l'inconnue* ; & nous dirons bientôt de quelle maniere cela ſe fait.

Que ſi on ne peut pas parvenir à faire qu'il ne reſte qu'une ſeule inconnue, ou ſi au contraire il n'en reſte plus du tout ; le problême eſt indéterminé, & l'on en trouvera la ſolution par les voies que nous enſeignerons dans la ſuite. Pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire touchant les problêmes déterminés & indéterminés, nous allons donner un exemple de chacun d'eux.

PROBLÊME DÉTERMINÉ. *On veut couper le nombre 24 en deux parties, dont l'une ſoit triple de l'autre : quelles ſont ces parties ?*

SOLUTION. Je nomme a le nombre 24 ; la premiere partie x ; & la ſeconde y : à cauſe que ces parties ſont inconnues. Or le problême renferme deux conditions : la premiere eſt que l'un des nombres inconnus ſoit triple de l'autre ; & par la ſeconde, on veut que les deux nombres pris enſemble ſoient égaux à 24.

Pour remplir la premiere condition, je dis : $x = 3y$: & pour remplir la ſeconde, je dis : $x + y = a$. Mais x étant égal à $3y$; je puis mettre $3y$ au lieu de x, dans l'équation $x + y = a$ (176) ; & par conſéquent $3y + y = a$. Je corrige l'expreſſion, & j'ai $4y = a$. Ainſi le problême eſt déterminé : puiſqu'il ne reſte qu'une inconnue. Or cette inconnue n'étant pas ſeule dans le premier membre de l'équation, puiſqu'elle eſt multipliée par 4 ; je la dégage en diſant : $4y$ eſt égal à a : donc en diviſant ces deux grandeurs par 4, les quotiens ſe-

ront égaux (180); & la grandeur y ſera ſeule dans le premier membre, à cauſe que la diviſon par 4 détruira ce qu'avoit fait la multiplication par 4. Ainſi j'aurai $y = \frac{1}{4} a$, ou $y = \frac{a}{4}$, & le problême ſera réſolu. Car mettant 24, au lieu de a; j'aurai $y = \frac{24}{4}$, ou $y = 6$; & $3y$ ou $x = 3 \times 6$, ou $x = 18$. Les deux nombres cherchés ſont donc 6 & 18, dont la ſomme fait 24; & dont l'un des deux, ſavoir 18, eſt triple de l'autre 6.

PROBLÊME INDÉTERMINÉ. *Deux hommes ont partagé une ſomme d'écus, & la part de l'un eſt triple de la part de l'autre : quelles ſont ces deux parts ?*

SOLUTION. Je nomme x la plus grande part, y la moindre, & z la ſomme des deux. Or par l'une des combinaiſons du problême, j'ai $x = 3y$: & par la ſeconde, j'ai $x + y = z$. Mettant donc $3y$, au lieu de x, dans cette derniere équation; j'ai $3y + y = z$, ou $4y = z$: & comme toutes les conditions du problême ſont remplies, il ne m'eſt pas poſſible de faire qu'il ne reſte qu'une ſeule inconnue. Par conſéquent le problême eſt indéterminé, c'eſt-à-dire ſuſceptible d'une infinité de ſolutions : & en effet, ſi je veux le réſoudre, je n'ai qu'à prendre pour y un nombre tel que je voudrai, par exemple 2; & multiplier enſuite ce nombre par 4, ce qui donnera $8 = 4y$: & par conſéquent $8 = z$, c'eſt-à-dire la ſomme cherchée ſera 8, & x étant égal à $3y$ ſera 3×2 ou 6. Ainſi les deux parts ſeront 6 & 2, dont la ſomme eſt 8 : & dont la premiere eſt le triple de la ſeconde.

Ce qui fait que ce problême eſt indéterminé, au lieu que le précédent eſt déterminé : c'eſt que dans le précédent on nous avoit donné une condition de plus, ſavoir que la ſomme des deux étoit égale à 24 : ce qui fait que les deux portions étoient déterminées par elles-mêmes, & qu'il ne nous étoit pas permis d'en déterminer une à notre gré. Mais cette condition ne ſe trouvant pas dans le ſecond problême, il a fallu néceſſairement déterminer l'une des grandeurs, pour avoir une ſomme déterminée : parce qu'il n'y a point de nombre tel qu'il ſoit, qui ajouté avec ſon triple, ne faſſe une ſomme totale. D'où il ſuit qu'en prenant pour l'une des grandeurs, tantôt 2, tantôt 3, tantôt 4, &c; on aura autant de différentes ſolutions du problême.

185 Le peu de connoiſſance de ce que nous venons de dire touchant les problêmes indéterminés, eſt la cauſe de l'erreur de bien des gens, qui en vous propoſant de ſemblables problêmes, s'imaginent qu'on

ne ſait pas les réſoudre lorſqu'on ne leur donne pas préciſément la ſolution qu'ils ont penſée. Par exemple, ſi après avoir répondu à quelqu'un qui m'auroit propoſé le problême indéterminé dont je viens de parler, que la premiere part étoit 6, la ſeconde 2, & la ſomme des deux 8; ce quelqu'un s'aviſoit de me dire que ma ſolution ne vaut rien, parce qu'il auroit penſé 9 pour la premiere part, & 3 pour la ſeconde, ce qui fait la ſomme 12; il ſe tromperoit, en ce qu'il ne s'appercevroit pas que le problême étant ſuſceptible de pluſieurs ſolutions, la mienne ſeroit auſſi bonne que la ſienne; & que parmi une infinité de nombres qui peuvent ſatisfaire à la queſtion, je ne puis trouver ceux qu'il a choiſi plutôt que d'autres, que par un pur haſard.

Maniere de dégager une inconnue qui ſe trouve ſeule dans une équation.

186. On dégage une inconnue, ou par l'addition, ou par la ſouſtraction, ou par la multiplication, ou par la diviſion, ou par l'élévation à quelque puiſſance, ou par l'extraction de quelque racine, & quelquefois par deux ou pluſieurs de ces opérations: c'eſt ce que nous verrons dans les regles ſuivantes.

187. On dégage une inconnue par *addition*; lorſque cette inconnue ne ſe trouvant que dans un ſeul membre d'une équation, y eſt jointe avec une grandeur connue négative. Car alors ajoutant à l'un & à l'autre membre la quantité connue avec le ſigne +, on trouve que l'inconnue reſte ſeule dans le membre où elle étoit.

Pour dégager l'inconnue x dans l'équation $x - a = b$; on ajoute a à l'un & à l'autre membre, ce qui n'altere pas l'égalité des deux membres (180): & l'on a $x - a + a = b + a$. Et comme dans le premier membre les grandeurs $-a$, $+a$, ſe détruiſent par des ſignes contraires; l'équation ſe réduit à celle-ci $x = b + a$, dans laquelle la grandeur x ſe trouvant ſeule de ſon côté, eſt par conſéquent égale à la ſomme $b + a$ des grandeurs connues b, a.

188. On dégage une inconnue par *ſouſtraction*; lorſque cette inconnue ne ſe trouvant que dans un ſeul membre y eſt jointe à une grandeur connue poſitive. Car alors ajoutant à l'un & à l'autre membre la quantité connue avec le ſigne —, il arrive qu'après la réduction des termes, l'inconnue x ſe trouve ſeule de ſon côté. Pour dégager x dans l'équation $x + a = b$, on retranche a de part & d'autre; ce qui donne $x + a - a = b - a$: or dans le premier membre, $+a - a$ ſe détruiſent: donc il reſte $x = b - a$.

189. *REMARQUE.* On voit par ces deux regles, que ſi dans une équation on fait paſſer une grandeur d'un membre à l'autre en changeant ſon ſigne; il y aura toujours égalité entre ſes deux membres. Car dans l'équation $x - a = b$, en donnant a de part & d'autre, nous avons eu l'équation $x = b + a$, dans laquelle la grandeur a a paſſé dans le ſecond membre avec le ſigne $+$; au lieu qu'elle étoit dans le premier avec le ſigne $-$. De même, en retranchant de l'un & l'autre membre $x + a = b$, la grandeur a; nous avons eu $x = b - a$: & dans cette équation la grandeur a a paſſé dans le ſecond membre avec le ſigne $-$; au lieu qu'elle étoit dans le premier avec le ſigne $+$.

190. On dégage l'inconnue par *multiplication;* lorſque cette inconnue ne ſe trouvant que dans un des membres de l'équation y eſt diviſée par une ou pluſieurs grandeurs connues. Alors on multiplie l'un & l'autre membre par le diviſeur; & la grandeur inconnue reſte ſeule de ſon côté.

Pour dégager x dans l'équation $\frac{x}{a} = b$; on multiplie de part & d'autre par a; ce qui donne $\frac{ax}{a}, = ab$: & en corrigeant l'expreſſion on a $x = ab$. De même pour dégager x dans l'équation $\frac{x}{a+b} = c$; on multiplie l'un & l'autre membre par $a+b$; & l'on a $\frac{ax+bx}{a+b} = ac + bc$: & en corrigeant l'expreſſion on a $x = ac + bc$.

191. On dégage l'inconnue par *diviſion;* lorſque cette inconnue étant dans un ſeul membre, s'y trouve multipliée par une ou par pluſieurs grandeurs. Car en ce cas, on diviſe l'un & l'autre membre par le multiplicateur. Dans l'équation $ax = b$, on diviſe les deux membres par a; & l'on trouve $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, ou $x = \frac{b}{a}$. De même dans l'équation $ax + bx = c$, on diviſe l'un & l'autre membre par $a+b$; parce que le premier terme ax du premier membre, eſt x multiplié par a; & le ſecond eſt x multiplié par b : ce qui eſt la même choſe que x multiplié par $a+b$; & l'on trouve $\frac{ax+bx}{a+b} = \frac{c}{a+b}$, ou $x = \frac{c}{a+b}$.

192. *REMARQUE.* Il faut bien prendre garde à ces expreſſions complexes, qui dans chacun de leurs termes contiennent une même grandeur. Car ces expreſſions marquent que cette grandeur a été multipliée par toutes les autres. Par exemple, l'expreſſion $ax + bx + cx + dx$, qui contient la grandeur x dans tous ſes termes, marque que cette grandeur x a été multipliée par $a + b + c + d$. Par conſéquent, ſi on diviſoit cette expreſſion par $a + b + c + d$; le quotient ſeroit la grandeur x toute ſeule.

De même l'expreſſion $aax + cdx - bbx$ marque que la grandeur x a été multipliée par $aa + cd - bb$; & que par conſéquent, ſi on diviſoit par $aa + cd - bb$, on auroit x au quotient. De même encore l'expreſſion $ax + bx - cx + x$, marque que la grandeur x a été multipliée par $a + b - c + 1$: car le coëfficient du dernier terme x eſt 1; puiſque x eſt la même choſe que $1x$. Si l'on diviſoit donc par $a + b - c + 1$, on auroit pour quotient x.

193. On dégage l'inconnue par l'*élévation à quelque puiſſance*; lorſque cette inconnue n'étant que dans un membre de l'équation, s'y trouve ſous un ſigne radical. Car alors on éleve l'un & l'autre membre à la puiſſance qui a le même expoſant que la racine. Pour dégager x dans l'équation $\sqrt{x} = a$, on éleve l'un & l'autre membre au quarré, & l'on a $x = a^2$ (182) : car $\sqrt{x}$ par $\sqrt{x}$ donne x; puiſque la racine, en ſe multipliant elle-même, produit le quarré. De même pour dégager x dans $\sqrt[3]{x} = b$, on éleve l'un & l'autre membre au cube; & l'on a $x = b^3$: car $\sqrt[3]{x}$ par $\sqrt[3]{x}$, donne $\sqrt[3]{xx}$; & $\sqrt[3]{xx}$ par $\sqrt[3]{x}$, donne $\sqrt[3]{x^3}$, ou x.

194. On dégage l'inconnue par l'*extraction d'une racine*; lorſque cette inconnue eſt élevée à quelque puiſſance dans le membre où elle ſe trouve : & en ce cas on extrait de l'un & l'autre membre, la racine du même degré que la puiſſance. Pour dégager x dans $x^3 = a^3$, on tire la racine cubique de part & d'autre; & l'on trouve $x = a$. De même pour dégager x dans $x^4 = abcc$, on tire la racine quatrieme de part & d'autre; & l'on a $x = \sqrt[4]{abcc}$: & ainſi des autres.

195. Enfin on dégage l'inconnue en employant deux ou pluſieurs de ces regles : ainſi que nous l'allons montrer par quelques exemples.

I°. Pour dégager l'inconnue dans $ax = bx + cd$; on fait paſſer la quantité bx du ſecond membre dans le premier, en retranchant bx de part & d'autre; ou ce qui revient au même, en changeant le ſigne $+$ en $-$: & l'on trouve $ax - bx = cd$. Enſuite on diviſe par $a - b$; & l'on trouve $x = \frac{cd}{a-b}$.

II°. Pour dégager l'inconnue dans $dx = x + ab$; on fait paſſer la quantité x, ou $1x$ du ſecond membre dans le premier; ce qui donne $dx - 1x = ab$: & diviſant de part & d'autre par $d - 1$, on trouve $x = \frac{ab}{d-1}$.

III°. Dans $ax + dx + cb = af$, on fait paſſer cb du premier dans le ſecond membre; ce qui donne $ax + dx = af - cb$: & diviſant enſuite de part & d'autre par $a + d$, on trouve $x = \frac{af-cb}{a+d}$.

IV°. Dans $\frac{a\sqrt{x}+d\sqrt{x}}{a+b}=c$, on multiplie de part & d'autre par $a+b$; ce qui donne $a\sqrt{x}+d\sqrt{x}=ac+bc$: enſuite on diviſe par $a+d$, & le quotient eſt $\sqrt{x}=\frac{ac+bc}{a+d}$: enfin on éleve tout au quarré ; ce qui donne $x=\frac{aacc+2accd+bbcc}{aa+2ad+dd}$.

V°. Dans $\frac{a\sqrt{x}}{b}-\frac{d\sqrt{x}}{c}=f$, on réduit les deux fractions du premier membre au même dénominateur ; & l'on a $\frac{ac\sqrt{x}-db\sqrt{x}}{bc}=f$: on multiplie de part & d'autre par bc, & le produit eſt $ac\sqrt{x}-db\sqrt{x}=fbc$: on diviſe tout par $ac-db$; & le quotient eſt $\sqrt{x}=\frac{fbc}{ac-bd}$: enfin on éleve tout au quarré ; & l'on trouve $x=\frac{ffbbcc}{aacc-2acdb+ddbb}$; & ainſi des autres.

EXEMPLES DES PROBLÊMES DÉTERMINÉS.

196. PROBLÊME I. *Trois officiers ont reçu chacun une gratification : celle du ſecond eſt double de celle du premier plus 6 livres, & celle du troiſieme eſt triple de celle du premier moins 2 livres ; & la ſomme totale eſt* 304 *livres : quelle eſt la gratification de chacun ?*

SOLUTION. Je nomme a la ſomme totale, & x la gratification du premier, parce qu'elle m'eſt inconnue. Or, par la premiere condition du problême, la gratification du ſecond eſt $2x+6$, & celle du troiſieme eſt $3x-2$ par la ſeconde condition. Mais, par la troiſieme, les trois gratifications priſes enſemble ſont égales à la grandeur a : donc j'ai cette équation $x+2x+6+3x-2=a$; & corrigeant l'expreſſion, j'ai $6x+4=a$. Je fais paſſer 4 du premier membre dans le ſecond : ce qui donne $6x=a-4$. Enfin diviſant par 6, je trouve $x=\frac{a-4}{6}$; & mettant la valeur de a, j'ai $x=\frac{304-4}{6}=\frac{300}{6}=50$.

Ainſi la gratification du premier eſt 50 : & mettant cette valeur dans les expreſſions $2x+6$, & $3x-2$ de la ſeconde & de la troiſieme ; je trouve $2x+6=2\times 50+6=100+6=106$, ſeconde gratification ; & $3x-2=3\times 50-2=150-2=148$, troiſieme gratification : & les trois nombres 50, 106, & 148, ſont en effet la ſomme 304.

197. PROBLÊME. *Deux bombardiers revenant de leurs batteries, l'un dit à l'autre : ſi tu avois tiré cinq coups de moins, & moi cinq coups de plus, j'aurois tiré deux fois plus de bombes que toi ; & ſi tu avois*

tiré trois coups de plus, & moi trois de moins, j'aurois tiré autant que toi : on demande quel eſt le nombre de coups que chacun d'eux a tiré?

Solution. Je nomme x le nombre de coups que le premier a tiré; & y le nombre de coups qu'a tiré le ſecond. Or par la premiere condition du problême, le nombre du premier, augmenté de cinq, eſt double du ſecond diminué de cinq. Ainſi $x+5$ eſt double de $y-5$, & par conſéquent multipliant $y-5$ par 2, ce qui fait $2y-10$, nous avons $x+5=2y-10$ premiere équation.

Par la ſeconde condition du problême, le nombre du premier diminué de trois eſt égal au nombre du ſecond augmenté de trois : donc $x-3=y+3$; ſeconde équation.

Je dégage x dans la premiere équation : ce qui donne $x=2y-15$. Je dégage de même x dans la ſeconde, & j'ai $x=y+6$. Ainſi j'ai deux valeurs de x, & par conſéquent ces deux valeurs ſont égales entre elles.

$x+5=2y-10$ ..... 1ere équation.
$x-3=y+3$ ..... 2e équation.

$x=2y-15$ ..... 1ere valeur de x.
$x=y+6$ ....., 2e valeur.

$2y-15=y+6$
$y-15=6$
$y=21$

$x=21+6=27$.

Je fais une équation de ces deux valeurs de x : ce qui donne $2y-15=y+6$. Je fais paſſer y du ſecond membre dans le premier; & j'ai $y-15=6$: & faiſant paſſer 15, du premier membre dans le ſecond; je trouve $y=21$.

Je mets cette valeur de y dans la valeur $y+6$ de x; & j'ai $x=21+6=27$. Ainſi le premier a tiré 27 coups, & l'autre 21. Et en effet, ſi j'ajoute 5 au premier, ce qui fait 32; & que je retranche 5 au ſecond, ce qui fait 16; on voit que 32 eſt double de 16; & ſi je retranche 3 du premier, ce qui fera 24; & que j'ajoute 3 au ſecond, ce qui fait auſſi 24; il eſt clair que les deux nombres ſeront égaux.

198. Problême III. *Trois hommes ont dépenſé une ſomme d'argent : le premier & le ſecond ont dépenſé à eux deux cinq livres plus que le troiſieme; le premier & le troiſieme en ont dépenſé à eux deux 15 de plus que le ſecond; & le ſecond & le troiſieme en ont dépenſé à eux deux 25 de plus que le premier : quelle eſt la ſomme totale & la dépenſe de chacun en particulier?*

Solution.

SOLUTION. Je nomme a l'excès des deux premiers ſur le troiſieme; b l'excès 15 du premier & du troiſieme ſur le ſecond; c l'excès 25 des deux derniers ſur le premier; x la dépenſe du premier; y celle du ſecond; & z celle du troiſieme.

Par la premiere condition, ſi le troiſieme avoit dépenſé 5 livres de plus, ſa dépenſe auroit été égale à la dépenſe du premier & à celle du ſecond priſes enſemble; donc j'ai cette premiere équation $x+y=z+a$: & faiſant le même raiſonnement à l'égard des deux autres conditions du problême, je trouve que la ſeconde donne l'équation $x+z=y+b$; & que la troiſieme donne celle-ci $z+y=x+c$.

$x+y=z+a$ ..... 1ere équation.
$x+z=y+b$ ..... 2e équation.
$z+y=x+c$ ..... 3e équation.

$2x+2y+2z=a+b+c+z+y+x.$
$x+y+z=a+b+c.$
$x+y+z=S$ ..... Dépenſe totale.

$x=S-y-z.$
$x=S-x-c.$
$2x=S-c.$
$x=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}c$ ..... Dépenſe du premier.

$y=S-x-z.$
$y=S-y-b.$
$2y=S-b.$
$y=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}b$ ..... Dépenſe du ſecond.

$z=S-x-y.$
$z=S-z-a.$
$2z=S-a.$
$z=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}a$ .... Dépenſe du troiſieme.

J'ajoute enſemble ces trois équations, en faiſant d'une part la ſomme des trois premiers membres; & de l'autre, la ſomme des trois ſeconds membres: ce qui donne $2x+2y+2z=a+b+c+z+y+x$: & faiſant paſſer $z+y+z$ du ſecond membre dans le premier, j'ai $x+y+z=a+b+c$; ce qui me fait voir que les trois dépenſes enſemble, c'eſt-à-dire la dépenſe totale eſt égale à la ſomme des trois excès $a+b+c$.

Pour abréger, je ſuppoſe $a+b+c=S$; & par conſéquent l'équation de la dépenſe totale eſt $x+y+z=S$. Or pour trouver la dépenſe du premier; je dégage x dans cette équation, en faiſant paſſer $y+z$ dans le ſecond membre: ce qui donne $x=S-y-z$. Mais par la troiſieme équation des trois premieres, j'ai $z+y=x+c$: donc $-z-y=-x-c$. Mettant donc $-x-c$, au lieu de $-z-y$, dans l'équation $x=S-y-z$; j'ai $x=S-x-c$: & faiſant paſſer x, du ſecond membre dans le premier; je trouve $2x=S-c$: & diviſant tout par 2, j'ai enfin $x=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}c$, qui eſt la dépenſe du premier.

Pour trouver celle du ſecond, je prends encore l'équation $x+y+z=S$ de la dépenſe totale : j'en dégage l'inconnue y; ce qui donne $y=S-x-z$. Mais par la ſeconde équation des trois premieres, j'ai $x+z=y+b$, ou $-x-z=-y-b$. Mettant donc $-y-b$, au lieu de $-x-z$, dans l'équation $y=S-x-z$; j'ai $y=S-y-b$: & faiſant paſſer y, du ſecond membre dans le premier, je trouve $2y=S-b$; & diviſant tout par 2, j'ai $y=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}b$ dépenſe du ſecond.

Pour trouver celle du troiſieme, je prends encore l'équation $x+y+z=S$ de la dépenſe totale : je dégage z; ce qui donne $z=S-x-y$. Mais par la premiere équation des trois premieres, j'ai $x+y=z+a$, ou $-x-y=-z-a$. Mettant donc la valeur $-z-a$, de $-x-y$, dans l'équation $z=S-x-y$; j'ai $z=S-z-a$: & faiſant paſſer z, du ſecond membre dans le premier, je trouve $2z=S-a$; & le tout diviſé par 2, donne $z=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}a$ dépenſe du troiſieme.

Je mets les valeurs des lettres a, b, c, dans l'équation de la ſomme totale, & dans celles des dépenſes particulieres; & je trouve que la dépenſe totale eſt 45 : que celle du premier eſt $22\frac{1}{2}-12\frac{1}{2}$; c'eſt-à-dire 10 : que celle du ſecond eſt $22\frac{1}{2}-7\frac{1}{2}$; c'eſt-à-dire 15 : & que celle du troiſieme eſt $22\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 20. Et il eſt aiſé de voir que ces trois nombres 10, 15, 20, rempliſſent les conditions du problême. Car la ſomme 25 des deux premiers, ſurpaſſe le troiſieme de 5 : la ſomme 30 du premier & du troiſieme, ſurpaſſe le ſecond de 15; & la ſomme 35 des deux derniers, ſurpaſſe le premier de 25 : ce qui étoit propoſé.

199. PROBLÊME IV. *Deux ſoldats ont tué* 80 *hommes dans une bataille; & l'un des deux en a tué* 20 *plus que l'autre : combien chacun en a-t-il tué?*

SOLUTION. Je nomme a la ſomme 80; d la différence 20; x le nombre d'hommes que le premier a tués, que je ſuppoſe être le plus grand; & z le nombre d'hommes qui ont été tués par l'autre : donc $x+z=a$. Et ſi du plus grand je retranche le moindre, ce qui fait $x-z$; ce reſte ſera égal à la différence d, & par conſéquent $x-z=d$.

$x+z=a$ ..... 1ere équation.
$x=a-z$ ..... 1ere valeur de x.
$x-z=d$ ..... 2e équation.
$x=d+z$ ..... 2e valeur de x.

$a-z=d+z$.
$a-d=2z$.
$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=z$.
$x=d+z=d+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}d$.

J'ai donc deux équations $x + z = a$, & $x - z = d$. Je dégage x dans la premiere : ce qui donne $x = a - z$, premiere valeur de x.

Je dégage de même x dans la ſeconde équation ; & j'ai $x = d + z$ ſeconde valeur de x.

Je fais une équation de ces deux valeurs de x ; ce qui donne $a - z = d + z$: & faiſant paſſer z, du premier membre dans le ſecond ; & d, du ſecond dans le premier ; j'ai $a - d = 2z$: & diviſant tout par 2, je trouve $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d = z$: c'eſt-à-dire le plus petit nombre eſt égal à la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence.

Je mets cette valeur de z dans la ſeconde valeur de x, qui eſt $x = d + z$; & je trouve $x = d + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$: c'eſt-à-dire le plus grand nombre eſt égal à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence.

Mettant donc les valeurs de a & de b, je trouve $z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 40 - 10 = 30$; & $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 40 + 10 = 50$: & ces deux nombres 30 & 50 font enſemble 80 ; & la différence du grand au petit eſt 20 : ce qui étoit propoſé.

Or comme les lettres a & b peuvent ſignifier tel autre nombre que l'on voudra, il eſt viſible que la ſolution que l'on vient de trouver eſt générale, & que par conſéquent on en peut tirer la regle ou le théorême ſuivant.

200. THÉORÊME tiré de l'exemple précédent. *La ſomme de deux grandeurs étant connue, & leur différence auſſi ; la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence, eſt égale à la plus grande ; & la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence, eſt égale à la moindre.*

201. Il eſt clair que ſi dans la ſolution des problêmes on met toujours les lettres a, b, c, &c, au lieu des grandeurs connues ; les ſolutions que l'on trouvera ſeront toujours des théorêmes généraux pour ces ſortes de cas : comme on vient de le voir. Et voilà quel eſt l'avantage de l'analyſe d'aujourd'hui ſur celle des anciens, qui faute d'avoir des expreſſions générales pour marquer les grandeurs connues & les grandeurs inconnues, ne trouvoient jamais que des ſolutions particulieres pour les cas particuliers qu'ils avoient à réſoudre : ce qui les obligeoit de recommencer de nouveau, lorſque les grandeurs compriſes dans un problême n'étoient pas préciſément les mêmes qui ſe trouvoient compriſes dans un autre problême de même eſpece. De plus, il arrive ſouvent qu'un théorême découvert par notre méthode, nous conduit avec facilité à la découverte d'une infinité de problêmes qui ne ſeroient pas aiſés à réſoudre ſans ce ſecours : c'eſt

ce qu'on va voir dans l'exemple ſuivant, où nous allons mettre en uſage le théorême précédent.

202. PROBLÊME V. *Deux joueurs ont gagné une ſomme d'écus : le gain du premier multiplié par le gain du ſecond fait* 96 ; *& ſi l'on fait les quarrés des deux gains, ces deux quarrés ajoutés enſemble feront* 208 : *quel eſt le gain de chacun d'eux ?*

SOLUTION. Comme je ne connois ni la ſomme gagnée, ni la différence des deux gains ; je nomme la ſomme gagnée $2x$, & la différence des deux gains $2z$; & je me ſers de ces expreſſions, afin de pouvoir prendre la moitié de la ſomme & la moitié de la différence ſans fraction. Je nomme auſſi le produit 96 des deux gains a, & la ſomme 208 des quarrés b.

$x+z$. Gain du premier.
$x-z$. Gain du ſecond.

$xx+xz-zz$.
$-xz$

$xx-zz$. Produit des deux gains.
$xx-zz=a$ 1ere équation.
$xx+2xz+zz$. Quarré du premier gain.
$xx-2xz+zz$. Quarré du ſecond.

$2xx+2zz=b$ 2e équation.
$xx=a+zz$ 1ere valeur de xx.
$xx=\frac{b}{2}-zz$. 2e valeur de xx.

$a+zz=\frac{1}{2}b-zz$.
$2zz=\frac{1}{2}b-a$.
$zz=\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a$.
$z=\sqrt{\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a}$. Gain du premier.
$xx=a+\frac{b}{4}-\frac{1}{2}a=\frac{b}{4}+\frac{1}{2}a$.
$x=\sqrt{\frac{b}{4}+\frac{1}{2}a}$. Gain du ſecond.

Par le théorême précédent le gain du premier eſt $x+z$; & celui du ſecond eſt $x-z$. Or par la premiere condition du problême, le produit de ces deux gains multipliés l'un par l'autre eſt égal à $96=a$: faiſant donc ce produit j'ai $xx-zz=a$.

Je fais les quarrés des deux gains ; & les ajoutant enſemble, la ſomme eſt $2xx+2zz$, laquelle eſt égale à $208=b$ par la ſeconde condition du problême.

Je prends dans la premiere équation la valeur de xx, en faiſant paſſer zz dans le ſecond membre ; & j'ai $xx=a+zz$. Je prends de même la valeur de xx dans la ſeconde équation, en faiſant d'abord paſſer $2zz$ dans le ſecond membre ; ce qui donne $2xx=b-2zz$; & je diviſe enſuite le tout par 2 ; ce qui donne $xx=\frac{b}{2}-zz$.

Je fais une équation de ces deux valeurs de xx ; & j'ai $a + zz = \frac{1}{2}b - zz$. Je fais paſſer zz, du ſecond membre dans le premier ; & a, du premier dans le ſecond ; & je trouve $2zz = \frac{1}{2}b - a$: & diviſant tout par 2, j'ai $zz = \frac{b}{4} - \frac{1}{2}a$. Enfin tirant la racine quarrée de part & d'autre, je trouve $z = \sqrt{\frac{b}{4} - \frac{1}{2}a}$.

Je mets la valeur $\frac{b}{4} - \frac{1}{2}a$ de zz, dans la premiere valeur de xx qui eſt $xx = a + zz$; & j'ai $xx = a + \frac{b}{4} - \frac{1}{2}a$: & corrigeant l'expreſſion, je trouve $xx + \frac{b}{4} + \frac{1}{2}a$: & tirant la racine quarrée de part & d'autre, j'ai $x = \sqrt{\frac{b}{4} + \frac{1}{2}a}$.

Je mets les valeurs de a & b dans les valeurs trouvées de x & z ; & je trouve $z = \sqrt{\frac{208}{4} - \frac{96}{2}} = \sqrt{52 - 48} = \sqrt{4} = 2$: & $x = \sqrt{\frac{208}{4} + \frac{96}{2}} = \sqrt{52 + 48} = \sqrt{100} = 10$. Donc le premier gain $x + z = 10 + 2 = 12$; & le ſecond $x - z = 10 - 2 = 8$. Et il eſt clair que ces deux gains 12 & 8, multipliés l'un par l'autre, font 96 ; & que leurs quarrés 144 & 64, ajoutés enſemble font 208 : ce qui étoit propoſé.

203. On trouvera grand nombre d'autres exemples de problêmes déterminés dans les chapitres ſuivans : c'eſt pourquoi je n'en dirai pas davantage pour le préſent, de peur d'être trop long.

ÉQUATIONS COMPOSÉES QUI NE CONTIENNENT QU'UNE INCONNUE.

204. On nomme *Equations compoſées*, toutes les équations où l'inconnue ſe trouve élevée à différens degrés dans deux ou pluſieurs termes. $xx + ax = bc$ eſt une équation compoſée : parce que l'inconnue eſt au ſecond degré dans un terme & au premier dans un autre. De même $x^3 + ax + bx = abb$ eſt une équation compoſée ; & ainſi des autres.

205. Toute équation compoſée prend le nom du plus haut degré où l'inconnue ſe trouve dans quelqu'un de ſes termes. L'équation $xx + ax = bc$, eſt du ſecond degré : parce que le plus haut degré où l'inconnue x ſe trouve, eſt le ſecond : l'équation $x^3 + ax^2 + bx = abb$, eſt du troiſieme degré, &c.

206. Il n'eſt pas poſſible dans les équations compoſées, de faire que l'inconnue ſe trouve ſeule dans un membre de l'équation & au premier degré, en n'employant que les moyens dont nous nous ſom-

mes ſervis pour les equations ſimples. Qu'on faſſe paſſer d'un membre à l'autre, qu'on multiplie, qu'on diviſe, qu'on éleve à des puiſſances plus élevées, ou qu'on tire des racines, tant qu'on voudra; on n'y parviendra jamais : ainſi qu'on pourra le voir, ſi on veut en faire l'expérience. C'eſt pourquoi il a fallu néceſſairement chercher d'autres méthodes, pour réſoudre ces équations.

207. Une Equation compoſée eſt dite *ordonnée*, quand elle commence par le plus haut degré de l'inconnue ; & que les autres degrés vont par ordre dans les termes ſuivans. $x^4 + bx^3 + ccx^2 + dx = fgg$ eſt une équation ordonnée ; & elle ceſſeroit de l'être, ſi l'on dérangeoit quelqu'un de ſes termes. Mais ſi quelqu'un de ſes termes manquoit comme dans $x^4 + aax^2 + bccx = fgg$, où le ſecond terme qui devroit contenir x^3 manque, elle ne ceſſeroit pas d'être ordonnée ; pourvu que les autres termes fuſſent écrits ſelon leurs rangs.

208. Il arrive ſouvent qu'après avoir ordonné une équation, on fait paſſer dans le premier membre toutes les grandeurs qui ſont dans le ſecond ; & alors le ſecond membre devient égal à zéro : ce que l'on fait pour pouvoir réſoudre plus aiſément l'équation. Ainſi au lieu de $z^3 + azz + bbz = ccd$, on écrit $z^3 + azz + bbz - ccd = 0$.

209. La précaution commune dont on ſe ſert dans les différentes méthodes que l'on emploie pour réſoudre les équations compoſées, eſt de faire en ſorte que la plus haute puiſſance de l'inconnue ne ſoit ni multipliée ni diviſée par quelqu'autre grandeur. C'eſt pourquoi, ſi l'équation eſt $axx + 2bx = dd$; on diviſe tout par a : afin d'avoir l'équation $xx + \frac{2bx}{a} = \frac{dd}{a}$, dans laquelle la puiſſance xx n'eſt ni multipliée ni diviſée par aucune autre grandeur. De même, ſi l'équation eſt $\frac{xx}{a} + 2bx = dd$; on multiplie tout par a : pour avoir l'équation $xx + 2abx = add$; & ainſi des autres.

210. On nomme *grandeur imaginaire*, une grandeur qui eſt impoſſible. Par exemple la grandeur $\sqrt{-a}$ eſt imaginaire : parce qu'il n'eſt pas poſſible de trouver une grandeur réelle, commenſurable ou incommenſurable, qui puiſſe produire le quarré $-a$. Car la racine de ce quarré auroit ou le ſigne $+$, ou le ſigne $-$: or ſi elle avoit le ſigne $+$, elle produiroit $+a$ au lieu de $-a$, en ſe multipliant elle-même ; puiſque $+$ par $+$ donne $+$: & ſi elle avoit le ſigne $-$, elle produroit auſſi $+a$, au lieu de $-a$; puiſque $-$ par $-$ donne $+$. Ainſi toutes les fois que ſous le ſigne radical $\sqrt{}$, ou $\sqrt[2]{}$, il ſe trouve une grandeur négative ; cette racine eſt imaginaire.

On doit dire la même choſe de tous les ſignes radicaux dont l'ex-

poſant eſt un nombre pair ; & dont la grandeur qui eſt ſous le ſigne, eſt une grandeur négative. Par exemple $\sqrt[4]{-a}$, eſt une grandeur imaginaire. Car ſi $-a$ étoit une quatrieme puiſſance poſſible, ſa racine auroit ſans doute ou le ſigne $+$, ou le ſigne $-$. Si elle avoit le ſigne $+$; il eſt ſûr qu'en ſe multipliant trois fois ſucceſſivement, elle donneroit $+a$ au lieu de $-a$ pour ſa quatrieme puiſſance. Et ſi elle avoit le ſigne $-$; elle donneroit d'abord pour le produit de ſa premiere multiplication, le ſigne $+$; à cauſe que $-$ par $-$ donne $+$: ainſi ſon quarré auroit le ſigne $+$. Or ce quarré multiplié par ſa racine donneroit $-$ au produit ; puiſque $+$ par $-$ donne $-$: & par conſéquent le cube de la racine auroit le ſigne $-$. Enfin ce cube, multiplié par la racine, donneroit $+$ au produit : ainſi la quatrieme puiſſance de la racine ſeroit $+a$ au lieu de $-a$.

Mais ſi le ſigne radical avoit un expoſant impair, & que la grandeur qui eſt ſous le ſigne eût le ſigne $-$; *cette racine ſeroit fauſſe*, mais elle ne ſeroit pas impoſſible. Car nous venons de voir qu'une racine négative, élevée au cube, donne un cube négatif : & il eſt aiſé de prouver que ſi on l'élevoit à la cinquieme puiſſance, à la ſeptieme, &c ; ces puiſſances ſeroient des grandeurs négatives, mais non pas imaginaires.

211. Dans toutes les équations compoſées, *l'inconnue a autant de valeurs que l'équation de degrés* ; ce que nous expliquerons bientôt, en examinant les formations de ces équations : & ces valeurs ſont ou toutes poſitives, ou toutes négatives, ou les unes réelles & les autres négatives, commenſurables ou incommenſurables, ou enfin les unes négatives ou poſitives, & les autres imaginaires : & dans tous ces cas le problême peut toujours être bien propoſé ; puiſqu'il y a toujours quelque valeur de x qui eſt une grandeur poſſible. Mais ſi x n'avoit que des valeurs imaginaires ; le problême renfermeroit une manifeſte contradiction. Il arrive ſouvent que parmi les différentes valeurs de x, il s'en trouve ou quelques-unes d'égales, ou que quelquefois toutes le ſont.

FORMATION DES ÉQUATIONS COMPOSÉES.

212. Je ſuppoſe d'une part $x = a$; & de l'autre $x = b$; & dans ces deux égalités, je fais paſſer dans le premier membre la grandeur qui eſt dans le ſecond : ce qui me donne $x - a = 0$; & $x - b = 0$. Je multiplie ces deux équations l'une par l'autre ; c'eſt-à-dire le premier

$$\begin{array}{r} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline \text{A. } xx - ax + ab = 0. \\ \quad - bx \end{array}$$

membre de l'une par le premier membre de l'autre, & le ſecond par le ſecond : ce qui me donne l'équation A qu'on voit ici, dont les deux produiſans ſont $x - a = 0$; & $x - b = 0$. Ainſi pour décompoſer cette équation, il eſt viſible qu'il faut retrouver les deux produiſans $x - a = 0$; & $x - b = 0$; par le moyen deſquels on trouvera aiſément que les valeurs de x étant a & b, cette inconnue a par conſéquent autant de valeurs que l'équation a de degrés.

213. Les produiſans d'une équation compoſée ſe nomment *racines de l'équation :* ſoit qu'ils ſoient égaux, ou qu'ils ne le ſoient pas. Ainſi quand on dit *tirer les racines d'une équation*, c'eſt trouver les différentes grandeurs qui l'ont produite.

214. Il faut obſerver qui ſi dans une équation compoſée, il ſe trouve pluſieurs termes dans leſquels l'inconnue ſoit à un même degré, ces termes n'en font qu'un, & on les écrit les uns ſous les autres. Dans l'équation A, les termes $- ax - bx$ ne font qu'un ſeul terme.

215. Si j'avois ſuppoſé $x = a$, & $x = - b$, & qu'après avoir fait paſſer les termes des ſeconds membres dans les premiers, ce qui auroit donné $x - a = 0$, & $x + b = 0$, j'euſſe enſuite multiplié ces deux équations l'une par l'autre ; il eſt viſible que l'équation compoſée qui en ſeroit provenue, auroit eu pour produiſans $x - a = 0$, qui eſt une grandeur poſitive, puiſqu'elle donne $x = a$; & $x + b = 0$, qui eſt une grandeur négative. De même ſi j'avois fait $x = - a$, & $x = - b$; l'équation compoſée qui en ſeroit provenue auroit eu deux racines négatives. Enfin ſi j'avois ſuppoſé $x = \sqrt{-b}$, & $x = a$, l'équation compoſée auroit eu une racine imaginaire & une poſitive : ce qui peut ſe combiner de pluſieurs autres façons.

216. Maintenant je ſuppoſe $x = a$, $x = b$, $x = c$: & en tranſpoſant, j'ai $x - a = 0$; $x - b = 0$; $x - c = 0$. Et multipliant ces équations les unes par les autres, le produit eſt l'équation B du troiſieme degré, dont les racines ſont $x + a = 0$; $x - b = 0$; $x - c = 0$: & par conſéquent cette équation a autans de racines qu'elle a de degrés. Il eſt évident que ces racines peuvent varier ſelon que je ſuppoſerai x égal à des grandeurs, les unes négatives, les autres poſitives, & les autres imaginaires.

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax + ab = 0 \\ \quad - bx \\ \hline x - c = 0 \\ \hline \text{B.}\quad x^3 - ax^2 + abx - abc = 0. \\ \quad - bx^2 + acx \\ \quad - cx^2 + cbx \end{array}$$

Suppoſons encore $x - a = 0$; $x - b = 0$; $x - c = 0$; & $x - d = 0$;

$= 0$: Je multiplie ces quatre équations les unes par les autres : le produit eſt l'équation D du quatrieme degré, dont les racines ſont $x - a = 0$; $x - b = 0$; $x - c = 0$; & $x - d = 0$.

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax + ab \\ \quad - bx \\ \hline x - c = 0 \\ \hline x^3 - ax^2 + abx - abc = 0 \\ \quad - bx^2 + acx \\ \quad - cx^2 + cbx \\ \hline x - d = 0 \\ \hline \text{D. } x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0. \\ \quad - bx^3 + acx^2 - abdx \\ \quad - cx^3 + cbx^2 - acdx \\ \quad - dx^3 + adx^2 - cbdx \\ \quad + bdx^2 \\ \quad + cdx^2 \end{array}$$

217. Ce qu'il faut obſerver dans la formation des ces équations, c'eſt,

I°. Que le coëfficient du ſecond terme eſt toujours égal à la ſomme des racines de l'équation. Ainſi dans l'équation A, le coëfficient du ſecond terme $-ax - bx$, eſt la ſomme $a + b$ des racines a, b, de l'équation. De même dans l'équation B, le coëfficient du ſecond terme $-ax^2 - bx^2 + cx^2$, eſt la ſomme $a + b + c$ des trois racines a, b, c. On peut obſerver la même choſe dans l'équation D, & dans les équations des degrés plus élevés.

II°. Que dans les équations qui ont plus de trois termes, comme l'équation B & l'équation D, le coëfficient du troiſieme terme comprend les produits des racines multipliées deux à deux de toutes les façons qu'elles peuvent ſe multiplier. Par exemple dans l'équation B, dont les trois racines ſont a, b, c ; le coëfficient $ab + ac + cb$ du troiſieme terme, comprend les produits des trois racines multipliées deux à deux ; & la même choſe peut s'obſerver dans l'équation D.

III°. Que dans les équations qui ont plus de quatre termes ; comme l'équation D, le coëfficient du quatrieme terme contient les produits abc, abd, acd, cbd, des quatre racines multipliées trois à trois : & on trouveroit de même que ſi l'équation avoit plus de cinq termes, le coëfficient du cinquieme terme contiendroit les produits des racines multipliées quatre à quatre, & ainſi de ſuite.

IV°. Enfin, que dans toutes les équations ; le dernier terme eſt une quantité toute connue, qui eſt le produit de toutes les racines. Ainſi dans l'équation A, le dernier terme ab eſt le produit des deux

racines a, b: dans l'équation B, le dernier terme abc eſt le produit des trois racines a, b, c; & de même des autres.

218. Or delà il ſuit que ſi le ſecond terme manque dans une équation; il faut néceſſairement qu'il y ait des racines poſitives & des racines négatives qui s'entre-détruiſent, & qui par conſéquent rendent le ſecond terme égal à zéro. De même, ſi le troiſieme terme manque dans celles qui ont plus de trois termes, il faut qu'il y ait des produits des racines négatifs, & d'autres produits poſitifs, qui s'entre-détruiſent: & la même choſe doit ſe dire des autres équations plus élevées, où il manqueroit quelques termes.

219. M. Deſcartes a obſervé, 1°. que ſi toutes les racines d'une équation ſont poſitives; les termes de l'équation ont alternativement le ſigne + & le ſigne —: comme on le voit dans les trois équations ci-deſſus A, B, D. 2°. Que ſi elles ſont toutes négatives, tous les termes auront le ſigne +: ce qui eſt évident: puiſque tous les produiſans auront le ſigne +. 3°. Enfin, que s'il s'en trouve de négatives & de poſitives: tous les termes de l'équation n'auront pas alternativement le ſigne + & le ſigne —: mais que cette alternative ſera interrompue autant de fois qu'il y a de racines négatives: & delà on peut connoître aiſément combien il y a de racines poſitives & de négatives dans une équation.

Ce que M. Deſcartes aſſure ici, peut ſe démontrer aiſément; ſi l'on veut ſe donner la peine de mettre dans les produiſans, des chiffres au lieu des grandeurs connues. Suppoſons, par exemple, $x-2=0$, $x-3=0$, $x+4=0$: le produit de ces trois équations ſera une équation du troiſieme degré, dans laquelle l'expreſſion étant corrigée, on aura $x^3-1xx-14x+24=0$. Or l'ordre alternatif des ſignes eſt ici interrompu une fois: donc il y a une racine négative & les deux autres ſont poſitives. Et en effet $x+4=0$ eſt négative; puiſqu'elle donne $x=-4$: & les deux autres $x-2=0$, $x-3=0$, ſont poſitives; à cauſe qu'elles donnent $x=2$, & $x=3$: & on trouvera la même choſe dans tous les autres cas.

$$\begin{array}{l} x-2=0 \\ x-3=0 \\ \hline xx-2x+6=0. \\ \quad -3x \\ \hline x+4=0 \\ \hline x^3-2xx+6x+24=0. \\ \quad -3xx-8x \\ \quad +4xx-12x \\ \hline x^3-1xx-14x-24=0. \end{array}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

220. Quand le ſecond terme d'une équation du ſecond degré manque, la réſolution en eſt facile: puiſqu'il n'y a qu'à faire paſſer

la grandeur connue dans le second membre, supposé qu'elle n'y soit pas : & ensuite extraire la racine quarrée de part & d'autre. Ainsi pour résoudre l'équation $xx - bb = 0$, on fait passer bb dans le second membre : ce qui donne $xx = bb$: & tirant la racine quarrée on a $x = b$. Que si l'équation étoit $xx + bb = 0$, ou $xx = -bb$; les deux racines seroient imaginaires : parce qu'il n'y a point de grandeur positive ou négative qui puisse être la racine du quarré $-bb$. (210.)

221. Quand l'équation a tous ses termes, on la résout en se rappellant que le quarré de tout binome $x + b$ contient dans son premier terme, le quarré du premier terme x du binome, deux fois le premier terme x multiplié par le second, ou ce qui revient au même, deux fois le second, ou le double du second multiplié par le premier, & enfin le quarré du second (97). D'où il suit que si l'on a les deux premiers termes d'un tel quarré, on pourra aisément trouver le troisieme. Par exemple, si on a les deux premiers termes $xx + 2ax$ d'un quarré; on verra sans peine que le second terme $2ax$, est le produit du premier terme x de la racine multiplié par le double du second terme : & par conséquent prenant la moitié du coëfficiant $2a$, laquelle est a, on fera son quarré aa; & ce quarré étant ajouté aux deux termes, on aura $xx + 2ax + aa$ qui sera un quarré parfait. Cela posé,

Soit l'équation $xx - 2ax + bb = 0$. Je fais passer bb dans le second membre; & $xx - 2ax = -bb$. Je vois que le premier membre seroit un quarré parfait, si j'y ajoutois le quarré de la moitié de son coëfficient : or cette moitié est a, & son quarré est aa; c'est pourquoi j'ajoute aa à l'un & l'autre membre, pour conserver l'égalité; & je trouve $xx - 2ax + aa = aa - bb$. Je tire la racine quarrée de part & d'autre. Mais comme la racine quarrée du premier membre est ou $x - a$, ou $a - x$; car l'une & l'autre de ces racines multipliée par elle-même donne le premier membre $xx - 2ax + aa$; j'ai donc $x - a = \sqrt{aa - bb}$, ou $a - x = \sqrt{aa - bb}$. C'est pourquoi si dans la premiere de ces deux équations je fais passer a, du premier membre dans le second; j'aurai $x = a + \sqrt{aa - bb}$ qui sera l'une des racines de l'équation proposée $xx - 2ax = -bb$: & si dans l'autre équation $a - x = \sqrt{aa - bb}$, je fais passer x du premier membre dans le second; & $\sqrt{aa - bb}$ du second dans le premier; j'aurai $a - \sqrt{aa - bb} = x$, qui sera la seconde racine de l'équation proposée. Voici quelques exemples ou quelques problêmes, sur les équations du second degré.

222. PROBLÊME I. *Deux hommes ont un certain nombre d'écus : le premier en a* 10, *& ſi l'on multiplie la part du premier par celle du ſecond, & qu'on retranche le produit de la ſomme des quarrés des deux parts, le reſte eſt* 84 : *quelle eſt la part de chacun d'eux ?*

SOLUTION. Je nomme a la part 10 du premier ; b le reſte 84 ; & x la part du ſecond : donc la ſomme des quarrés des deux parts eſt $xx + aa$; & le produit de la premiere par la ſeconde eſt ax : retranchant donc ax de $xx + aa$: le reſte eſt $xx - ax + aa$, lequel eſt égal à b. Ainſi j'ai l'équation $xx - ax + aa = b$.

Je fais paſſer aa dans le ſecond membre : ce qui donne $xx - ax = b - aa$: J'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{1}{4}aa$ de la moitié du coëfficient a : afin de rendre le premier membre un quarré parfait. Enfin extrayant la racine quarrée de part & d'autre, je trouve $x - \frac{1}{2}a$, ou $\frac{1}{2}a - x = \sqrt{b - \frac{3}{4}aa}$: & dégageant x dans l'un & l'autre de ces deux expreſſions, je trouve pour la premiere racine $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{b - \frac{3}{4}aa}$; & pour la ſeconde $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{-b - \frac{3}{4}aa}$: & mettant les valeurs des lettres connues ; les deux racines ſont $x = 8$, & $x = 2$. Ces deux racines ſont poſitives : ainſi l'équation a deux ſolutions réelles & poſitives.

$$xx - ax + aa = b$$
$$xx - ax = b - aa$$
$$xx - ax + \tfrac{1}{4}aa = b - \tfrac{3}{4}aa$$
$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{b - \tfrac{3}{4}aa}$$
$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}a + \sqrt{b - \frac{3}{4}aa} \\ \frac{1}{2}a - \sqrt{b - \frac{3}{4}aa} \end{cases}$$
$$x = 5 + \sqrt{84 - 75} = 5 + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$$
$$x = 5 - \sqrt{84 - 75} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

En effet, ſi je ſuppoſe que le ſecond ait 8 écus ; cette part, multipliée par celle du premier qui eſt 10, donnera le produit 80 ; lequel étant retranché de la ſomme 164 des quarrés des deux parts, le reſte eſt 84, ainſi qu'il étoit propoſé : & ſi je ſuppoſe que la part du premier ſoit égale à 2, le produit de 2 par 10 ſera 20, lequel retranché de la ſomme 104 des quarrés, donnera 84 de même qu'auparavant.

Si dans l'équation $xx - ax + aa = b$, nous avions fait paſſer b dans le premier membre : nous aurions eu $xx - ax + aa - b = 0$: & comme b eſt moindre que aa, le dernier terme auroit eu le ſigne $+$. Ainſi l'ordre alternatif des ſignes ſe trouvant dans cette équation, cela nous auroit fait juger que les deux racines étoient poſitives : ce que nous venons de vérifier.

223. PROBLÊME II. *On a envoyé trois petits détachemens : le premier eſt de* 10 *hommes, le ſecond en a* 2 *plus que le troiſieme ; & ſi l'on fait les quarrés des nombres d'hommes de chaque détachement, le quarré du premier ſera égal à la ſomme des quarrés des deux autres : combien y a-t'il d'hommes dans le ſecond & dans le troiſieme détachement.*

SOLUTION. Je nomme a le nombre d'hommes du premier détachement ; b la différence 2 du ſecond au troiſieme ; & x le troiſieme : donc par la premiere condition j'ai $x+b$ pour le nombre du ſecond détachement. Je fais les quarrés aa, xx, $xx+2bx+bb$ de ces trois nombres ; & par la ſeconde condition, la ſomme des deux derniers eſt égale au premier : ce qui donne $2xx+2bx+bb=aa$.

$$2xx+2bx+bb=aa$$
$$xx+bx+\frac{bb}{2}=\frac{aa}{2}$$
$$xx+bx=\frac{aa}{2}-\frac{bb}{2}$$
$$xx+bx+\frac{bb}{4}=\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}$$
$$\left.\begin{matrix}x+\frac{b}{2}\\ \frac{b}{2}+x\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$$
$$x=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}\text{ premiere racine.}$$
$$x=-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}\text{ ſeconde racine.}$$
$$x+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}=0$$
$$x+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}=0$$

$$xx+\frac{bx}{2}-x\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$$
$$+\frac{bx}{2}\qquad+\frac{bb}{4}-\frac{b}{2}\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$$
$$+x\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}\qquad+\frac{b}{2}\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}-\frac{aa}{2}+\frac{bb}{4}$$

$$xx+bx+\frac{2bb}{4}-\frac{aa}{2}-8$$
$$\text{ou } xx+bx+\frac{bb}{2}-\frac{aa}{2}=0$$

Je diviſe tout par 2 ; pour dégager le premier terme de l'inconnue,

de ſon coëfficient : puis je fais paſſer $\frac{bb}{2}$ dans le ſecond membre : enfin j'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{bb}{4}$ de la moitié du coëfficient b du ſecond terme ; ce qui fait que dans le ſecond membre il ſe trouve $-\frac{bb}{4}$, au lieu de $\frac{bb}{2}$. Car $\frac{bb}{4}$ qu'il faut ajouter, avec $-\frac{bb}{2}$ qu'il y avoit déja, étant réduits au même dénominateur, en multipliant par 2 le numérateur & le dénominateur de la fraction $-\frac{bb}{2}$, on a $\frac{bb}{4} - \frac{2bb}{4}$: ce qui fait $-\frac{bb}{4}$.

J'ai donc $xx + bx + \frac{bb}{4} = \frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}$; & tirant la racine quarrée de part & d'autre, j'ai $x + \frac{1}{2}b$, ou $\frac{1}{2}b + x = \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$; & de quelque façon que je dégage x, je trouve $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$: ce qui ſemble faire voir que l'équation n'a qu'une racine. Cependant elle en a deux : car la ſeconde eſt $x = -\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$.

Et pour s'en convaincre, on n'a qu'à faire tout paſſer dans le premier membre dans l'une & dans l'autre de ces expreſſions ; & l'on aura $x + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} = 0$ pour la premiere ; & $x + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}} = 0$ pour la ſeconde : & multipliant ces deux racines l'une par l'autre, le produit ſera $xx + bx + \frac{bb}{4} - \frac{aa}{2} = 0$ qui eſt préciſément l'équation $xx + bx + \frac{bb}{2} = \frac{aa}{2}$ de notre problême ; puiſqu'il n'y a qu'à faire paſſer $\frac{aa}{2}$ dans le premier membre de celle-ci, pour la rendre parfaitement égale au produit des deux racines.

Je mets les valeurs des lettres a, b, c, dans les deux racines ; & j'ai $x = -1 + \sqrt{50 - 1} = -1 + \sqrt{49} = -1 + 7 = 6$ valeur poſitive de x ; & $x = -1 - 7 = -8$ valeur négative de x. Ainſi quoique l'équation ait deux racines, il n'y en a qu'une qui puiſſe ici réſoudre le problême, ſavoir la poſitive 6. Le troiſieme détachement a donc 6 hommes, & par conſéquent le ſecond en a 8 : & il eſt aiſé de vérifier ſi les trois nombres 10, 8 & 6 rempliſſent toutes les conditions du problême.

Si dans l'équation $xx + bx \frac{bb}{2} = \frac{aa}{2}$, on avoit fait paſſer la grandeur $\frac{aa}{2}$, du ſecond membre dans le premier; on auroit eu $xx + bx + \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} = 0$: & à cauſe de la grandeur a plus grande que la grandeur b, le dernier terme auroit eu le ſigne —. C'eſt pourquoi l'ordre alternatif des ſignes + & — auroit été interrompu une fois; & cela nous fait juger, ſelon la regle de M. Deſcartes, qu'il y auroit eu une racine négative dans l'équation; ce que nous avons trouvé être véritable.

Je ne donne pas un plus grand nombre d'exemples, de peur d'être trop long. Mais je ſuis bien aiſe de faire obſerver que ſi dans les racines des deux exemples précédens, la grandeur qui eſt ſous le ſigne radical avoit été une grandeur négative, les deux expreſſions des racines auroient été imaginaires; & que par conſéquent les problêmes propoſés auroient renfermé une contradiction manifeſte.

Réſolution des Equations du 3e, 4e, 5e degré, &c.

224. On donne différentes méthodes pour réſoudre ces ſortes d'équations : mais comme la plupart de ces méthodes ſont extrêmement compliquées, & qu'elles demandent grand nombre de préparations longues, ennuyeuſes & embarraſſantes; j'ai cru devoir m'en tenir ici à la plus ſimple de toutes, qui conſiſte à faire en ſorte que le plus haut degré de l'inconnue ſe trouve ſans aucun coëfficient, ainſi que nous l'avons enſeigné ci-deſſus (209); & enſuite à diviſer l'équation par l'inconnue x, moins ou plus quelqu'un des diviſeurs du dernier terme de l'équation, lequel eſt toujours une grandeur entiérement connue qui contient le produit de toutes les racines (217).

Car puiſque l'équation ſe forme par la multiplication de pluſieurs différentes grandeurs de x, leſquelles en paſſant dans le premier membre donnent les produiſans $x - a = 0$, ou $x + a = 0$, &c. (212. 213); il eſt clair qu'en diviſant par quelqu'une des équations produiſantes, le diviſeur doit être exact : & ſi cela n'eſt pas, ce ſera une marque, ou que l'équation aura été produite par des incommenſurables, ou par des incommenſurables & des imaginaires, &c.

225. Il ſuit delà que pour pouvoir réſoudre une équation compoſée, du troiſieme, quatrieme, cinquieme degré, &c; il faut néceſſairement ſavoir trouver tous les diviſeurs de ſon dernier terme tout connu, & c'eſt ce que nous allons enſeigner dans le problême ſuivant.

226. PROBLÊME I. *Trouver tous les diviſeurs d'un nombre propoſé.*

SOLUTION. Soit le nombre propoſé 4320. Je prends les nombres ſimples 2, 3, 5, 7, &c, entendant par le nom de *nombres ſimples*, ceux qui ne peuvent ſe diviſer que par eux-mêmes ou par l'unité; & je diviſe d'abord le nombre propoſé par 2 : ce qui me donne le quotient 2160, & il ne reſte rien. Ainſi 2 eſt un diviſeur exact du nombre propoſé. Je diviſe le quotient 2160 encore par 2, & le quotient 1080 eſt encore exact : c'eſt pourquoi je le diviſe encore par 2, &

2	2	2	2	2	3	3	3	5
4320	2160	1080	540	270	135	45	15	5	1

je trouve encore un nouveau quotient exact 540, lequel diviſé de nouveau par 2 donne un autre quotient exact 270, que je puis encore diviſer par 2, & j'ai un quotient exact 135. Mais celui-ci ne peut plus ſe diviſer par 2; c'eſt pourquoi je le diviſe par 3, & le quotient 45 eſt exact : je diviſe ce quotient par 3, & je trouve un nouveau quotient 15, lequel diviſé par 3 donne exactement 5. Or 5 ne pouvant plus ſe diviſer par 3, je le diviſe par 5, & j'ai pour quotient 1 qui ne peut plus ſe diviſer.

Les diviſeurs ſimples ſont donc 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5 & 1. Or comme tous ces diviſeurs ſont ſucceſſifs, & que c'eſt la même choſe de diviſer un nombre ſucceſſivement par pluſieurs nombres, ou de le diviſer tout d'un coup par le produit de ces nombres (35); il eſt clair que les deux diviſions ſucceſſives par 2 & 2 donnent le même quotient que ſi j'avois diviſé tout d'un coup par le produit 4 des deux diviſeurs : donc 4 eſt encore un diviſeur exact du nombre propoſé. Par la même raiſon les trois diviſeurs ſucceſſifs 2, 2, 2, multipliés les uns par les autres donneront un nouveau diviſeur exact 8 : les quatre diviſeurs ſucceſſifs 2, 2, 2, 2, en ſe multipliant les uns par les autres donneront un nouveau diviſeur 16, & le produit des cinq diviſeurs 2, 2, 2, 2, 2, donnera encore un diviſeur 32. Ainſi nous aurons quatre autres diviſeurs 4, 8, 16, 32, multiples de 2.

Je fais la même choſe à l'égard des trois diviſeurs ſimples 3, 3, 3; & je trouve deux nouveaux diviſeurs 9 & 27 multiples de 3.

Maintenant je multiplie le diviſeur ſimple 2 & ſes multiples, par le diviſeur ſimple 3 & ſes multiples; & j'ai 15 nouveaux diviſeurs 6, 12, 24, 48, 96, 18, 36, 72, 144, 288, 54, 108, 216, 432, 864.

Je multiplie le diviſeur ſimple 5 par le diviſeur ſimple 2 & ſes multiples,

multiples, par le diviſeur 3 & ſes multiples, & par les quinze diviſeurs précédens : ce qui me donne les vingt-trois nouveaux diviſeurs 10, 20, 40, 80, 160, 15, 45, 135, 30, 60, 120, 240, 480, 90, 180, 360, 720, 1440, 270, 540, 1080, 2160, 4320.

Ainſi en ne prenant qu'une fois chaque diviſeur ſimple, & mettant avec eux l'unité qui eſt auſſi un diviſeur, nous avons quatre diviſeurs ſimples qui ajoutés à tous les autres donnent en tout les quarante-huit diviſeurs ſuivans 1, 2, 3, 4, 5, 8, 16, 32, 9, 27, 6, 12, 24, 48, 96, 18, 36, 72, 144, 288, 54, 108, 216, 432, 864, 10, 20, 40, 80, 160, 15, 45, 135, 30, 60, 120, 240, 480, 90, 180, 360, 720, 1440, 270, 540, 1080, 2160, 4320. Et il eſt clair que l'on ne peut pas en trouver d'autres : ce qui ſe démontre par l'opération même. Car le nombre propoſé étant diviſé exactement par les quatre diviſeurs ſimples 1, 2, 3, 5, qui, en ſe multipliant pluſieurs fois les uns par les autres, l'ont produit; il faut néceſſairement que tout diviſeur de ce nombre ſoit ou quelqu'un de ces quatre nombres ſimples, ou quelqu'un de leurs multiples : or nous avons pris tous les multiples de ces quatre diviſeurs qui peuvent diviſer exactement : donc en ajoutant à tous ces multiples les quatre diviſeurs ſimples, nous avons pris tous les diviſeurs poſſibles, & on n'en ſauroit trouver d'autres. Cela poſé,

227. Soit l'équation du troiſieme degré $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, dont on demande les racines. Je cherche tous les diviſeurs du dernier terme 24, qui ſont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 & 24; & prenant l'inconnue x, je fais $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$: ce qui donne, en tranſpoſant d'un membre à l'autre, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, &c; & ce ſont des valeurs poſitives. Je fais de même $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, &c; & en tranſpoſant, j'ai $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, &c; & ce ſont des valeurs négatives.

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \;(x^2 - 7x + 12$$
$$x - 2$$
$$-7x^2 + 26x$$
$$x - 2$$
$$+12x - 24$$
$$x - 2$$
$$0 \quad 0$$

$$x^2 - 7x + 12 \;(x - 4$$
$$x - 3$$
$$-4x + 12$$
$$x - 3$$
$$0 \quad 0$$

Je diviſe l'équation propoſée par chacune des valeurs poſitives, juſqu'à ce que j'en trouve une qui diviſe exactement; & je vois

que $x - 2 = 0$ est un diviseur exact : ainsi $x = 2$ est une racine de l'équation.

Pour trouver les deux autres, je divise le quotient $x^2 - 7x + 12 = 0$ de la même façon; c'est-à-dire, je cherche les diviseurs de son dernier terme, qui sont 1, 2, 3, 4, 6, & 12; & je fais les équations positives $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, &c, & les négatives $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$: & je divise l'équation d'abord par chacune des équations positives, jusqu'à ce que j'en trouve une qui divise exactement. Or en opérant ainsi, je trouve que $x - 3 = 0$ est un diviseur parfait; & que le quotient est $x - 4 = 0$. Ainsi les deux autres racines sont $x = 3$, & $x = 4$, & les trois racines sont positives : ce que l'on pouvoit voir d'abord par l'ordre alternatif des signes + & —.

Que si en divisant par les équations positives, on n'en trouvoit point qui divisât exactement; ce seroit marque qu'il n'y auroit point de racine positive commensurable : & en ce cas l'on diviseroit par les équations négatives, jusqu'à ce qu'on en trouvât une qui divisât exactement : & si en achevant le reste comme ci-dessus, on trouvoit deux autres racines, les trois racines seroient négatives. Que si on ne trouvoit point d'équation négative qui divisât exactement; ce seroit une marque que l'équation n'auroit point non plus de racines négatives commensurables.

On voit aisément qu'il pourroit se trouver des racines positives, des racines négatives commensurables & incommensurables, & enfin des racines imaginaires. Ainsi sans entrer dans un plus grand détail, je me contenterai de faire voir l'usage que l'on peut faire de ces équations dans le problême suivant.

PROBLÊME II. *Deux personnes ont partagé la somme de six livres, de façon qu'en faisant le cube de leurs parts, la différence est 56 : on demande quelle est la part de chacun d'eux ?*

SOLUTION. Je nomme $2a$ la somme 6; $2z$ la différence de l'une à l'autre part; & $2b$ la différence 56 des deux cubes : donc la part du premier est $a + z$ (200); & celle du second est $a - z$. Je fais les cubes; & retranchant le plus petit du plus grand, le reste est $2z^3 + 6aaz$.

$a^3 + 3aaz + 3azz + z^3$. Cube du 1er.
$a^3 - 3aaz + 3azz - z^3$. Cube du 2e.
$6aaz \quad 2z^3$. Différence.

Or par la condition du problême, cette différence est égale à $56 = 2b$: donc j'ai $2z^3 + 6aaz = 2b$. Et divi-

$2z^3 + 6aaz = 2b$
$z^3 + 3aaz = b$
$z^3 + 3aaz - b = 0$

ſant tout par 2, & faiſant paſſer b du ſecond membre dans le premier; j'ai $z^3 + 3aaz - b = 0$ qui eſt une équation du troiſieme degré qui contient néceſſairement des racines négatives : puiſque le ſecond terme manque (218).

Je mets dans cette équation les valeurs des lettres a, b : ce qui donne $z^3 + 27z - 28 = 0$. Or les diviſeurs de 28 ſont 1, 2, 4, 7, 14, & 28 : faiſant donc mes équations poſitives $z - 1 = 0$, $z - 4 = 0$, &c; & les négatives $z + 1 = 0$, $z + 4 = 0$, &c; je trouve que $z - 1 = 0$ diviſe exactement l'équation. Ainſi $z - 1 = 0$, ou $z = 1$ eſt une racine poſitive de l'équation.

$$\begin{array}{l} z^3 + 27z - 28 \;\big(\; z^2 + z + 28 \\ z - 1 \\ \hline + z^2 + 27z \\ \quad - z + 1 \\ \hline \quad 28z - 28 \\ \quad\quad z - 1 \\ \hline \quad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Pour trouver les deux autres, je réſous l'équation $z^2 + z + 28 = 0$ qui eſt du ſecond degré, par la méthode du ſecond degré; & je trouve que les deux racines ſont $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{-28 + \frac{1}{4}}$, & $z = -\frac{1}{2} - \sqrt{-28 + \frac{1}{4}}$; & ces deux racines ſont imaginaires; ainſi le problême n'a qu'une ſolution. Or puiſque $z = 1$, la différence ſera $2z = 2$; & par conſéquent la part du premier qui eſt $a + z$ doit être $3 + 1$, ou 4; & la part du ſecond qui eſt $a - z$ doit être $3 - 1$ ou 2; & la ſomme de ces deux nombre eſt 6, & la différence de leurs cubes 64 & 8 eſt 56 : ce qui étoit propoſé.

Et on réſoudra de même les autres équations de quelque degré qu'elles ſoient. Que ſi elles ne peuvent pas ſe réduire par cette voie, ou qu'on n'en puiſſe pas du moins trouver quelque racine; ce ſera une marque que cette équation ne contiendra que des racines incommenſurables.

228. Ce ſeroit ici le lieu de parler de la maniere d'extraire ces racines incommenſurables. Mais comme on ne s'aviſe pas de propoſer des problêmes numériques qui ne contiennent que des grandeurs incommenſurables, & qu'à l'égard des problêmes géométriques on a d'autres méthodes dont nous parlerons dans la ſuite; je paſſerai ici cette matiere ſous ſilence, pour ne pas amuſer les lecteurs à des choſes qui ne ſont pas d'une grande utilité.

RÉSOLUTION DES PROBLÊMES INDÉTERMINÉS.

229. PROBLÊME I. *Quatre Marchands ont fait une ſociété : la ſomme des miſes des deux premiers eſt* 14 *livres; celle des miſes du*

ſecond & du troiſieme eſt 16 ; *celle des miſes du troiſieme & du quatrieme eſt* 22 ; *& celle des miſes du premier & du quatrieme eſt* 20 : *quelle eſt la miſe totale, & la miſe de chacun en particulier ?*

SOLUTION. Je nomme a la ſomme 14 ; b la ſomme 16 ; c la ſomme 22 ; d la ſomme 20 ; x la miſe du premier ; y celle du ſecond ; z celle du troiſieme ; u celle du quatrieme. Les conditions du problême me donnent les quatre équations que l'on voit ici ; leſquelles ajoutées, font une équation qui diviſée par 2 donne l'équation ou la valeur de la miſe totale. Mais de cette valeur je ne puis tirer les miſes particulieres ; ainſi que j'ai fait dans le troiſieme exemple des problêmes déterminés (198) : car ſi je veux dégager quelqu'une des inconnues, par exemple x, les trois autres inconnues paſſeront dans le ſecond membre ; & j'aurai beau ſubſtituer les valeurs de ces inconnues priſes dans les conditions du problême, je ne découvrirai rien.

$x + y = a$, premiere condition.
$y + z = b$, ſeconde condition.
$z + u = c$, troiſieme condition.
$u + x = d$, quatrieme condition.

$2x + 2y + 2z + 2u = a + b + c + d.$
$x + y + z + u = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d.$ Miſe totale.

Pour trouver donc ces miſes, je dégage y dans la premiere & la ſeconde condition : ce qui donne deux valeurs de y. Je fais une équation de ces deux valeurs, & je dégage z : ce qui donne $z = b - a + x$. Je dégage z dans la troiſieme condition ; & j'ai $z = c - u$.

$y = a - x$, 1ere valeur de y.
$y = b - z$, 2e valeur de y.

$a - x = b - z$

$z = b - a + x$, 1ere valeur de z.
$z = c - u$ 2e valeur de z.

$b - a + x = c - u$

$u = -b + a - x + c$, 1ere valeur de u.
$u = d - x$ 2e valeur de u.

$-b + a - x + c = d - x$
$-b + a + c = d$

Je fais une équation des deux valeurs de z, & j'en dégage l'inconnue u ; ce qui me donne $u = -b + a - x + c$. Je dégage de même u dans la quatrieme, & j'ai $u = d - x$.

Je fais une équation des deux valeurs de u ; & corrigeant l'expreſſion, c'eſt-à-dire, effaçant x de part & d'autre, je trouve l'équa-

tion $-b+a+c=d$, dont l'un & l'autre membre contiennent des grandeurs entiérement connues ; ce qui ne détermine rien : c'eſt pourquoi le problême eſt indéterminé. Mais ſi je détermine l'une des inconnues, toutes les autres le deviendront aiſément. Je choiſis l'inconnue x, pour la déterminer; & pour ne pas ſuppoſer x égal à quelque nombre qui ne ſeroit pas propre pour la réſolution, je vois que dans la premiere valeur de y, l'inconnue x doit être moindre que a, ſi je veux que y ait une valeur poſitive. De même dans la ſeconde valeur de u, je vois que x doit être moindre que d, ſi je veux que u ſoit une grandeur poſitive ; & dans la premiere valeur de z, je ne trouve rien qui détermine x. Ainſi je prens au lieu de x, une grandeur moindre que a & que d ; & mettant cette valeur au lieu de x dans les valeurs de y, z, u, dont nous venons de parler ; toutes les inconnues ſe trouvent déterminées.

Or $a=14$, & $d=20$: prenant donc un nombre au-deſſous de 14 pour le faire égal à x, je réſoudrai le problême.

Ainſi je ſuppoſe $x=10$, & par conſéquent j'ai $y=a-x=a-10=14-10=4$; $z=b-a+x=16-14+10=12$, & $u=d-x=20-10=10$, & ces quatre nombres $x=10$, $y=4$, $z=12$, & $u=10$ rempliſſent les conditions du problême : ce qu'il eſt facile d'éprouver. On trouvera d'autres ſolutions, en ſuppoſant x égal à quelqu'autre nombre au-deſſous de 14.

230. PROBLÊME II. *Un homme tient dans ſes deux mains deux différens nombres de jettons : ſi l'on multiplie ces deux nombres l'un par l'autre, & qu'au produit on ajoute la ſomme des deux nombres, la ſomme totale ſera* 34 *: combien y a-t-il de jettons dans chaque main ?*

SOLUTION. Je nomme a la ſomme 34 ; z le premier nombre de jettons ; & y le ſecond. Ainſi par la premiere condition du problême, j'ai $zy+z+y=a$. Je fais paſſer y du premier membre dans le ſecond, & diviſant enſuite par $y+1$, j'ai $z=\frac{a-y}{y+1}$; & toutes les conditions du problême étant remplies, il me reſte deux inconnues : & par conſéquent il m'eſt libre de déterminer l'une des deux, par exemple y. Mais à cauſe du numérateur $a-y$, je vois que y doit être moindre que a, ſi je veux que z ſoit une grandeur poſitive : ainſi je puis prendre pour y, telle grandeur que je voudrai au-deſſous de $a=34$.

$$zy+z+y=a$$
$$zy+z=a-y$$
$$z=\frac{a-y}{y+1}$$

Suppoſons $y=4$: je mets cette valeur dans l'équation $z=$

$\frac{a-y}{y+1}$, & je trouve $z = \frac{34-4}{4+1} = \frac{30}{5} = 6$; & les deux nombres 4 & 6 rempliſſent les conditions du problême. Mais il faut prendre garde que quoiqu'il me ſoit libre de prendre pour y tel nombre que je voudrai au-deſſous de 34 ; cependant je ne dois prendre que ceux qui peuvent donner une valeur de z en nombre entier : car le nombre de jettons de l'une & de l'autre main, eſt un nombre entier. Ainſi il faut rejetter toutes les ſuppoſitions de y, qui ne donneroient pas un nombre entier pour z.

231. Il n'arrive pas toujours qu'on puiſſe réſoudre un problême indéterminé, en ſuppoſant que l'une des inconnues eſt égale à un nombre quelconque ; & dans ces cas il faut avoir recours à d'autres voies, ainſi qu'on va voir dans les deux problêmes ſuivans.

232. PROBLÊME III. *On demande de partager le quarré* 100 *en deux autres quarrés parfaits, c'eſt-à dire en deux quarrés dont on puiſſe extraire la racine :* quels ſont ces quarrés ?

SOLUTION. Je nomme aa le quarré 100 ; & xx, zz, les deux quarrés demandés. Ainſi par la condition du problême, j'ai $xx + zz = aa$, & le problême eſt indéterminé. Mais il ne m'eſt pas permis de ſuppoſer pour xx, ou pour zz tel nombre que je voudrai ; & ſi par ce moyen j'arrivois à trouver une ſolution, ce ne ſeroit que par haſard. Que je ſuppoſe par exemple $xx = 9$: donc $zz = 91$; puiſque $9 + 91 = 100$. Mais 91 n'eſt pas un quarré parfait : donc le problême n'eſt pas réſolu. De même, que je ſuppoſe $xx = 16$; $zz = 84$; à cauſe que $16 + 84 = 100$. Mais 84 n'eſt pas un quarré parfait, & par conſéquent le problême n'eſt pas plus réſolu par cette ſuppoſition que par la précédente. Il eſt vrai que je puis ſuppoſer $xx = 36$; & par conſéquent $zz = 64$; & la ſomme des deux étant 100, le problême ſera réſolu : à cauſe que 36 & 64 ſont des quarrés parfaits. Mais cette ſolution ne ſera trouvée que par haſard : que faut-il donc faire ? Le voici.

Je nomme x la racine du premier quarré, celle du ſecond ſera certainement moindre que la racine a ou 10 du quarré aa ou 100 : puiſque le ſecond quarré ſera moindre que 100. Je prends une grandeur indéterminée y, & je ſuppoſe que la racine du ſecond quarré inconnu eſt $yx - a$. Je puis faire cette ſuppoſition : parce que la lettre y pouvant ſignifier tel nombre entier, ou rompu, ou compoſé d'entier & de fraction ; il eſt sûr qu'il y a quelque nombre, quel qu'il ſoit, qui multipliant la racine x du premier quarré inconnu, donne un produit yx, duquel retranchant a, le reſte ſoit égal à la racine

du second quarré cherché. Or je fais cette supposition, 1°. afin de n'avoir qu'une seule inconnue : 2°. parce qu'en faisant les quarrés xx, & $yyxx - 2ayx + aa$, & ensuite leur somme ; cette somme se trouvera égale à aa : & par conséquent retranchant aa de part & d'autre, il me restera une équation où je pourrai réduire l'inconnue x au premier degré ; ainsi qu'on va voir.

Nous avons donc, en faisant la somme des deux quarrés inconnus, l'équation qu'on voit ici : & retranchant aa de part & d'autre, puis faisant passer $2ayx$ du premier membre dans le second, j'ai $xx + yyxx = 2ayx$; & divisant par x, & ensuite par $1 + yy$ ou par $yy + 1$, ce qui est la même chose, j'ai $x = \frac{2ay}{yy+1}$

$$xx + yyxx - 2ayx + aa = aa$$
$$xx + yyxx = 2ayx$$
$$x + yyx = 2ay$$
$$x = \frac{2ay}{yy+1}$$
$$z = \frac{2ayy}{yy+1} - a$$
$$z = \frac{2ayy - ayy - a}{yy+1}$$
$$z = \frac{ayy - a}{yy+1}$$

Je mets cette valeur de x dans la valeur de la racine z, ou $yx - a$ du second quarré ; & je trouve $z = \frac{2ayy}{yy+1} - a$: & réduisant a en une fraction dont le dénominateur soit $yy + 1$, puis corrigeant l'expression, j'ai $z = \frac{ayy-a}{yy+1}$. Ainsi les valeurs des racines x & z des quarrés cherchés sont $\frac{2ay}{yy+1}$, & $\frac{ayy-a}{yy+1}$: & si je détermine la valeur de y, ces deux racines me deviendront connues. Mais pour la déterminer, je m'apperçois que dans la valeur de z, si je faisois $y = 1$, j'aurois $z = \frac{1a-a}{yy+1} = 0$; & dans la valeur de x, je ne vois rien qui détermine y : donc pourvu que je ne suppose pas $y = 1$, je puis prendre tel autre nombre que je voudrai au-dessus de l'unité, ou même au-dessous.

Il est vrai qu'en supposant y égal à un nombre moindre que l'unité, par exemple à $\frac{1}{2}$; j'aurai $z = \frac{\frac{1}{4}a - a}{\frac{1}{4}+1} = \frac{-\frac{3}{4}a}{\frac{5}{4}+1}$, & que par conséquent z sera une grandeur négative. Mais cela n'empêchera pas que son quarré ne soit positif : parce que $-$ par $-$ donne $+$.

Je suppose donc $y = 2$, & par conséquent j'ai $x = \frac{2 \times 10 \times 2}{4+1} = \frac{40}{5} = 8$; & $z = \frac{10 \times 4 - 10}{4+1} = \frac{30}{5} = 6$; & les quarrés de ces deux nombres 64 & 36 dont la somme est égale à 100 : & on trouvera d'autres quarrés dont la somme sera encore égale à 100, en supposant pour y tel autre nombre que l'on voudra moindre ou plus grand que l'unité.

233. PROBLÊME IV. *On demande deux quarrés dont la ſomme ſoit égale à la ſomme des deux quarrés 64 & 100 : quels ſont ces quarrés ?*

SOLUTION. Je nomme *aa* le quarré 64, & *bb* le quarré 100. Il eſt évident que ſi l'un des deux quarrés demandés eſt plus grand que *aa*, l'autre doit être moindre que *bb* : & au contraire, ſi le premier eſt moindre que *aa*, l'autre ſera plus grand que *bb* ; & par conſéquent la racine du premier quarré demandé doit être ou moindre ou plus grande que la racine *a* du quarré *aa*.

Pour trouver une expreſſion convenable à l'un & l'autre de ces cas, je ſuppoſe que la racine du premier quarré demandé eſt $a + z$: parce que z pouvant être ou une grandeur poſitive, ou une grandeur négative, on voit bien qu'il faudra l'ajouter à la racine *a*, ſi elle eſt poſitive ; & la retrancher de la racine *a*, ſi elle eſt négative. Pour la racine du ſecond quarré cherché, je ſuppoſe $yz - b$; & la raiſon pourquoi je fais cette ſuppoſition, c'eſt 1°. que les deux quarrés des racines $z + a$, & $yz - b$, contiendront les quarrés donnés *aa*, *bb* ; & que par conſéquent faiſant leur ſomme pour en faire une équation dont le ſecond membre ſera $aa + bb$, les termes *aa*, *bb*, s'effaceront de part & d'autre ; & enſuite je pourrai réduire l'inconnue z au premier dégré : 2°. parce qu'il eſt sûr qu'on peut trouver un nombre y, qui ſoit tel qu'après l'avoir multiplié par z, il faille retrancher *b* du produit pour avoir la racine du ſecond quarré demandé.

Je fais donc les quarrés de $a + z$, & de $yz - b$; & les ajoutant enſemble ; leur ſomme eſt égale à la ſomme $aa + bb$. Ainſi j'ai l'équation qu'on voit ici.

$$\begin{array}{l} aa + 2az + zz, \text{ premier quarré.} \\ yyzz - 2byz + bb, \text{ ſecond quarré.} \\ \hline zz + yyzz + 2az - 2byz + aa + bb, \text{ ſomme.} \\ zz + yyzz + 2az - 2byz + aa + bb = aa + bb \\ zz + yyzz = 2byz - 2az \\ z + yyz = 2by - 2a \\ z = \frac{2by - 2a}{yy + 1} \end{array}$$

Je retranche $aa + bb$ de part & d'autre, & faiſant paſſer $2az - 2byz$ du premier membre dans le ſecond ; je trouve $zz + yyzz = 2byz - 2az$. Je diviſe tout par z, & enſuite par $1 + yy$; ce qui donne $z = \frac{2by - 2a}{yy + 1}$: & je vois qu'en déterminant y, l'inconnue z ſera connue ; & qu'en mettant ſa valeur dans les racines $a + z$, & $yz - b$ des deux quarrés demandés, ces quarrés deviendront auſſi connus.

Or pour déterminer y, je m'apperçois 1°. que ſi je faiſois $y = 1$

&

& que je misse cette valeur de y dans $z = \frac{2by - 2a}{yy + 1}$; j'aurois $z = 2$: & par conséquent la racine $a + z$ seroit 10, & la racine $yz - b$ seroit 2 — 10, ou 8. Ainsi les quarrés de ces deux racines me donneroient les quarrés 100 & 64 qui sont les mêmes que les quarrés proposés : je ne dois donc point supposer $y = 1$. 2°. Que si je veux que z ne soit pas égal à zéro, il faut que je suppose y égal à un nombre qui soit tel que le numérateur $2by - 2a$ de la valeur de z ne soit pas égal à zéro : ainsi pourvu que j'observe ces deux conditions, je puis prendre pour y tel nombre entier ou rompu que je voudrai au-dessus ou au-dessous de l'unité.

Je suppose $y = 2$, & mettant cette valeur dans $z = \frac{2by - 2a}{yy + 1}$ & aussi les valeurs des grandeurs connues a, b; je trouve $z = \frac{40 - 16}{4 + 1} = \frac{24}{5}$: donc $a + z = 8 + \frac{24}{5} = \frac{40 + 24}{5} = \frac{64}{5}$; & $yz - b = \frac{48}{5} - 10 = \frac{48}{5} - \frac{50}{5} = -\frac{2}{5}$: faisant donc les quarrés de $\frac{64}{5}$ & de $-\frac{2}{5}$; j'ai $\frac{4096}{25}$, & $\frac{4}{25}$, dont la somme est $\frac{4100}{25}$: & réduisant la fraction en entiers, je trouve 164 égal à la somme des quarrés proposés 100 & 64, & en supposant y égal à quelqu'autre nombre au-dessus ou au-dessous de l'unité, & qui ne donnât pas $2by = 2a$, je trouverois d'autres quarrés dont la somme feroit 164. D'où l'on voit qu'on peut trouver une infinité de quarrés, lesquels pris deux à deux seroient égaux à la somme des quarrés proposés.

234. PROBLÊME V. *La différence de deux quarrés est 60 : on demande quels sont ces quarrés ?*

SOLUTION. Je nomme a la différence 60, & xx le plus grand quarré : donc le second sera $xx = a$. Et comme ceci ne me fait rien connoître; je suppose que le côté ou la racine de ce second quarré, est $x - y$: parce qu'il doit être moindre que la racine du quarré xx. Ainsi j'ai $xx - 2yx + yy$, & ce quarré est égal à $xx - a$: ce qui me donne une équation.

J'efface dans cette équation xx de part & d'autre; & faisant passer $-2yx$ du premier membre dans le second, & $-a$ du second dans le premier; je trouve une valeur de x dans laquelle rien ne m'empêche de donner à y telle valeur que je voudrai. Je suppose $y = 2$; & mettant cette valeur de y dans celle de x que je viens de trouver; j'ai $\frac{60 + 4}{4} = 16 = x$: faisant donc le

$$xx - 2yx + yy = xx - a$$
$$-2yx + yy = -a$$
$$a + yy = 2yx$$
$$\frac{a + yy}{2y} = x$$

quarré de 16, j'ai $256 = xx$; & retranchant 60 de 256, je trouve 196 dont la racine eſt 14. Ainſi les deux quarrés demandés ſont 256 & 196 dont la différence eſt 60; ce qui étoit requis : & on trouveroit d'autres quarrés dont la différence ſeroit 60, en ſuppoſant pour y telle autre valeur que l'on voudroit.

235. Ces ſortes de problêmes demandent une certaine adreſſe à trouver des expreſſions convenables pour faire en ſorte que l'inconnue puiſſe ſe trouver au premier degré; & c'eſt là où gît toute la difficulté : mais avec un peu d'uſage on en vient aiſément à bout.

CHAPITRE VII.

DES RAISONS, PROPORTIONS, ET PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

236. LORSQUE l'on compare enſemble deux grandeurs; ce que l'on trouve que l'une eſt à l'égard de l'autre, eſt ce qu'on nomme en général *Raiſon* ou *Rapport*. Il y a toujours néceſſairement deux termes dans toute raiſon : le premier ſe nomme *antécédent*. Le ſecond s'appelle *conſéquent*.

237. On peut comparer deux grandeurs, de deux façons différentes : l'une, en examinant l'excès dont la plus grande des deux grandeurs ſurpaſſe la moindre : l'autre, en conſidérant combien de fois la premiere des deux grandeurs contient la ſeconde. De la premiere comparaiſon réſulte la raiſon arithmétique : de la ſeconde, réſulte la raiſon géométrique. Nous allons définir & faire connoître l'une & l'autre.

238. *Définition I.* La *raiſon arithmétique* eſt la différence dont la premiere des deux grandeurs que l'on compare, ſurpaſſe la ſeconde, ou eſt ſurpaſſée par la ſeconde. Dans cette raiſon, 3 eſt à 5, la grandeur 2, différence des deux grandeurs comparées, eſt la valeur de la raiſon.

La raiſon arithmétique ſe trouve en retranchant la moindre des deux grandeurs, de la plus grande; & le reſte ou la *différence* fait voir le rapport des deux grandeurs : c'eſt pourquoi la raiſon arithmétique eſt nommée quelquefois *différence*.

239. *Définition II.* La *raiſon géométrique* (1) eſt la maniere dont

(1) Cette définition de la raiſon géométrique & de ſon expoſant, eſt tirée du *Cours de Mathématiques Elémentaires de M. l'Abbé* PARA *du Phanjas*. On a cru devoir changer celle qu'en donnoit l'auteur de l'ouvrage que nous réimprimons. Selon cet auteur, quand

une grandeur contient une autre grandeur, ou une partie de cette autre grandeur : la premiere eſt l'antécédent ; la ſeconde eſt le conſéquent. *La raiſon géométrique eſt donc le quotient de l'antécédent, diviſé par le conſéquent.* Par exemple, il y a un rapport ou une raiſon géométrique, entre 12 & 4 : ce rapport ou cette raiſon eſt 3 ; parce que 3 exprime combien de fois la premiere grandeur 12 contient la ſeconde grandeur 4. Le quotient 3 eſt l'expoſant de la raiſon : il exprime ſa valeur.

I°. Il faut obſerver ici, qu'une grandeur peut en contenir une autre, ou en entier, ou en partie. Par exemple, 8 contient 2, quatre fois : mais 2 contient ſeulement une partie de 8, ſavoir le quart. Le rapport, ou la raiſon de 8 à 2, eſt 4 : le rapport, ou la raiſon de 2 à 8, eſt $\frac{1}{4}$. *L'expoſant* de la premiere raiſon, eſt 4 : *L'expoſant* de la ſeconde raiſon, eſt $\frac{1}{4}$.

II°. *L'expoſant d'une raiſon géométrique* étant le quotient de l'antécédent diviſé par le conſéquent ; il eſt clair que *le conſéquent multiplié par l'expoſant de la raiſon, doit être égal à l'antécédent :* puiſque dans toute diviſion, le produit du diviſeur par le quotient, eſt égal au dividende (29). Ainſi dans la raiſon, 8 eſt à 2, dont l'expoſant eſt 4 ; $2 \times 4 = 8$. De même dans la raiſon, 2 eſt à 8, dont l'expoſant eſt $\frac{1}{4}$; $8 \times \frac{1}{4} = 2$. On voit ici qu'il eſt indifférent que l'antécédent ſoit ou plus grand ou plus petit que le conſéquent : l'expoſant ou la raiſon, eſt toujours également le quotient qui réſulte de l'antécédent diviſé par le conſéquent.

240. Lorſqu'après avoir comparé deux grandeurs enſemble, on vient à en comparer deux autres, & que l'on trouve que la raiſon des deux premieres eſt égale à la raiſon des deux ſecondes, cela ſe nomme *proportion* ; & cette proportion eſt *arithmétique*, ou *géométrique*, ſelon que les raiſons qui la compoſent ſont arithmétiques ou géométriques.

---

on compare une grandeur à une autre grandeur, *la raiſon géométrique ſe trouve en diviſant la plus grande quantité par la moindre* : d'où il s'enſuivroit que la raiſon de 4 à 2, eſt la même choſe que celle de 2 à 4 : ce qui eſt gauche & même faux. Selon le même auteur, l'expoſant d'une raiſon géométrique, eſt *le quotient de la plus grande des deux quantités diviſée par la moindre* : ce qui renferme le même vice que nous venons d'obſerver.

Cependant cette definition peu exacte ne mene M. l'abbé Deidier à aucun faux principe ni à aucune fauſſe conſéquence dans tout ſon ouvrage. Mais dans le neuvieme chapitre, où il traite des raiſons compoſées, il étoit obligé de revenir ſur ſes pas ; & reprenant la définition de la raiſon géométrique, il nommoit Expoſant, le quotient de la diviſion du plus grand terme par le plus petit ; & Expoſiteur, le quotient du premier terme diviſé par le ſecond ; ſoit que le premier terme fût plus grand, ſoit qu'il fût plus petit que le ſecond : ce qui mettoit en pure perte, & dans l'ouvrage, & dans l'eſprit du lecteur, un embarras que nous avons fait diſparoître ; en définiſſant plus ſimplement & plus exactement, & la raiſon géométrique, & l'Expoſant de cette raiſon.

241. Toute proportion a par conſéquent quatre termes; le premier ſe nomme *premier antécédent*, le ſecond *premier conſéquent*, le troiſieme *ſecond antécécent*, & le quatrieme *ſecond conſéquent*.

242. Le premier & le dernier terme d'une proportion ſe nomment les *extrêmes*: le ſecond & le troiſieme ſe nomment les *moyens*.

243. Lorſque le ſecond & le troiſieme terme d'une proportion ſont égaux, c'eſt-à-dire, lorſqu'une même grandeur ſert de premier conſéquent & de ſecond antécédent; cette grandeur ſe nomme *moyenne proportionnelle*, & la proportion ſe nomme *proportion continue* arithmétique ou géométrique.

244. Si les quatre différens termes d'une proportion ſont a, b, c, d, & que la proportion ſoit arithmétique; on l'exprime ainſi : $a. b : c. d$, ou $a. b \therefore c. d$, ou $a, b \therefore c, d$. Mais ſi la proportion eſt géométrique, on l'écrit de cette façon $a. b :: c. d$. ou $a, b :: c, d$. Dans l'un & l'autre cas on l'énonce en diſant : a eſt à b, comme c eſt à d : c'eſt-à-dire dans la proportion arithmétique, a ſurpaſſe b ou eſt ſurpaſſé par b, autant que c ſurpaſſe d ou eſt ſurpaſſé par d; & dans la proportion géométrique, a contient b, ou une partie de b, de la même façon que c contient d, ou une partie de d.

245. Si l'on a pluſieurs grandeurs de ſuite en proportion continue, de ſorte que la premiere ſoit à la ſeconde, comme la ſeconde eſt à la troiſieme, comme la troiſieme à la quatrieme, comme la quatrieme à la cinquieme, & ainſi de ſuite; cela ſe nomme *progreſſion* : ſi la progreſſion eſt arithmétique, on l'écrit ainſi $\therefore a. b. c. d. e. f.$ ou $\therefore a, b, c, d, e, f$: mais ſi elle eſt géométrique, on écrit $:: a. b. c. d. e. f.$ ou $:: a, b, c, d, e, f$. On énonce l'une & l'autre en diſant : a eſt à b comme b eſt à c, comme c eſt à d, comme d eſt à e, &c.

Nous examinerons dans le Chapitre ſuivant, les propriétés des raiſons, proportions, & progreſſions géométriques : celui-ci ſera borné uniquement à expoſer les propriétés des raiſons, proportions, & progreſſions arithmétiques.

THÉORÊMES ET PROBLÊMES.

246. THÉORÊME I. *Dans toute proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens; & ſi la proportion eſt continue, la ſomme des extrêmes eſt égale au double de la moyenne.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit la proportion arithmétique $a, b \therefore c, f$. Il eſt clair que la différence de la premiere raiſon a, b, ſera égale à la différence de la ſeconde c, f : puiſqu'il y a proportion. Nommons donc cette différence d : & ſuppoſons en premier lieu que le pre-

mier antécédent a ſoit moindre que ſon conſéquent b, & que par conſéquent le ſecond antécédent c ſoit moindre que le ſecond conſéquent f. Il eſt viſible que nous aurons $a+d=b$, & $c+d=f$; puiſque d eſt la quantité qui manque à chaque antécédent pour être égaux à leurs conſéquens. Mettant donc dans la proportion $a+d$, au lieu de b, & $c+d$, au lieu de f; nous aurons $a, a+d \therefore c, c+d$, & cette proportion ſera la même que la propoſée. Ainſi la ſomme des extrêmes ſera $a+c+d$, & celle des moyens $a+d+c$. Mais ces deux ſommes ſont compoſées des mêmes quantités : donc elles ſont égales, & par conſéquent nous avons $a+c+d=a+d+c$.

Suppoſons en ſecond lieu que a ſoit plus grand que b; c ſera auſſi plus grand que f: & nous aurons $b+d=a$, & $f+d=c$. Ainſi mettant ces valeurs de a & de c dans la proportion, nous aurons $b+d. b \therefore f+d. f$: & faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moyens, nous aurons $b+d+f=b+f+d$.

II°. Enfin ſuppoſons la proportion continue $\therefore a, b, c$: cette proportion peut s'écrire ainſi $a, b \therefore b, c$. Ainſi ſuppoſant que la différence ſoit d, & que a ſoit moindre que b; nous aurons dans la premiere raiſon $a+d=b$, & dans la ſeconde $b+d=c$. Mettant donc ces valeurs de b & c dans la proportion $a, b \therefore b, c$; nous aurons $a, a+d \therefore b, b+d$, & la ſomme $a+b+d$ des extrêmes ſera égale à la ſomme $a+d+b$ des moyens : donc j'ai $a+c=2b$, en ſubſtituant les valeurs de $b+d$ & de $a+d$.

Que ſi a eſt plus grand que b, nous aurons dans la premiere raiſon $b+d=a$; & dans la ſeconde $c+d=b$. C'eſt pourquoi en mettant ces valeurs de a & b dans la proportion $a, b \therefore b, c$, nous aurons $b+d. b \therefore c+d. c$; & la ſomme des extrêmes $b+d+c$ ſera égale à la ſomme des moyens $b+c+d$: donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

247. PROBLÊME I. *Trois termes d'une proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrieme.*

SOLUTION. Suppoſons que a, b, c, ſoient les trois premiers termes d'une proportion arithmétique : je nomme x le quatrieme; & j'ai $a, b \therefore c, x$: & faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moyens, je trouve $a+x=b+c$ (246); & faiſant paſſer a du premier membre dans le ſecond, j'ai $x=b+c-a$; ce qui me fait voir que ſi de la ſomme des moyens je retranche le premier terme, le reſte ſera le dernier terme demandé.

Soit $a=2, b=5, c=7$: la ſomme des moyens eſt 12, de laquelle retranchant le premier terme 2, le reſte 10 ſera le dernier

terme cherché, & nous aurons la proportion arithmétique 2, 5 ∴ 7, 10.

Il eſt aiſé de voir que ſi c'étoit le premier terme qui manquât dans la proportion, ou le ſecond, ou le troiſieme; on n'auroit qu'à mettre x à ſa place, & achever le reſte comme nous venons de faire.

248. *Remarque.* S'il manquoit deux termes à la proportion, le problême ſeroit indéterminé. Par exemple, ſoient a, b, les deux extrêmes d'une proportion. Je nomme la premiere moyenne x, & la ſeconde y; & j'ai $a, x \therefore y, b$: & par conſéquent $a+b=y+x$ (246). Ainſi il faut néceſſairement déterminer l'une des inconnues: je détermine x, qui eſt la premiere moyenne, en lui donnant une valeur c moindre ou plus grande que a; & j'ai $a, c \therefore y, b$: d'où je tire $a+b=c+y$; & faiſant paſſer c dans le premier membre, je trouve $a+b-c=y$.

249. Soit $a=2$, & $b=7$, je ſuppoſe $x=4$. Ainſi j'ai $2, 4 \therefore y, 7$, d'où je tire $2+7=4+y$, ou $9=4+y$; & par conſéquent $y=9-4=5$, & la proportion eſt $2, 4 \therefore 5, 7$.

Théorême II. *Dans toute progreſſion arithmétique aſcendante, c'eſt-à-dire, dont les termes vont en augmentant, la ſomme de deux termes également éloignés du premier & du dernier, c'eſt-à-dire également éloignés des extrêmes, eſt égale à la ſomme des extrêmes.*

Démonstration. Soit la progreſſion arithmétique aſcendante $\therefore a, b, c, e, f, g$, dont je ſuppoſe que la différence eſt d: le ſecond terme b ſera donc égal à $a+d$; le troiſieme c ſera égal à $b+d$, ou $a+d+d$, ou $a+2d$; le quatrieme ſera $a+3d$, & ainſi de ſuite: puiſque ces termes vont toujours en augmentant d'une égale différence. Ainſi la progreſſion $\therefore a, b, c, e, f$, ſera la même que $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d$. Or ſi dans cette progreſſion je prends les termes $a+d$, & $a+4d$ qui ſont également éloignés des extrêmes; leur ſomme $a+d+a+4d$ ou $2a+5d$, ſera égale à la ſomme $a+a+$ ou $2a+5d$ des extrêmes. Que ſi je prends les termes $a+2d$, & $a+3d$ qui ſont également éloignés des extrêmes, je trouverai de même que leur ſomme eſt égale à la ſomme $2a+5d$ des extrêmes: donc, &c.

250. *Remarque.* Si la progreſſion étoit deſcendante, c'eſt-à-dire ſi ſes termes alloient en diminuant, il eſt clair qu'en la prenant à rebours, elle ſeroit aſcendante; & par conſéquent on prouveroit de la même façon que nous venons de faire, que la ſomme de deux termes également éloignés des extrêmes, ſeroit égale à la ſomme des extrêmes. Or comme il eſt toujours facile de prendre une

progreſſion à rebours, en écrivant $\therefore g, f, e, c, b, a$, au lieu de $\therefore a, b, c, e, f, g$. Nous ſuppoſerons toujours que la progreſſion eſt aſcendante dans tout ce que nous allons dire; pour n'être pas obligé de donner des regles différentes pour les deux cas.

251. THÉORÊME III. *Dans toute progreſſion arithmétique aſcendante, la ſomme de tous les termes eſt égale à la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, c'eſt-à-dire du nombre qui exprime combien il y a de termes.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion aſcendante a, b, c, e, f, g, qui a ſix termes. Je fais la ſomme $b+f$ des termes b, f, également éloignés des extrêmes; la ſomme $c+e$ des termes c, e, également éloignés des extrêmes; & enfin la ſomme $a+g$ des extrêmes: ces trois ſommes ſont égales entre elles (249); & elles ſont auſſi égales à la ſomme de la progreſſion, ou de tous les termes. Or ces trois ſommes égales ſont la même choſe que la ſomme des extrêmes multipliée par 3: mais 3 eſt la moitié du nombre des termes 6; donc la ſomme des termes, ou la ſomme de la progreſſion, eſt égale à la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Il eſt aiſé de voir que s'il y avoit un plus grand nombre de termes, & que ce nombre fût pair; les termes pris deux à deux donneroient toujours un nombre de ſommes égales qui ſeroit exprimé par la moitié du nombre des termes: & par conſéquent on auroit toujours la ſomme de la progreſſion, égale à la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Mais ſi le nombre des termes étoit impair, comme dans la progreſſion $\therefore a, b, c, e, f, g, h$; nous aurions d'abord les trois ſommes $b+g$, $c+f$, & $a+h$ égales, & il reſteroit le terme e: or à cauſe que les trois termes c, e, f, ſont en proportion continue; la la ſomme $c+f$ ſeroit égale au double du terme e (246): donc le terme e ne ſeroit que la moitié de l'une des trois ſommes égales. Ainſi nous aurions trois ſommes égales & une demi-ſomme: mais trois ſommes égales & une demi-ſomme ſont la même choſe que l'une des ſommes multipliées par 3 & demi: donc la ſomme de la progreſſion ſeroit égale à la ſomme des extrêmes multipliée par $3\frac{1}{2}$ qui eſt la moitié du nombre des termes 7; & ainſi des autres. Ce qu'il falloit démontrer.

252. THÉORÊME. IV. *Dans toute progreſſion arithmétique aſcendante, le dernier terme contient le premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité.*

Démonstration. Soit la progreſſion arithmétique aſcendante ∴ a, b, c, e, f, dont je ſuppoſe que la différence eſt d: cette progreſſion ſera la même que celle-ci ∴ $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$. Or le dernier terme $a+4d$ contient le premier terme a, plus $4d$, c'eſt-à-dire, plus la différence d multipliée par 4, c'eſt-à-dire par le nombre des termes moins un : donc le dernier terme $a+4d$ contient le premier terme, plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité.

253. Corollaire. Il ſuit de ce théorême & des trois précédens:

I°. Que pour trouver la ſomme d'une progreſſion dont le premier terme, le dernier, & le nombre des termes ſont connus; il faut ajouter les deux extrêmes enſemble & les multiplier par la moitié du nombre des termes.

II°. Que ſi on connoît le premier terme, le dernier, & le nombre des termes; on connoîtra la différence, en retranchant le premier terme du dernier, & diviſant enſuite le reſte par le nombre des termes diminué de l'unité. Car ce reſte eſt égal au produit de la différence, multiplié par le nombre des termes diminué de l'unité (252).

III°. Que ſi l'on connoît le premier terme, le dernier & la différence; on trouvera le nombre des termes, en retranchant le premier terme du dernier, & diviſant le reſte par la différence, puis ajoutant 1 au quotient: puiſque ce reſte eſt égal à la différence multipliée par le nombre des termes — 1 (252).

IV°. Que ſi l'on connoît le premier terme, la différence & le nombre des termes; on connoîtra le dernier, en faiſant le produit de la différence par le nombre des termes diminué de l'unité, & en ajoutant ce produit au premier terme (252).

V°. Que ſi l'on connoît le dernier terme, le nombre des termes & la différence; on connoîtra le premier terme, en multipliant la différence par le nombre des termes diminué de l'unité, retranchant enſuite le produit du dernier terme; car le reſte ſera le premier terme (252).

VI°. Enfin que ſi on connoît la ſomme de la progreſſion, le nombre des termes, & la différence; on connoîtra le premier & le dernier terme, en diviſant la ſomme de la progreſſion par la moitié du nombre des termes, & le quotient ſera la ſomme des extrêmes; parce que la ſomme de la progreſſion eſt égale à la ſomme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes (251). Après quoi on fera le produit de la différence par le nombre des termes diminué de l'unité; & retranchant ce produit de la ſomme des extrêmes, le reſte ſera le double du premier terme; à cauſe que la ſomme des extrêmes

contient

contient le premier terme & le dernier terme, lequel contient auſſi le premier terme plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité. D'où il ſuit qu'en retranchant ce produit, le reſte eſt le double du premier terme, &c.

Il y a donc cinq choſes dans toute progreſſion, ſavoir le premier terme, le dernier, le nombre des termes, la différence, & la ſomme de la progreſſion, & trois des quatre premieres étant connues, on connoîtra toujours les autres. En voici un exemple général où nous renfermerons tous les cas.

254 PROBLÊME GÉNÉRAL. *Un homme a donné de l'argent pendant un certain nombre de jours, en augmentant tous les jours d'une même quantité : ainſi voilà une progreſſion dont nous n'avons rien de connu. Mais voici les différentes queſtions qu'on vous fait, en vous faiſant toujours connoître trois choſes :*

En premier lieu, *on dit que cet homme a donné le premier jour un ſol, le dernier 22, & qu'il a donné pendant huit jours ; & on demande combien il a donné.*

J'ajoute le premier terme 1 au dernier 22, ce qui fait 23 : je multiplie cette ſomme 23 par 4, qui eſt la moitié du nombre des termes ; & le produit 92 eſt la ſomme totale de l'argent que cet homme a donné (251).

En ſecond lieu, *on dit que cet homme a donné pendant huit jours, le premier jour 1, & les autres en augmentant toujours de trois ; & l'on demande combien il a donné le dernier jour, & ce qu'il a donné en tout.*

Je multiplie la différence 3 par le nombre des termes diminué de l'unité, c'eſt-à-dire par 7, ce qui fait 21 : & ajoutant le premier terme 1 à ce produit, la ſomme 22 eſt ce qu'il a donné le dernier jour (252). Après quoi je trouve la ſomme totale, comme auparavant.

En troiſieme lieu, *on dit que cet homme augmentant chaque jour de 3, a donné le huitieme jour 22 ſols, & l'on demande combien il a donné le premier jour.*

Je multiplie la différence 3 par 7, ce qui fait 21 : & retranchant 21 du dernier terme 22, le reſte eſt le premier terme 1 (251, 252).

En quatrieme lieu, *on dit que cet homme a donné 1 ſol le premier jour, 22 le dernier jour, & qu'il a toujours augmenté de 3 ; & l'on demande pendant combien de jours il a donné.*

Je retranche le premier terme 1 du dernier 22, & le reſte 21 eſt la différence 3 multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité

(252) : donc diviſant 21 par 3, le quotient 7 eſt le nombre de termes diminué de l'unité, & par conſéquent 8 eſt le nombre de jours pendant leſquels cet homme a donné de l'argent.

En cinquieme lieu, *on dit que cet homme a donné pendant huit jours, le premier jour* 1, *& le dernier* 22, *& l'on demande quelle eſt la quantité dont il a augmenté tous les jours.*

Je retranche le premier terme 1 du dernier 22, & le reſte 21 eſt la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité (252) : je diviſe donc ce reſte par 8 — 1, ou 7; & le quotient 3 eſt la différence cherchée.

En ſixieme lieu, *on dit que cet homme a donné en tout 92 ſols, & que le premier jour il a donné* 1 *& le dernier* 22; *& l'on demande pendant combien de jours il a donné, & quelle eſt la quantité dont il a augmenté tous les jours.*

J'ajoute le premier terme au dernier, ce qui fait 23; & diviſant 92 par 23, je trouve 4 qui eſt la moitié du nombre des termes : car la ſomme 92 eſt le produit de 23 par la moitié du nombre des termes (251) : ainſi le nombre de jours eſt 8. Après quoi retranchant le premier terme 1 du dernier 22, ce qui fait 21; je diviſe 21 par 8 — 1, ou par 7, & le quotient 3 eſt la différence cherchée (252).

En ſeptieme lieu, *on dit que cet homme ayant donné pendant* 8 *jours, en augmentant toujours de* 3, *a donné en tout 92 ſols, & l'on demande combien il a donné le premier jour & le dernier.*

Je diviſe la ſomme 92 par 4 qui eſt la moitié du nombre des termes, & le quotient 23 eſt la ſomme des extrêmes (251). Je fais le produit de la différence 3 par 8 — 1, ou 7, ce qui fait 21; & le reſte 2 eſt le double du premier terme : car la ſomme du premier & du dernier contient deux fois le premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité. Ainſi cet homme a donné le premier jour 1 & le dernier 22.

255. Remarque. Si dans ces ſortes de queſtions on donnoit à connoître moins de quantités qu'il ne faut pour pouvoir les réſoudre comme nous venons de faire; on nommeroit les quantités inconnues par les lettres x, y, &c; & on réſoudroit le problême en ſuivant le principe précédent, ainſi qu'on va voir.

256. Problême III. *On a détaché d'une garniſon le premier jour* 5 *hommes, le ſecond* 7, *& ainſi de ſuite, en augmentant toujours de deux, & à la fin il s'eſt trouvé qu'on avoit détaché en tout* 96 *hommes; on demande pendant combien de jours ces détachemens ont duré.*

Solution. Je connois bien ici trois choſes, ſavoir le premier

terme 5, la différence 2, & la ſomme de la progreſſion 96: mais comme l'une de ces trois choſes, c'eſt-à-dire la ſomme de la progreſſion n'eſt pas au nombre des quatre premieres dont nous avons parlé (253).; je ne puis pas réſoudre le problême par les regles ordinaires. Ainſi je nomme le nombre des termes y, & par conſéquent $y-1$ eſt le nombre des termes diminué de l'unité. Je multiplie la différence 2 par $y-1$; ce qui donne $2y-2$: & ajoutant à ce produit le premier terme 5, j'ai $2y+3$ pour le dernier terme (252). J'ajoute à ce terme le premier terme 5; & la ſomme $2y+8$ eſt la ſomme des extrêmes. Je multiplie cette ſomme par $\frac{1}{2}y$ qui eſt la moitié du nombre des termes; & le produit $yy+4y$ eſt la ſomme de la progreſſion. Or cette ſomme eſt égale à 96, par la condition du problême: donc j'ai $yy+4y=96$, qui eſt une équation du ſecond dégré.

$$\begin{array}{l} 2 \\ y-1 \\ \hline 2y-2 \\ \quad 5 \\ \hline 2y+3 \text{ dernier terme.} \\ \quad 5 \\ \hline 2y+8 \text{ ſomme des extrêmes.} \\ \frac{1}{2}y \\ \hline yy+4y \text{ ſomme de la progreſſion.} \end{array}$$

$$yy+4y=96$$
$$yy+4y+4=100$$
$$y+2=10$$
$$y=-2+10=8$$

J'ajoute de part & d'autre le quarré 4 de la moitié du coëfficient 4 du ſecond terme; & par ce moyen le premier membre eſt un quarré parfait (221). Je tire la racine quarrée de part & d'autre, & j'ai $y+2=10$: donc $y=-2+10=8$, eſt la premiere racine; & la ſeconde eſt $y=-2-10=-12$ qui eſt une racine négative. Car ſi l'on multiplie $y-8=0$ par $y+12=0$, le produit ſera $yy+4y-96=0$ qui eſt l'équation que nous avions à réſoudre. Or cette équation n'ayant qu'une racine poſitive, le problême n'a qu'une ſolution, & par conſéquent le nombre des jours pendant leſquels les détachemens ſe ſont faits eſt 8, ce que l'on connoîtra aiſément ſi l'on continue la progreſſion 5, 7, &c, juſqu'au huitieme terme qui ſera 19, lequel ajouté au premier fera 24, & cette ſomme multipliée par la moitié 4 du nombre des termes 8, donnera 96: ce qui étoit propoſé.

257. PROBLÊME. IV. *Un voleur fuit, & fait* 10 *lieues par jour: un archer le pourſuit, & fait le premier jour* 3 *lieues, le ſecond* 5, *& ainſi de ſuite, en augmentant toujours de deux: en combien de jours*

le voleur ſera-t-il atteint ; & combien de lieues l'un & l'autre auront-ils fait?

SOLUTION. Je ne connois ici que le premier terme 3, & la différence 2 de la progreſſion. Mais comme le voleur fait tous les jours 10 lieues, je vois que la ſomme de la progreſſion de l'archer ſera égale à 10 multiplié par le nombre de jours qu'il aura employé pour l'atteindre : car on ſuppoſe que l'un & l'autre ſont partis le même jour.

Je nomme donc y le nombre des termes ou des jours; ainſi $y - 1$ ſera le nombre des termes diminué de l'unité. Je multiplie $y - 1$ par la différence 2; & le produit eſt $2y - 2$, auquel ajoutant le premier terme 3, la ſomme $2y + 1$, eſt le dernier terme (252). J'ajoute le premier terme 3 au dernier; & j'ai la ſomme des extrêmes $2y + 4$. Je multiplie cette ſomme par $\frac{1}{2}y$; & le produit eſt la ſomme de la progreſſion. Or cette ſomme eſt égale à 10 multiplié par y; comme nous venons de dire : donc j'ai l'équation $yy + 2y = 10y$, & diviſant tout par y, puis faiſant paſſer 2 dans le ſecond membre, je trouve $y = 8$. Ainſi l'archer a atteint le voleur dans 8 jours; ce que l'on prouvera en continuant la progreſſion 3, 5, &c, juſqu'au huitieme terme que l'on trouvera être 17 : & ajoutant ce terme au premier, ce qui fera 20, puis multipliant par la moitié 4 du nombre des termes; on trouvera 80 pour la ſomme de la progreſſion, & cette ſomme ſera égale à 10 multiplié par le nombre des termes 8. Ainſi le voleur & l'archer auront fait 80 lieues chacun au bout de 8 jours.

$$\begin{array}{l} y - 1 \\ \quad 2 \\ \hline 2y - 2 \\ \quad\quad 3 \\ \hline 2y + 1 \text{ dernier terme.} \\ \quad\quad 3 \\ \hline 2y + 4 \text{ ſomme des extrêmes.} \\ \frac{1}{2}y \\ \hline yy + 2y \text{ ſomme de la progreſſion.} \\ yy + 2y = 10y \\ y + 2 = 10 \\ y = 10 - 2 = 8 \end{array}$$

258. PROBLÊME V. *Un homme a gagné au jeu pendant quelques jours une progreſſion de louis dont la ſomme totale eſt 48 louis ; & la ſomme des extrêmes eſt 16 louis : on demande combien de jours il a joué, ce qu'il a gagné le premier jour, & de combien le gain de chaque jour s'augmentoit au-deſſus du précédent.*

SOLUTION. Je diviſe la ſomme de la progreſſion par la ſomme 16 des extrêmes; & le quotient 3 eſt la moitié du nombre des termes (251). Ainſi cet homme a joué pendant 6 jours.

Maintenant pour répondre à ce qu'on me demande encore, je nomme x le premier terme, & y la différence. Je multiplie la différence par $6 - 1$, ou par 5; & ajoutant au produit $5y$, le premier terme x; la ſomme $5y + x$ eſt le dernier terme (252). J'ajoute à ce dernier terme, le premier terme; je multiplie la ſomme $5y + 2x$ par 3, qui eſt la moitié du nombre des termes, & le produit eſt la ſomme de la progreſſion (251). Ainſi j'ai $15y + 6x = 48$, & faiſant paſſer $6x$ dans le ſecond membre, puis diviſant tout par 15; j'ai $y = \frac{48-6x}{15}$, & le problême eſt indéterminé.

$$\begin{array}{r} y \\ 5 \\ \hline 5y \\ x \\ \hline \end{array}$$

$5y + x$ dernier terme.
$5y + 2x$ ſomme des extrêmes.
3
$15y + 6x = 48$
$15y = 48 - 6x$
$y = \frac{48-6x}{15}$

Or je vois que pour déterminer x, il faut qu'en retranchant $6x$ de 48, le reſte puiſſe être diviſé exactement par 15, ſi je veux que la valeur $\frac{48-6x}{15}$ de la différence y ſoit une grandeur ſans fraction.

Je ſuppoſe donc $x = 3$, & par conſéquent $6x = 18$; & de 48 ôtant 18, le reſte 30 diviſé par 15 donne au quotient $2 = y$. Ainſi cet homme a gagné le premier jour 3 louis, le ſecond 5, &c; en ſorte que la progreſſion eſt $3, 5, 7, 9, 11, 13$: & il eſt aiſé de voir que ces nombres rempliſſent les conditions du problême.

Et cette ſolution eſt la ſeule que l'on puiſſe trouver, ſi l'on veut que le premier terme & la différence ſoient des nombres entiers. Mais ſi cette condition n'eſt pas requiſe, on peut ſuppoſer pour x, tel autre nombre qu'on voudra; pourvu que $6x$ ſoit moindre que 48, & autant de ſuppoſitions qu'on fera pour x, autant on trouvera de différentes ſolutions.

MANIERE DE COMPTER LES PILES DE BOULETS.

259. Les piles de boulets qu'on voit dans les arcenaux ſont, ou des pyramides quarrées, telles que celle de la *figure* 12 de la planche qu'on trouvera à la fin de ce premier livre, ou des pyramides triangulaires (*Fig.* 6), ou des pyramides oblongues (*Fig.* 13), ou des pyramides oblongues qui ont à leurs extrémités deux pyramides quarrées (*Fig.* 14), & qui quelquefois ſont auſſi entrecoupées de pyramides quarrées (*Fig* 15). Il s'agit, en voyant ces pyramides, de ſavoir le nombre de boulets qu'elles contiennent: c'eſt ce que nous allons faire en examinant les formations de ces piles.

260. Si l'on écrit la ſuite des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, &c; & qu'on prenne le premier, puis la ſomme des deux premiers, puis celle des trois premiers, & ainſi de ſuite; on formera une autre ſuite de nombres 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, &c. que l'on nomme *triangulaires* : parce que ce ſont les ſeuls qui puiſſent s'arranger en triangles, comme on voit dans les figures 1. 2. 3. 4. 5.

261. Chaque nombre triangulaire eſt donc la ſomme d'une progreſſion de nombres naturels; & ſon côté eſt toujours égal au dernier terme de la progreſſion qui l'a formé, & auſſi au nombre des termes de cette progreſſion. Par exemple, le côté du nombre triangulaire 10 (*Fig.* 4), qui eſt la ſomme de la progreſſion 1, 2, 3, 4, eſt égal au dernier terme 4 de cette progreſſion, & au nombre des termes de cette progreſſion : car le nombre des termes d'une progreſſion de nombres naturels, eſt toujours égal au dernier terme. Il eſt aiſé de voir que le nombre de rangs que chaque nombre triangulaire contient, eſt auſſi égal à ſon dernier terme, & que par conſéquent on peut prendre ce nombre de rangs pour le nombre de termes de la progreſſion qui a formé le nombre triangulaire, ou le nombre de rangs pour le dernier terme.

262. Connoiſſant donc le côté d'un nombre triangulaire, ſi on ajoute le premier terme à ce côté, & qu'on multiplie la ſomme par la moitié du nombre des rangs, ou ce qui eſt la même choſe, par la moitié du côté; le produit ſera la valeur du nombre triangulaire (251). Ainſi nommant x le dernier terme, ou le côté, & ajoutant 1; la ſomme ſera $x+1$, laquelle multipliée par $\frac{1}{2}x$, donnera le produit $\frac{xx+x}{2}$ qui eſt l'expreſſion générale de tout nombre triangulaire, dans laquelle il n'y a qu'à mettre la valeur de x pour avoir le nombre demandé.

Soit par exemple $x = 7$: donc $xx = 49$; & par conſéquent $\frac{xx+x}{2} = \frac{49+7}{2} = \frac{56}{2} = 28$: & en effet 28 eſt le nombre triangulaire dont le côté eſt 7, & ainſi des autres.

263. Si on prend une ſuite de nombres triangulaires, par exemple les cinq qui ſont exprimés par les figures 1. 2. 3. 4. 5; & qu'on les couche les uns ſur les autres par ordre, en mettant toujours le moindre ſur le plus grand, on formera une pyramide triangulaire (*Fig.* 6). D'où il ſuit qu'une pyramide triangulaire eſt une ſomme de nombres triangulaires.

264. On pourroit donc aiſément former une table, par le moyen de laquelle on trouveroit d'un coup d'œil, quel eſt le nombre de boulets d'une pyramide triangulaire dont on connoîtroit le côté

de la baſe. La premiere colonne contiendroit les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. La ſeconde contiendroit les ſommes ſucceſſives de ces nombres, c'eſt-à-dire les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, &c : & pour former la troiſieme, on prendroit d'abord le premier triangulaire 1, enſuite la ſomme 4 des deux premiers 1, 3; puis la ſomme 10 des trois premiers 1, 3, 6, & ainſi de ſuite : ce qui donneroit les nombres 1, 4, 10, 20, 35, nommés *pyramidaux triangulaires;* parce que ce ſont les ſeuls qui puiſſent s'arranger en pyramides triangulaires.

1ere.	2e.	3e.
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
&c.	&c.	&c.

Pour connoître donc par le moyen de cette table, quel eſt le nombre triangulaire dont le côté eſt 4; on chercheroit dans la premiere colonne le nombre 4, & à côté de ce 4 on trouveroit dans la colonne des nombres triangulaires le nombre 10, qui feroit voir que le nombre triangulaire demandé eſt 10; & ainſi des autres.

De même ſi on vouloit connoître combien de boulets contient une pyramide triangulaire dont le côté de la baſe eſt 5; on chercheroit dans la premiere colonne le nombre 5, & à côté de ce nombre on trouveroit dans la troiſieme colonne le nombre 35, qui feroit voir que la pyramide demandée contient 35 boulets.

Nous donnerons bientôt une méthode plus courte, & qui n'obligera pas de porter toujours avec ſoi une longue table.

265. Les pyramides quarrées ſont compoſées de pluſieurs couches qui ſont en deſcendant 1. 4. 9. 16. 25, &c; c'eſt-à-dire les quarrés des nombres naturels. Par exemple la pyramide de la figure 12, eſt compoſée des cinq quarrés des figures 7, 8, 9, 10, 11. Ainſi pour trouver combien une telle pyramide contient de boulets; il n'y a qu'à ſavoir ce que vaut une ſuite finie de quarrés 1. 4. 9. 16, &c : & cela peut encore ſe trouver en conſtruiſant une table, ainſi qu'on va voir.

266. J'écris dans une colonne les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5, &c. qui marquent les côtés des quarrés. A côté de cette colonne, j'en forme une ſeconde qui contient la progreſſion des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. Je forme une troiſieme colonne, dans laquelle j'écris d'abord 1; puis la ſomme 4 des deux premiers nombres impairs 1, 3; puis la ſomme 9 des trois premiers 1, 3, 5, & ainſi de ſuite : & cette colonne contient les quarrés des nombres naturels 1, 2, 3, de la premiere. Enfin je fais une quatrieme

1ere.	2e.	3e.	4e.
1	1	1	1
2	3	4	5
3	5	9	14
4	7	16	30
5	9	25	55
&c.	&c.	&c.	&c.

colonne, dans laquelle j'écris d'abord 1 ; puis la ſomme 5 des deux premiers quarrés ; puis la ſomme 14 des trois premiers 1, 4, 9 ; & ainſi de ſuite.

Si l'on veut donc ſavoir quel eſt le quarré dont le côté eſt 5 ; on cherchera dans la premiere colonne le nombre 5 ; & à côté de ce nombre on trouvera dans la troiſieme colonne, le nombre 25, qui fait voir que le quarré de 5 eſt 25.

De même ſi l'on veut ſavoir combien de boulets contient une pyramide, dont le côté de la baſe eſt 4 ; on cherchera dans la premiere colonne le nombre 4, & à côté de ce nombre on trouvera dans la quatrieme colonne, le nombre 30 ; qui fait voir que cette pyramide contient 30 boulets, & ainſi des autres.

Comme on n'a pas toujours des tables, & que celles qu'on trouve quelquefois par haſard ſe trouvent ſouvent peu exactes par l'erreur ou la négligence des copiſtes ; je vais donner deux formules aſſez ſimples, pour les pyramides quarrées & triangulaires ; & je ferai voir enſuite comment on peut compter les autres. Ces formules dépendent du théorême ſuivant.

267. THEORÊME. *Si l'on prend la ſuite des nombres naturels*, 0, 1, 2, 3, 4, *&c*, *qui commencent par zéro ; & qu'on en faſſe les quarrés* 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, *&c : je dis que ſi l'on fait la ſomme des deux premiers quarrés ; des trois premiers, &c ; chacune de ces ſommes ſera à ſon dernier terme ou au plus grand quarré qu'elle contient multiplié par le nombre des termes, c'eſt-à-dire par le nombre qui exprime combien il y a de quarrés dans cette ſomme, comme* 1 *à* 3, *plus comme* 1 *à ſix fois la racine du plus grand quarré.*

DÉMONSTRATION. Je pourrois démontrer cette propoſition en employant l'algebre, mais comme le calcul eſt un peu long & compliqué, je me contenterai de le démontrer par une ſimple induction en cette ſorte.

Je prends d'abord les deux premiers quarrés 0, 1 ; leur ſomme eſt 1, & le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes, ou pris autant de fois qu'il y a de termes, eſt 2. Ainſi la ſomme eſt au plus grand quarré multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à 2 ; $\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ & par conſéquent elle en eſt la moitié : or la moitié d'une grandeur eſt égale au tiers, plus au ſixieme de cette grandeur : donc la ſomme des quarrés 0, 1, eſt au dernier multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, plus comme

1 à 6. Mais 6 ou 6 × 1 eſt la même choſe que la racine 1 du plus grand quarré 1 multiplié par 6 : donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, plus comme 1 à 6 fois la racine du plus grand quarré.

Je prends les trois premiers quarrés $0+1+4$, leur ſomme eſt 5 ; & le plus grand 4 multiplié par le nombre des termes, ou pris trois fois eſt 12 : donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 5 eſt à 12 ; & par conſéquent elle en eſt les cinq douziemes. Mais $\frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$, & $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$: donc $\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. Ainſi la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à 3, plus comme 1 eſt à 12, ou 2 × 6. Mais 2×6 eſt égal à la racine 2 du plus grand quarré multiplié par 6 : donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, plus comme 1 à 6 fois la racine 2 du plus grand quarré.

$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

Je prends les quatre premiers quarrés 0, 1, 4, 9, la ſomme eſt 14 ; & le dernier 9 pris 4 fois eſt 36 : donc la ſomme eſt au dernier terme, multiplié par le nombre des termes, comme 14 à 36. Ainſi elle en eſt les $\frac{14}{36}$: or $\frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$, & $\frac{1}{18} = \frac{1}{3\times 6}$: donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, plus comme 1 eſt à 6 fois la racine 3 du plus grand quarré.

$$\frac{0.\ 1.\ 4.\ 9.}{9.\ 9.\ 9.\ 9.} = \frac{14}{36} = \frac{12}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

Je prends les cinq premiers quarrés 0, 1, 4, 9, 16, leur ſomme eſt 30 ; & le dernier 16 pris cinq fois fait 80. Ainſi la ſomme eſt $\frac{30}{80}$, ou $\frac{3}{8}$ du dernier terme multiplié par le nombre des termes : or $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, en multipliant tout par 3 ; & $\frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4\times 6}$: donc la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, plus comme 1 à 4 × 6, ou comme 1 à la racine du plus grand quarré multiplié par 6.

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

Et comme en continuant de prendre un plus grand nombre de quarrés, je trouve toujours la même choſe ; il s'enſuit que le théorême eſt démontré. On trouvera une démonſtration plus géométrique de ceci, dans l'arithmétique des infinis dont nous traiterons dans le ſecond volume.

268. PROBLÊME I. *Trouver combien il y a de boulets dans une pyramide quarrée ?*

SOLUTION. Je ſuppoſe que la ſuite des quarrés qui compoſent la pyramide commence par zéro, & ſoit 0, 1, 4, 9, 16, &c. juſqu'au quarré de la baſe que je nommerai xx. Ainſi le nombre des termes de cette ſuite ſurpaſſera d'une unité, le nombre des couches de la pyramide, & n'augmentera pourtant pas ſa valeur; à cauſe que zéro ajouté à une ſomme ne rend pas cette ſomme plus grande. J'aurai donc $x+1$ pour le nombre des termes; & multipliant le dernier terme par $x+1$, j'aurai x^3+x^2 qui ſera le produit du dernier terme multiplié par le nombre des termes. Or la ſuite 0, 1, 4, 9, 16, &c. xx, eſt égale au tiers de ce produit, plus à une fraction de ce même produit exprimée par $\frac{1}{6x}$, & le tiers de x^3+x^2 eſt $\frac{x^3+x^2}{3}$, & le $\frac{1}{6x}$ eſt $\frac{x^3+x^2}{6x}$: donc la ſuite 0, 1, 4, 9, 16, & xx eſt égale à $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$, & par conſéquent la pyramide donnée ſera $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$: ce qui donne la regle ſuivante.

REGLE. *Faites la ſomme du cube & du quarré du dernier terme; diviſez cette ſomme par 3, enſuite diviſez la même ſomme par 6 fois la racine du dernier terme, ou par 6 fois le côté de la baſe de la pyramide; & les deux quotiens ajoutés enſemble vous donneront la ſomme des boulets.*

EXPLICATION. Soit $x=9$, c'eſt-à-dire ſuppoſons que le côté de la baſe de la pyramide contienne 9 boulets. Nous aurons $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}=\frac{729+81}{3}+\frac{729+81}{6\times 9}=\frac{810}{3}+\frac{810}{54}$: or $\frac{810}{3}=270$, & $\frac{810}{54}=15$: donc $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}=270+15=285$. Ainſi la pyramide contiendra 285 boulets : & en effet, ſi l'on fait la ſuite des quarrés 1, 4, 9, 16, &c. juſqu'au dernier qui ſera 81, puiſque le côté de la baſe eſt 9, & qu'on additionne ces quarrés, on trouvera que la ſomme eſt 285.

269. PROBLÊME II. *Trouver le nombre de boulets contenus dans une pyramide triangulaire.*

SOLUTION. Nous avons déja dit que toute pyramide triangulaire eſt une ſuite ou une ſomme de nombres triangulaires (263); & que tout nombre triangulaire eſt la ſomme d'une progreſſion de nombres naturels. (260). Cela poſé,

Supposons que la suite des nombres triangulaires qui composent la pyramide commence par zéro, & que la progression des nombres naturels ait aussi zéro pour son premier terme : ce qui fera que le nombre des termes surpassera d'une unité le nombre des rangs de la pyramide, & le nombre des termes de la progression 1, 2, 3, &c ; sans augmenter pourtant la valeur ni de la pyramide, ni de la progression naturelle 1, 2, 3, &c.

Or delà il arrivera qu'en nommant x le dernier terme de la progression 0. 1. 2. 3, &c, qui formera un nombre triangulaire ; le nombre des termes sera $x+1$, & par conséquent la somme de la progression sera $x+0$ multiplié par $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (251). Or $x+0$, ou x multiplié par $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, donne $\frac{xx+x}{2}$: donc le nombre triangulaire formé par cette progression, sera encore $\frac{xx+x}{2}$, de même que nous l'avons trouvé ci-dessus (262) : ce qui doit être effectivement ; à cause que zéro ajouté à une valeur, ne l'augmente point.

Maintenant exprimons la progression 0, 1, 2, 3, 4, &c, par les caracteres 0, a, b, c, d, &c, jusqu'au dernier que nous nommerons x, & qui par conséquent sera le côté de la base de la pyramide. Le nombre triangulaire 0 sera donc $\frac{0^2+0}{2}$, le nombre triangulaire formé par les deux premiers termes 0, a, sera $\frac{aa+a}{2}$; celui qui sera formé par les trois premiers termes 0, a, b, sera $\frac{bb+b}{2}$, & ainsi de suite jusqu'au dernier nombre triangulaire qui sera $\frac{xx+x}{2}$, & il ne s'agit plus que de trouver la somme de tous ces nombres.

Pour cela négligeons d'abord le diviseur 2, & faisons la somme de tous les numérateurs, laquelle nous diviserons ensuite par le diviseur 2 que nous aurons négligé. Cette somme sera composée de deux suites dont l'une sera la suite des quarrés des nombres naturels 0, 1, 2, 3, &c. x ; & l'autre sera la suite de ces mêmes nombres : or la suite des quarrés est $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^2+x}{6x}$ (268) ; & la suite de la progression 0, 1, 2, 3, &c. x, est $\frac{xx+x}{2}$, comme nous venons de voir. Ajoutant donc ensemble ces deux suites, la somme des nombres triangulaires sera $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^2+x}{6x}+\frac{xx+x}{2}$.

0^2+0
a^2+a
b^2+b
c^2+c
&c.
x^2+x

Je réduis ces trois fractions au même dénominateur, en multipliant le numérateur & le dénominateur de la premiere par 2, & ceux de la derniere par 3, & en diviſant le numérateur & le dénominateur de la ſeconde par x : ce qui donne $\frac{2x^3+2x^2}{6}+\frac{x^2+x}{6}+\frac{3xx+3x}{6}$, & corrigeant l'expreſſion, j'ai $\frac{2x^3+6x^2+4x}{6}$ qui ſe réduit à $\frac{x^3+3x^2+2x}{3}$, en diviſant le numérateur & le dénominateur par 2. Enfin je diviſe cette fraction par le diviſeur 2 que j'ai négligé; & le quotient $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$ eſt la pyramide cherchée : d'où l'on tire la regle ſuivante.

REGLE. *Prenez le cube du côté de la baſe, trois fois le quarré de ce côté, & deux fois ce côté; faites-en la ſomme, & diviſez-la par 6 : ce qui donnera le nombre de boulets contenus dans la pyramide triangulaire.*

EXPLICATION. Soit 8 le côté de la baſe : ainſi $x=8$, & par conſéquent $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}=\frac{512+192+16}{6}=\frac{720}{6}=120$. Ainſi 120 ſera le nombre de boulets : & en effet ſi l'on prend les huit premiers nombres triangulaires, dont le dernier aura 8 au côté, on trouvera que leur ſomme eſt égale à 120.

270. PROBLÊME III. *Trouver quel eſt le nombre de boulets contenus dans une pyramide oblongue, ou dans une pyramide oblongue terminée par des pyramides quarrées, ou dans une pyramide oblongue terminée & entrecoupée par des pyramides quarrées.*

SOLUTION. I°. Soit la *pyramide oblongue* ABG : cette pyramide eſt compoſée de la pyramide quarrée ABC, & de la figure oblongue DEHGF. Ainſi le nombre de boulets contenus dans ces deux figures, eſt le même que celui qui eſt contenu dans la figure entiere. (*Fig.* 13.)

Or la pyramide ayant 6 boulets au côté de ſa baſe, je fais le cube de 6 qui eſt 216, & le quarré de 6 qui eſt 36 : j'ajoute ces deux quantités enſemble ; ce qui donne la ſomme 252 : je diviſe cette ſomme par 3, & le quotient eſt 84 : je diviſe la même ſomme par 6×6, ou par 36; & le quotient eſt 7 : j'ajoute les deux quotiens 84 & 7, & la ſomme 91 eſt le nombre de boulets contenus dans la pyramide ABC.

Maintenant la figure DEHGF n'eſt autre choſe que le triangle FHG pris autant de fois qu'il y a de boulets dans le rang DF ; mais

le triangle FHG a ſix boulets à ſa baſe HG : donc ce triangle eſt $\frac{36+6}{2} = \frac{42}{2} = 21$ (262). Multipliant donc 21 par le nombre 18 des boulets du rang DF, le produit 378 eſt le nombre de boulets contenus dans la figure DEHGF : donc en ajoutant 378 au nombre 91 de la pyramide quarrée ABC, la ſomme 469 ſera la ſomme totale des boulets de la figure 13.

II°. Soit la *pyramide oblongue terminée par deux pyramides quarrées* (*Fig.* 14). Les deux pyramides étant égales ; je meſure la pyramide ABC, en faiſant la ſomme 576, du cube 512, & du quarré 64 du côté BC = 8 : je diviſe cette ſomme par 3, & le quotient eſt 192 : je diviſe la même ſomme par 6 × 8, ou par 48 ; & le quotient eſt 12 : j'ajoute les deux quotiens enſemble ; ce qui donne 204 pour le nombre des boulets de la pyramide ABC. Ainſi doublant ce nombre, ce qui fait 408 ; j'ai le nombre des boulets des deux pyramides ABC, DEF.

Je coupe la figure qui eſt entre les deux pyramides, en deux parties ; dont l'une HRNM eſt une figure oblongue, & l'autre SPV eſt une pyramide triangulaire. Or la figure HRNM n'eſt autre choſe que le triangle dont le côté eſt NM = 4 pris autant de fois qu'il y a de boulets dans le rang HM = 17. C'eſt pourquoi faiſant le triangle du côté NM, qui eſt $\frac{16+4}{2} = \frac{20}{2} = 10$; & multipliant 10 par 17 ; le produit 170 eſt la ſomme des boulets contenus dans HRMN.

La pyramide triangulaire SPV ayant trois boulets au côté de ſa baſe PV, eſt $\frac{27+27+6}{6} = \frac{60}{6} = 10$. (269) : ajoutant donc 10 au nombre 170 de la figure HRNM, la ſomme 180 eſt le nombre de boulets contenus entre les deux pyramides. Donc en ajoutant 180 à la ſomme 408 des deux pyramides, la ſomme 588 eſt le nombre de tous les boulets de la figure 14. Il eſt aiſé de calculer de la même façon, la figure 15.

271. *REMARQUE.* Si l'on trouve que la formule $\frac{x^3+x^2}{3} + \frac{x^3+x^2}{6x}$ eſt un peu embarraſſante ; on la ſimplifiera en cette ſorte. Je diviſe le numérateur & le dénominateur de la ſeconde fraction par x, & j'ai $\frac{x^2+x}{6}$, qui eſt encore la même que $\frac{x^3+x^2}{6x}$ (33). Je multiplie le numérateur & le dénominateur de la premiere fraction par 2 ; & j'ai $\frac{2x^3+2x^2}{6}$, qui eſt encore la même que $\frac{x^3+x^2}{3}$ (32). Ainſi la for-

mule se change en celle-ci $\frac{2x^3+2x^2+x^1+x}{6}$, laquelle, en corrigeant l'expression, est $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$, formule des pyramides quarrées; & cette formule ne differe de celle des pyramides triangulaires, qui est $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$; qu'en ce que dans l'une le terme x^3 est multiplié par 2, & le terme x n'est multiplié que par l'unité: au lieu que dans l'autre le terme x^3 est multiplié par l'unité, & le terme x est multiplié par 2. Les trois formules pour les piles de boulets sont donc, en mettant x pour le côté de sa base,

$\frac{xx+x}{2}$, Formule des triangles.

$\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$ Formule des pyramides quarrées.

$\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$, Formule des pyramides triangulaires.

CHAPITRE VIII.

DES RAISONS, PROPORTIONS, ET PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

272. SI le premier terme d'une raison géométrique est égal au second, la raison s'appelle *raison d'égalité*: s'il est plus grand la raison se nomme *raison de plus grande inégalité*: & s'il est moindre, c'est une *raison de moindre inégalité*.

273. Il ne faut pas confondre la raison d'égalité avec ce qu'on nomme *égalité de raisons*: car la raison d'égalité, est entre deux grandeurs égales: & l'égalité des raisons est entre deux raisons égales. Quand on dit $a = b$, voilà une raison d'*égalité*; & quand on dit $a, b :: c, d$, voilà une *égalité* de raisons. Ainsi l'un est bien différent de l'autre.

274. Quand l'antécédent contient un certain nombre de fois exactement son conséquent, comme deux fois, trois fois, &c; la raison se nomme double, triple, quadruple, &c, & en général *multiple*. Mais si l'antécédent ne contient pas exactement son conséquent, comme par exemple 3 qui contient 2 une fois & demi: on se contente d'exprimer la raison par ses termes, en disant que la raison est de 3 à 2; & on en agit ainsi pour éviter les noms barbares de *sesquialtere*, *sesquitierce*, *surparticuliere*, *surpatiente*, *surbipatiente*, &c, dont les anciens se servoient.

275. Quand le conſéquent contient un certain nombre de fois exactement ſon antécédent, la raiſon eſt ſous-double, ſous-triple, ſous-quadruple, &c, & en général *ſous-multiple* : parce que dans toute raiſon, c'eſt toujours le premier terme qu'on rapporte au ſecond ; & qu'alors le premier eſt la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c, du ſecond. Mais dans les cas ou l'antécédent n'eſt pas contenu exactement dans le conſéquent, on exprime la raiſon par ſes termes mêmes ; comme la raiſon de 2 à 3, de 4 à 5, &c.

276. L'*expoſant d'une raiſon* étant le quotient de la diviſion de l'antécédent par le conſéquent (239) ; il eſt clair que le moindre terme multiplié par l'expoſant, doit être égal au plus grand : puiſque dans toute diviſion le produit du diviſeur par le quotient eſt égal au dividende (29).

Ainſi dans la raiſon a, b ; ſi a eſt plus grand que b, & que le quotient de a diviſé par b, ou l'expoſant, ſoit nommé p ; on aura $a = bp$. Si au contraire a eſt plus petit que b, & que le quotient de a diviſé par b, ou l'expoſant, ſoit encore nommé p ; on aura également $a = bp$ (239).

Théorêmes.

277. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens : & ſi la proportion eſt continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne.*

DÉMONSTRATION I°. Soit la proportion géométrique $a. b :: c. d$. Je nomme p l'expoſant de la raiſon a, b ; lequel eſt le même que l'expoſant de la raiſon c, d : puiſque ces deux raiſons étant égales, le premier antécédent a contient ſon conſéquent b ou une partie de ce conſéquent, de la même façon que l'antécédent c contient ſon conſéquent d, ou une partie de ce conſéquent. Ainſi nous aurons $a = bp$, & $c = dp$; & mettant ces valeurs de a & de c dans la proportion, nous aurons $bp. b :: dp. d$: & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous aurons bpd, & dpb. Or ces deux produits ſont égaux ; puiſqu'ils ſont formés par les mêmes grandeurs : donc $bpd = dpb$: & remettant dans cette équation a au lieu de bp, & c au lieu de dp ; nous aurons $ad = bc$. Par conſéquent le produit des extrêmes, eſt égal au produit des moyens.

II°. Si la proportion étoit continue, comme $: a, b$; on l'écriroit ainſi $a, b :: b, c$: & nommant l'expoſant p ; la premiere raiſon a, b, ſeroit la même que bp, b ; & la ſeconde raiſon b, c, ſeroit la même que $cp. c$. Ainſi la proportion ſe changeroit en celle-ci $bp. b :: cp. c$,

qui ſeroit encore la même : & faiſant le produit des extrêmes, & celui des moyens, on auroit $bpc = cbp$. Mais $bp = a$, & $cp = b$; mettant donc a au lieu de bp dans le premier produit, & b au lieu de cp dans le ſecond; on auroit $ac = bb$, c'eſt-à-dire le produit des extrêmes égal au quarré de la moyenne. C. Q. F. D.

278. COROLLAIRE I. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont diſpoſées de telle façon que le produit des extrêmes ſoit au produit des moyens; ces quatre grandeurs ſeront en proportion.*

DÉMONSTRATION. Si cela n'étoit pas, l'expoſant de la raiſon a, b, ſeroit donc différent de l'expoſant de la raiſon c, d. Nommons le premier p, & le ſecond q : donc nous aurons $a = bp$, & $c = dq$. Ainſi les quatre grandeurs ſeront bp, b, dq, d; & le produit des extrêmes bpd, ne ſera pas égal à celui des moyens bdq; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

279. COROLLAIRE II. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont proportionnelles; on trouvera toujours qu'elles ſont en proportion, de quelque façon qu'on les diſpoſe : pourvu que l'on obſerve que les extrêmes reſtent tous deux extrêmes, ou qu'ils deviennent tous deux moyens; & que les moyens reſtent tous deux moyens, ou qu'ils deviennent tous deux extrêmes.*

On pourra donc faire les ſept changemens ſuivans, dans leſquels il eſt aiſé de voir que la proportion ſubſiſte toujours : puiſque le produit des extrêmes & celui des moyens ſont toujours les mêmes que le produit des extrêmes & celui des moyens des quatre grandeurs a, b, c, d; ſçavoir $ad = bc$, & $bc = ad$.

	$a. b :: c. d$	$ad = bc$
1er	$a. c :: b. d.$	$ad = bc$
2e	$b. a :: d. c.$	$cb = ad$
3e	$b. d :: a. c.$	$cb = ad$
4e	$d. c :: b. a.$	$ad = cb$
5e	$c. a :: d. b.$	$cb = ad$
6e	$d. b :: c. a.$	$ad = cb$
7e	$c. d :: a. b.$	$cb = ad$

Le premier changement ſe nomme *alternando* : parce qu'on compare les grandeurs alternativement, la premiere à la troiſieme, & la ſeconde à la quatrieme.

Le ſecond ſe nomme *invertendo*, ou *permutando* : parce qu'on met les conſéquens à la place des antécédens.

Les autres n'ont d'autres noms que ceux qu'ils tirent de l'arrangement de leurs termes. Ainſi dans le troiſieme, on compare le premier conſéquent au ſecond, & le premier antécédent au ſecond antécédent : dans le quatrieme, on compare le ſecond conſéquent

à ſon antécédent, & le premier conſéquent à ſon antécédent, &c.

280. COROLLAIRE. III. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont proportionnelles, & qu'on ajoute ou qu'on retranche chaque conſéquent de ſon antécédent, ou chaque antécédent de ſon conſéquent, il y aura toujours proportion.*

Ainſi l'on pourra faire les changemens ſuivans, dans leſquels je vais démontrer que la proportion ſubſiſte toujours.

Le produit des extrêmes du premier changement eſt $ad + db$, & celui des moyens eſt $bc + bd$. Or les termes bd, db ſont égaux; & les termes ad, bc, le ſont auſſi: puiſque les quatre grandeurs proportionnelles a, b, c, d, donnent $ad = bc$: donc les produits $ad + db$ & $bc + bd$, étant compoſés de quantités égales ſont parfaitement égaux, & ainſi des autres. Le premier & le troiſieme de ces changemens ſe nomment *componendo*; & le ſecond & le quatrieme ſe nomment *dividendo.*

	$a. b :: c. d$	$ad = bc$
1er	$a + b. b :: c + d. d$	$ad + bd = bc + bd$
2	$a - b. b :: c - d. d$	$ad - bd = bc - bd$
3	$a. a + b :: c. c + d$	$ac + ad = ac + bc$
	$a. a - b :: c. c - d$	$ac - ad = ac - bc$

281. REMARQUE. Il eſt clair qu'on peut faire la même choſe dans les ſept diſpoſitions du ſecond Corollaire. Or quand on dit $b + a. a :: d + c. c$; ou $b - a. a :: d - c. c$; c'eſt-à-dire le premier conſéquent plus ou moins ſon antécédent; cela ſe nomme *convertendo*, ou converſion de raiſon.

282. COROLLAIRE IV. *Si quatre grandeurs ſont en proportion, & qu'on ajoute ou qu'on retranche des deux premiers termes, ou des deux derniers, ou des deux antécédens, ou des deux conſéquens, ou enfin des quatre termes, des grandeurs qui ſoient en même raiſon que ces termes; il y aura toujours proportion.*

DÉMONSTRATION. Soit la proportion $a. b :: c. d$. Je prends les deux grandeurs m, n, qui ſont en même raiſon que a & b, & je dis que $a + m. b + n :: c. d$.

Suppoſons que l'expoſant de la raiſon a, b, ſoit p; & nous aurons $a = pb$: ainſi l'expoſant de la raiſon m, n, étant auſſi p;

	$a. b :: c. d$
1re	$a + m. b + n :: c. d$
2e	$a - m. b - n :: c. d$
3e	$a + m. b :: c + n. d$
4e	$a - m. b :: c - n. d$
5e	$a. b + m :: c. d + n$
6e	$a. b - m :: c. d - n$
7e	$a + m. b + r :: c + n. d + t$
8e	$a - m. b - r :: c - n. d - t$

nous aurons $m = np$. Mettant donc les valeurs de a & de m, dans $a + m$ & $b + n$; nous aurons $pb + np$, $b + bn$. Or ſi je diviſe le premier terme de cette raiſon par le ſecond; le quotient ou l'expoſant ſera p; c'eſt-à-dire, le même que celui de la raiſon a, b; ou de la raiſon c, d: & par conſéquent les trois raiſons $pb + np, b + n$; a, b; c, d; ſeront égales. Mais la raiſon $pb + np, b + n$, eſt égale à la raiſon $a + m, b + n$: donc celle-ci eſt auſſi égale à chacune des deux raiſons a, b; c, d; & partant $a + m, b + n :: c. d.$

Il eſt aiſé de démontrer la même choſe dans le troiſieme, quatrieme, cinquieme & ſixieme cas; en ſuppoſant que les grandeurs m, n, ſont en même raiſon que les antécédens a, b, ou que les conſéquens b, d. Dans le ſeptieme & le huitieme cas, les grandeurs m, r, de même que les grandeurs n, s, doivent être dans la même raiſon que les termes a, b; ou c, d.

283. COROLLAIRE V. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont en proportion, & qu'on les multiplie par quatre autres grandeurs* e, f, g, h, *qui ſoient auſſi en proportion, c'eſt-à-dire chaque terme par chaque terme: les produits ſeront encore en proportion: & ce ſeroit la même choſe ſi on diviſoit chaque terme par chaque terme.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de prouver que $ae. bf :: cg. dh$. Je nomme p l'expoſant de la premiere proportion, donc $a = bp$, & $c = dp$: & mettant ces valeurs de a & de c dans la premiere proportion, j'ai $bp. b. :: dp. c.$

$a. b :: c. d.$
$e. f. :: g. h.$
$ae. bf :: cg. dh$

Je nomme q l'expoſant de la ſeconde proportion, & partant $e = fq$, & $g = hq$: & mettant les valeurs de e & de g dans la ſeconde proportion, j'ai $fq. f :: hq. h$. Je multiplie les termes de la proportion $bp. b :: dp. c$, par les termes de la ſeconde $fq. f :: hq. h$: & je trouve $bpfq. bf :: dphq. dh$.

$bp. b :: dp. d.$
$fq. f :: hq. h.$
$bpfq. bf :: dphq. dh$

Je diviſe le premier terme de la premiere raiſon par le ſecond, & le quotient ou l'expoſant eſt pq. Je diviſe de même le premier terme de la ſeconde raiſon par le ſecond terme; & le quotient ou l'expoſant eſt encore pq: donc ces deux raiſons ſont egales. Mais la premiere raiſon $bpfq, bf$, eſt la même que la raiſon ae, bf; & la ſeconde raiſon $dphq, dh$, eſt la même que cg, dh: donc les raiſons ae, bf, & cg, dh, ſont égales; & partant $ae. bf :: cg. dh$.

Maintenant ſuppoſons que les termes de la premiere proportion ſoient diviſés par ceux de la ſeconde: ce qui donne $\frac{a}{e}. \frac{b}{f} :: \frac{c}{g}. \frac{d}{h}$. Je mets

les valeurs de a, c, e, g, trouvées ci-deſſus ; & j'ai $\frac{bp}{fq}.\frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq}.\frac{d}{h}$: & diviſant l'antécédent de chaque raiſon par ſon conſéquent, le quotient ou l'expoſant eſt de part & d'autre $\frac{p}{q}$: donc les deux raiſons ſont égales, & par conſéquent $\frac{bp}{fq}.\frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq}.\frac{d}{h}$. Mais $\frac{bp}{fq} = \frac{a}{e}$, & $\frac{dp}{hq} = \frac{c}{g}$: donc $\frac{a}{e}.\frac{b}{f} :: \frac{c}{g}.\frac{d}{h}$.

$a. b :: c. d.$
$e. f :: g. h.$

$\frac{a}{e}.\frac{b}{f} :: \frac{c}{g}.\frac{d}{h}$

$\frac{bp}{fq}.\frac{b}{f} :: \frac{dp}{hq}.\frac{d}{h}$

284. COROLLAIRE VI. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont en proportion, leurs quarrés, leurs cubes, leurs quatriemes puiſſances, &c. ou leurs racines ſecondes, troiſiemes, &c, ſont auſſi en proportion.*

DÉMONSTRATION. Quand on éleve les quatre grandeurs a, b, c, d, au quarré ; on fait la même choſe que ſi on multiplioit les termes de la proportion $a. b :: c. d$, par les termes d'une autre proportion $a. b :: c. d$. Or en ce cas les produits ſont en proportion (283) : donc les quarrés qui ne ſont autre choſe que les produits, ſont auſſi en proportion. Donc la proportion des quarrés, multipliée par celle des premieres puiſſances, donnera une autre proportion qui ſera celle des cubes ; & celle des cubes, multipliée par celle des premieres puiſſances, donnera celle des quatriemes puiſſances, &c.

Maintenant puiſque les quarrés étant en proportion, les racines le ſont auſſi ; ſi nous regardons les termes de la proportion $a. b :: c. b$, comme des grandeurs quarrées, leurs racines quarrées donneront par conſéquent la proportion $\sqrt{a}, \sqrt{b} :: \sqrt{c}. \sqrt{d}$, & ſi nous les regardons comme des cubes, leurs racines cubiques donneront la proportion $\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c}. \sqrt[3]{d}$, & ainſi des autres.

285. REMARQUE. Il eſt aiſé de voir que *ſi quatre grandeurs ſont en proportion, leurs doubles, ou leurs triples, & en général leurs équimultiples, c'eſt-à-dire les grandeurs qui les contiennent un même nombre de fois, ou leurs tiers, leurs quarts, &c, & en général leurs ſous-équimultiples, c'eſt-à-dire les grandeurs qu'elles contiennent un même nombre de fois, ſont encore en proportion.*

Car en prenant leurs doubles, ou leurs triples, &c, on les multiplie toutes ou par 2, ou par 3, &c : & en prenant leurs moitiés, ou leurs tiers, &c, on les diviſe toutes ou par 2 ou par 3, &c : & par conſéquent les deux premiers termes ſont encore en même rai-

ſon après la multiplication ou la diviſion, qu'ils l'étoient auparavant (32. 33), & la même choſe arrive aux deux derniers. Donc les quatre produits ou les quatre quotiens étant encore en même raiſon, la proportion ſubſiſte; & elle ſubſiſteroit auſſi, ſi on multiplioit ou diviſoit les quatre grandeurs, ou les deux premieres, ou les deux dernieres, ou les antécédens ou les conſéquens, par tel nombre que l'on voudroit, entier, ou rompu, ou compoſé d'entier & de fraction,

286. COROLLAIRE VII. *Si deux produits ſont égaux, on pourra toujours en tirer une proportion, en mettant les deux grandeurs qui compoſent le premier, à la place des deux extrêmes, ou des deux moyens; & celles qui compoſent le ſecond, à la place des moyens, ou à la place des extrêmes.*

DÉMONSTRATION. Soient les produits $ad = cb$. Je dis qu'on aura $a. b :: c. d$, ou $a. c :: b. d$: ce qui eſt évident; puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

287. Les deux grandeurs du premier produit ſont dites *réciproques* aux grandeurs du ſecond produit égal au premier: parce qu'ayant pris le premier antécédent dans le premier produit, & ſon conſéquent dans le ſecond; on prend réciproquement le ſecond antécédent dans le ſecond produit, & ſon conſéquent dans le premier.

288. COROLLAIRE VIII. *Si la raiſon des deux grandeurs* a, b, *eſt plus grande que celle de deux autres grandeurs* c, d; *le produit des extrêmes ſera plus grand que celui des moyens; & au contraire, ſi la raiſon* a, b *eſt moindre que la raiſon* c, d, *le produit des extrêmes eſt moindre que celui des moyens.*

DÉMONSTRATION. Si la raiſon a, b, étoit égale à la raiſon c, d; on auroit $ad = bc$. Or par la ſuppoſition le premier antécédent eſt plus grand qu'il ne faut; puiſque la raiſon a, b, eſt plus grande que la raiſon b, c: donc ad doit être plus grand que bc. Mais ſi la raiſon a, b, eſt moindre que la raiſon b, c, le premier antécédent a eſt plus petit qu'il ne faut: donc ad eſt moindre que cd.

289. *REMARQUE.* Si la raiſon a, b, eſt plus grande ou moindre que la raiſon c, d; on trouvera toujours en alternant, en permutant, en un mot en faiſant tous les changemens marqués ci-deſſus, (279. 280. &c.), que le produit des extrêmes ſera plus grand ou moindre que celui des moyens. Car ſi on alterne, en diſant a, c, & b, d: les produits ad, bc, ſeront encore les mêmes: & par conſéquent ad ſera plus grand ou moindre que bc. De même ſi on com-

poſe, en diſant $a+b.\ b$, & $c+d, b$; les produits ſeront $ad+bd$, & $bc+bd$: & retranchant bd de part & d'autre, il reſtera ad plus grand ou moindre que bc; & on prouvera aiſément la même choſe de tous les autres cas.

290. PROBLÊME I. *Trois termes d'une proportion géométrique étant connus, trouver celui que l'on ne connoît pas.*

SOLUTION. Je nomme x le terme inconnu; & ce terme eſt ou le premier de la proportion, ou le ſecond, ou le troiſieme, ou enfin le quatrieme. Suppoſons qu'il ſoit le dernier: je nomme a la grandeur qui doit être le premier terme, b celle qui doit être le ſecond, & c celle qui doit être le troiſieme. J'ai donc cette proportion $a, b :: c, x$: & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, je trouve $ax=bc$; & diviſant tout par a j'ai $x=\frac{bc}{a}$; c'eſt-à-dire, le quatrieme terme eſt égal au produit des moyens diviſé par le premier extrême.

Si la proportion devoit être $b, a :: x, c$, c'eſt-à-dire que la grandeur inconnue fût la troiſieme; je ferois *invertendo*, $a\ b, :: c, x$: & le produit des extrêmes & celui des moyens, donneroient $ax=bc$; d'où je tirerois $x=\frac{bc}{a}$ de même qu'auparavant.

Si la proportion étoit $c, x :: a, b$, je ferois $a, b :: c, x$ (279): ce qui donneroit encore $ax=bc$, & $x=\frac{bc}{a}$

Enfin ſi la proportion étoit $x, c :: b, a$, je ferois $a, b :: c, x$ (279): ce qui donneroit encore $ax=bc$, & $x=\frac{bc}{a}$.

D'où l'on voit qu'en arrangeant les termes de façon que x devienne le dernier, & qu'il y ait toujours proportion; on aura toujours l'inconnue x, égale au produit des moyens diviſé par le premier extrême.

291. Au reſte il n'eſt pas abſolument néceſſaire de faire les changemens que j'ai fait dans les trois derniers cas: car on voit aiſément que le produit des extrêmes & celui des moyens, auroit toujours donné $bc=ax$, ou $ax=bc$; ce qui revient au même: & que par conſéquent $x=\frac{bc}{a}$. Mais il auroit fallu établir des regles différentes pour chaque cas: au lieu que par les changemens de diſpoſitions dans les termes, nous n'avons qu'une ſeule regle, comme on vient de voir. D'ailleurs ceci a encore une autre utilité dont nous parlerons bientôt.

292. PROBLÊME II. *Deux termes d'une proportion continue étant connus, trouver celui qui eſt inconnu.*

SOLUTION. Si le terme x, qui manque, eſt le dernier; la propor-

tion ſera $a, b :: b, x$: d'où l'on tire $ax = bb$, & $x = \frac{bb}{a}$.

Si x eſt le premier terme, la proportion ſera $x, b :: b, a$, ou $a, b :: b, x$; d'où l'on tire encore $ax = bb$, & $x = \frac{bb}{a}$: ce qui fait voir que dans ces deux cas, l'inconnue ſera égale au quarré de la moyenne, diviſé par l'autre grandeur connue.

Mais ſi la proportion eſt $a, x :: x, b$, on aura $xx = ab$; & tirant la racine quarrée de part & d'autre, on aura $x = \sqrt{ab}$: c'eſt-à-dire l'inconnue eſt égale à la racine quarrée du produit des extrêmes.

DE LA PROPORTION INVERSE.

293. Les proportions dont nous venons de parler, ſe nomment proportions *directes* : à cauſe que le premier terme eſt au ſecond, comme le troiſieme eſt au quatrieme. Mais ſi le premier étoit au ſecond, comme le quatrieme au troiſieme; la proportion ſe nommeroit *inverſe*. Or cette proportion peut changer aiſément en proportion directe ; en mettant le quatrieme terme au lieu du troiſieme, & le troiſieme au lieu du quatrieme. Par exemple, ſoient les quatre grandeurs a, b, c, d, diſpoſées de façon que la premiere ſoit à la ſeconde, comme la quatrieme eſt à la troiſieme : j'écris $a. b :: d. c$, & la proportion devient directe ; & ainſi des autres.

DE LA REGLE DE TROIS DIRECTE.

294. La *regle de trois directe*, n'eſt autre choſe qu'une proportion directe dont le quatrieme terme eſt inconnu : le problême ſuivant en offre un exemple.

PROBLÊME. *Deux hommes gagnent* 10 *écus par jour : combien* 12 *hommes en gagneront-ils ?*

SOLUTION. Je vois que le nombre de 12 hommes étant plus grand que celui de deux hommes; le gain de 12 hommes doit être à proportion plus grand que le gain de deux hommes. C'eſt pourquoi j'ai cette proportion directe : le nombre 2 hommes, eſt au nombre 12 hommes ; comme le gain 10 de 2 hommes, eſt au gain que 12 hommes doivent faire : & ce quatrieme terme eſt l'*inconnue* que je cherche. Or l'inconnue eſt égale au produit des moyens diviſé par la premiere extrême (290) : multipliant donc 12

2. 12. 10.

10 — 2

120 — 120 (60

00

par 10, & diviſant le produit par 2; le quotient 60 eſt le gain de 12 hommes.

DE LA REGLE DE TROIS INDIRECTE.

295. La regle de *trois* indirecte eſt une proportion inverſe dont le quatrieme terme eſt inconnu : en voici un exemple dans ce problême.

PROBLÊME. 300 *hommes peuvent ſe nourrir pendant* 15 *jours, des munitions de bouche qui ſont dans une place : pendant combien de jours* 400 *hommes pourront-ils ſe nourrir de ces mêmes munitions.*

SOLUTION. Comme 300 hommes mangent moins que 400; il eſt clair qu'ils ſubſiſteront pendant plus long-tems. Ainſi nous avons une proportion inverſe, dont le premier terme 300 eſt au ſecond 400; comme le quatrieme terme ou le nombre inconnu que je cherche & que je nomme x, eſt au troiſieme terme 15 jours. Mettant donc le quatrieme terme au lieu du troiſieme, & le troiſieme au lieu du quatrieme, j'ai 300. 400 :: x. 15, qui eſt une proportion directe (293), dans laquelle l'inconnue eſt le troiſieme terme. Je fais *invertendo* 400. 300 :: 15. x; & l'inconnue eſt à préſent le quatrieme terme. Or ce quatrieme terme eſt égal au produit des extrêmes, diviſé par le premier : multipliant donc 300 par 15, & diviſant le produit par 400; le quotient $11\frac{1}{4}$ eſt le nombre de jours pendant leſquels 400 hommes pourroient ſubſiſter.

400. 300 :: 15. $x = 11\frac{1}{4}$

15

1500
300

4500

400
4500 ($11\frac{100}{450}$ ou $\frac{1}{4}$
500

100

296. Si on n'avoit rien voulu déranger dans la façon dont les termes ſe trouvent diſpoſés dans la queſtion : on voit que pour trouver l'inconnue, il auroit fallu multiplier les deux premiers 300 & 15 l'un par l'autre, & diviſer le produit par le troiſieme terme 400 : c'eſt pourquoi les Arithméticiens donnent ordinairement pour regle de la regle de trois inverſe, *qu'il faut faire le produit des deux premiers termes, & le diviſer par le ſecond : au lieu que dans la regle de trois directe, il faut multiplier le ſecond par le troiſieme, & diviſer le produit par le premier.*

DE LA REGLE DE COMPAGNIE OU DE SOCIÉTÉ.

297. La regle de *compagnie* eſt ainſi nommée, parce que deux

ou plusieurs personnes ayant fait une société, laquelle a gagné ou perdu une certaine somme, on demande quelle est la part du gain qui revient à chacun, ou la part de la perte que chacun doit supporter à proportion de ce qu'il a mis dans la bourse commune. Cette regle se fait par autant de regles de trois qu'il y a de personnes. En voici un exemple dans ce problême.

PROBLÊME. *Trois personnes ont fait une société de* 600 *livres. Le premier a mis* 100 *livres, le second en a mis* 200, *& le troisieme* 300; *& au bout de quelque tems la Société a gagné* 300 *livres : combien revient-il à chacun ?*

SOLUTION. Pour trouver le gain du premier, je dis : le fonds 600 livres de la Société, est à la mise 100 du premier; comme le gain total, est au gain que ce premier doit avoir : car il ne doit gagner qu'à proportion de ce qu'il a mis. Par la même raison, le fonds 600 est à la mise 200 du second, comme le gain total est au gain du second. Enfin le fonds 600 est à la mise 300 du troisieme, comme le gain total est au gain du troisieme.

600. 100 :: 300. 50. gain du 1er.
600. 200 :: 300. 100. gain du 2e.
600. 300 :: 300. 150 gain du 3e
300. gain du total.

Faisant donc les trois regles de trois; la part du premier est 50, celle du second 100, & celle du troisieme 150; & ces trois parts ajoutées ensemble font le gain total.

298. REMARQUE. On se sert aussi de cette regle, pour diviser une grandeur en parties proportionnelles aux parties connues d'une autre grandeur.

Soit par exemple la quantité a dont les parties sont b, c, d; & l'on demande de partager la quantité f en trois parties proportionnelles aux parties b, c, d.

Pour résoudre ce Problême, je nomme x, y, z, les trois parties de f; & je dis : la grandeur a est à sa partie b, comme la grandeur f est à sa partie x, & faisant la même chose pour trouver les parties y, z, j'ai trois regles de trois à faire, lesquelles me donnent $x = \frac{bf}{a}$, $y = \frac{cf}{a}$, & $z = \frac{df}{a}$.

$a. b :: f. x = \frac{bf}{a}$
$a. c :: f. y = \frac{cf}{a}$
$a. d :: f. z = \frac{df}{a}$

DE LA REGLE D'ALLIAGE.

299. La regle d'alliage est ainsi nommée, parce qu'elle sert à résoudre toutes les questions où il s'agit de faire des mélanges de certaines

taines marchandiſes, ou des alliages de certains métaux à certaines conditions. Les problêmes ſuivans en offrent des exemples.

PROBLÊME I. *Un marchand de vin a deux ſortes de vin : le prix de l'un eſt à 20 ſols la pinte, le prix de l'autre à 12 ; & il veut en faire un mélange de 1888 pintes, qu'il puiſſe vendre à 15 ſols : en ſorte que ce qu'il gagnera ſur celui de 12 ſols, ſoit compenſé par la perte qu'il fera ſur celui de 20 : comment doit-il faire ?*

SOLUTION. J'écris les deux prix 20 & 12 l'un ſous l'autre ; & entre deux un peu vers la droite, j'écris le prix moyen 15. Je prends la différence 5, de 20 à 15 ; & je l'écris vis-à-vis de 12. Je prends auſſi la différence 3, de 12 à 15 ; & je l'écris vis-à-vis de 20. Je fais la ſomme 8 des différences 3 & 5 ; & je dis que ſi ce marchand faiſoit un mélange de 5 pintes à 12 ſols, & de 3 pintes à 20 ſols, ce qui feroit le mélange 8 ; l'argent qu'il retireroit en le vendant à 15 ſols, ſeroit le même que s'il avoit vendu chaque vin à ſon prix.

20.		3.
	15.	
12.		5.
		8.

Pour en concevoir la raiſon, il n'y a qu'à obſerver que ſur chacune des cinq pintes à 12 ſols qui entrent dans le mélange, le marchand gagne 3 ſols en le vendant à 15 ſols ; & par conſéquent il gagne 3 × 5, ou 15 ſols : & qu'au contraire ſur chacune des trois pintes de 20 ſols qui entrent dans le mélange, & qu'il vend 15 ſols, il perd 5 ſols ; ce qui fait 3 × 5, ou 15 ſols. Ainſi puiſque ce qu'il gagne d'un côté, eſt égal à ce qu'il perd de l'autre ; il eſt viſible qu'il lui revient le même argent, que s'il avoit vendu chaque vin à ſon prix.

Maintenant le mélange que l'on demande étant de 1888 pintes, je fais deux regles de trois, en diſant pour la premiere : Si 8 pintes de mélange demandent 3 pintes à 20 ſols ; combien le mélange 1888 en demandera-t'il ? & pour la ſeconde, ſi 8 pintes de mélange demandent 5 pintes à 12 ſols, combien le mélange en demandera-t'il ? & les deux regles étant faites, me donnent 708 pintes à 20 ſols, & 1180 à 12 ſols : & en effet, ces deux ſommes ajoutées enſemble font le mélange demandé 1888.

8. 3 ::	1888.	708	pintes à 20 ſols
8. 5 ::	1888.	1180	pintes à 15 ſols
		1888	mélange.

PROBLÊME II. *Hieron, Roi de Syracuſe donna à ſon Orfevre une quantité d'or pour lui faire une couronne ; l'ouvrage étant fini, le*

Roi fut bien aiſe de ſavoir s'il n'y avoit point de mélange, & propoſa la queſtion à Archimede. Ce ſavant Mathématicien découvrit la quantité d'or & d'argent que l'Orfevre y avoit employée; & l'on demande comment il parvint à cette connoiſſance?

Nous démontrerons dans l'hydroſtatique, que ſi pluſieurs corps de même poids, mais de différente nature, ſont plongés dans l'eau, ils perdent des parties de leur poids, les unes plus grandes, & les autres moindres: ce que l'on connoît en mettant au lieu de l'un des baſſins d'une balance un crochet qui peſe autant que l'autre baſſin. Après quoi on attache au crochet un long fil auquel eſt ſuſpendu le corps qu'on veut peſer: on le peſe d'abord dans l'air, & enſuite on le plonge dans l'eau; enſorte que la balance & l'autre baſſin n'y entrent pas, & le peſant de nouveau, on trouve qu'il peſe moins. D'où il eſt aiſé de connoître la différence des poids, & par conſéquent la perte de poids que le corps fait dans l'eau. Cela poſé,

Archimede prit deux lingots, l'un d'or & l'autre d'argent, qui peſoient chacun autant que la couronne, & ayant trouvé que la couronne plongée dans l'eau, perdoit plus de ſon poids que le lingot d'or, & moins que le lingot d'argent, il réſolut la queſtion par une regle d'alliage, ainſi que nous allons le voir.

Suppoſons que la couronne peſât 96 onces, que la perte de ſon poids qu'elle faiſoit dans l'eau fût de 8 onces, que celle du lingot d'or fût de 7 onces $\frac{1}{4}$, & celle du lingot d'argent 9 onces & $\frac{1}{4}$. Il eſt clair qu'il y avoit de l'alliage dans la couronne; car ſi elle avoit été d'or pur comme le lingot d'or, leurs pertes de poids dans l'eau auroient été égales, puiſque les poids du lingot & de la couronne étoient égaux. Et par la même raiſon, ſi elle avoit été d'argent, ſa perte & celle du lingot d'argent auroient été égales. Je réduits les trois pertes, & le poids 96 de chacune des maſſes en fractions, dont le dénominateur ſoit 4, ce qui donne $\frac{32}{4}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{37}{4}$ & $\frac{384}{4}$. Ainſi les trois pertes & le poids 96 ſont entre eux comme 32, 31, 37 & 384; c'eſt-à-dire ſi le poids 96 avoit été diviſé en 384 parties, la couronne auroit perdu dans l'eau 32 parties, le lingot d'or 31, & le lingot d'argent 37. Je fais un alliage des pertes 31 & 37 des lingots d'or & d'argent pour avoir la perte moyenne 32, & échangeant les différences, c'eſt-à-dire mettant la différence 1 de 31 à 32 vis-à-vis 37, & la différence 5 de 37 à 32 vis-à-vis 31; la ſomme 6 des différences me fait voir que pour faire un alliage de 6 onces qui perdît autant dans l'eau que 6 onces du mêlange de la couronne, il faudroit cinq onces

31.		5.
	32.	
37.		1.
		6.

d'or & une d'argent. Car chacune des cinq onces d'or perdroit une once de moins que chaque once du mêlange, ce qui feroit cinq onces de moins. Mais l'once d'argent perdroit cinq onces de plus qu'une once de mêlange; donc ce qu'il auroit de moins étant compensé par le plus, les cinq onces d'or jointes à l'once d'argent ne perdroient ni plus ni moins que 6 onces de mêlange.

Maintenant puisque la couronne pesoit 96 onces, je fais deux regles de trois en disant pour la premiere : si pour un alliage de 6 onces il faut cinq onces d'or, combien un alliage de 96 en demandera-t'il ? & pour la seconde : si pour un alliage de 6 onces il faut une once d'argent, combien un alliage de 96 en exigera-t'il ? & ces deux regles donnent 80 onces d'or & 16 onces d'argent.

6. 5 :: 96. 80 or.
6. 1 :: 96. 16 argent.
96 alliage de la couronne.

PROBLÊME III. *Pour fondre une piece de canon qui soit bonne, il faut mettre 3 livres d'étain sur 25 livres de rosette ou cuivre rouge : & cela posé, on demande de connoître si cet alliage a été observé dans une vieille piece qu'on veut refondre ; & supposé que cela ne soit pas, on demande ce qu'il faut ajouter de l'un ou de l'autre métal pour faire l'alliage bon.*

SOLUTION. Par les fréquentes expériences qu'on a faites, on a trouvé que si deux masses l'une de cuivre rouge ou rosette, & l'autre d'étain, sont d'égale pesanteur ; la premiere perd environ la neuvieme partie de son poids, & la seconde n'en perd que la septieme partie. Cela posé,

Supposons que la piece qu'on veut refondre pese 5200 livres ; & qu'après avoir été mise en pieces, l'un de ses tronçons du poids de 28 livres ait perdu dans l'eau $\frac{206}{63}$ de son poids. Je dis : si ce tronçon étoit tout de rosette, il perdroit $\frac{28}{9}$ de son poids ; & s'il étoit tout d'étain, il perdroit $\frac{28}{7}$. Je réduis ces fractions en même dénomination : ce qui donne $\frac{196}{63}$, & $\frac{252}{63}$. Je réduis aussi le poids 28 en une fraction dont le dénominateur soit 63 ; & j'ai $\frac{1764}{63}$.

Ainsi la perte du mêlange 28, celle de 28 de rosette, celle de 28 d'étain, & le poids 28, sont entre eux comme les nombres 206, 196, 252 & 1764. J'allie les pertes 196 & 252 de 28 de rosette, & de 28 d'étain, avec la perte moyenne 206 ; & échangeant les différences, je trouve que pour faire un alliage de 56 livres dont chacune perdît dans l'eau 206 parties de son poids divisé en 1764 parties, il faudroit 46 livres de rosette & 10 d'étain.

196.		46.
	206.	
252.		10.
		56.

Je dis donc : ſi un alliage de 56 livres demande 46 de roſette ; combien un alliage de 5200 en demandera-t'il ? & ſi un alliage de 56 demande 10 d'étain, combien l'alliage 5200 en demandera-t'il ? & ces deux regles donnent 4271 $\frac{24}{56}$ de roſette, & 928 $\frac{32}{56}$ d'étain.

56. 46 :: 5200. 4271 $\frac{24}{56}$
56. 10 :: 5200. 928 $\frac{32}{56}$

Pour trouver combien il a mis de roſette ſur 28 livres de mêlange, je dis : le mêlange 56, eſt à 46 de roſette ; comme le mêlange 28, eſt à un quatrieme terme, lequel après avoir fait la regle de trois, ſe trouve 23. Ainſi il a mis 23 livres de roſette, au lieu de 25 ; & par conſéquent il a mis 2 livres d'étain de plus.

Et pour trouver combien il faut ajouter de roſette, pour rendre l'alliage bon ; je dis : ſi 3 d'étain demandent 25 de roſette, combien 928 $\frac{32}{56}$ d'étain demandent-elles ? & faiſant la régle de trois, je trouve 7771 $\frac{24}{56}$. Or il y en a déja 4271 $\frac{24}{56}$: ainſi il faut y ajouter 3500 de roſette. Car 3500 & 4271 $\frac{24}{56}$ font 7771 $\frac{24}{56}$.

300. REMARQUE I. Lorſque le mêlange ou l'alliage que l'on veut faire eſt *compoſé de trois quantités* ; le problême peut ſe réſoudre de la même façon.

Suppoſons qu'on veut faire un alliage de trois ſortes de métaux, dont le premier vaut 20 ſols la livre, le ſecond 12 ſols, & le troiſieme 6 ; & qu'on demande que la livre d'alliage ne coûte que 10 ſols. On mettra la différence 10, de 20 à 10, vis-à-vis 6 ; & la différence 2, de 12 à 10, auſſi vis-à-vis 6 ; parce qu'il n'y a qu'un ſeul prix 6 qui ſoit inférieur au prix moyen. Après quoi on mettra la différence 4, de 6 à 10, vis-à-vis 20 & vis-à-vis 12 ; parce que ces deux quantités 20 & 12 ont donné leur différence à la quantité : & faiſant la ſomme 20 des quatre grandeurs 4, 4, 10 & 2 ; on connoîtra que pour faire un mêlange de 20 livres à 10 ſols la livre, il en faut 4 du métal de 20 ſols, 4 du métal de 12 ſols, & 10 + 2, ou 12 du métal de 6 ſols : ce qu'on démontrera de même qu'auparavant.

20.		4.
12.		4.
	10.	
6.		10.
		2.
		20.

301. REMARQUE II. Mais ſi le mêlange ou l'alliage demandé *contient plus de trois quantités*, le problême eſt ſuſceptible de pluſieurs ſolutions, en ſuppoſant néanmoins qu'il ſe trouve plus d'une quantité au-deſſus ou au-deſſous de la quantité moyenne : car s'il ne s'en trouvoit qu'une au-deſſus ou au-deſſous, le problême n'auroit qu'une ſolution ; & ſe reſoudroit, comme on vient de voir, en donnant à la quantité qui ſeroit ſeule ou au-deſſous ou au-deſſus, toutes les différences des autres ; & à chacune des autres la différence qui ſeroit ſeule. Par exemple,

I°. Soient les prix de quatre quantités, 25, 20, 12, 6; & le prix moyen 15. J'arrange ces prix & le prix moyen, à la façon ordinaire; & prenant la différence 10, de 25 à 15, je la mets vis-à-vis 6. Je prends auſſi la différence 9, de 6 à 15; & je la mets vis-à-vis 25: car il faut toujours obſerver que la différence d'une grandeur ayant été miſe vis-à-vis d'une autre, réciproquement la différence de cette autre ſoit miſe vis-à-vis de la premiere. Je prens de même la différence 5, de 20 à 15; & je l'écris vis-à-vis de 12; & la différence 3, de 12 à 15, que j'écris vis-à-vis de 20. Ainſi la ſomme 27 des différences 9, 3, 5 & 10, me fait voir que pour un alliage de 27 livres, il en faudroit 9 à 25 ſols la livre, 3 à 20 ſols, 5 à 12 ſols, & 6 à 20 ſols.

25.	9.	
20.	3.	
15.		
12.	5.	
6.	10.	
	27.	

II°. Si je veux une autre ſolution, je mets la différence 10, de 25 à 15; non plus vis-à-vis de 6, mais vis-à-vis de 12; & la différence 3, de 12 à 15, vis-à-vis de 20. De même je mets la différence 5, de 20 à 15, vis-à-vis de 6; & la différence 9, de 6 à 15, vis-à-vis de 20: & la ſomme 27 des différences me fait voir que pour un alliage de 27 livres, dont le prix ſeroit 15 ſols, il faudroit 3 livres à 25 ſols, 9 livres à 20 ſols, 10 à 12 ſols, & 5 à 6 ſols. Cet alliage eſt différent de l'autre: & je ne ſaurois en faire d'autre par cette méthode: parce que je ne puis échanger les différences que de ces deux façons. Il eſt aiſé de voir que ſi j'avois un plus grand nombre de choſes à allier, j'aurois auſſi un plus grand nombre de différentes ſolutions.

25.	3.	
20.	9.	
15.		
12.	10.	
6.	5.	
	27.	

J'ai donné dans l'*arithmétique des géometres*, d'autres méthodes par leſquelles on peut trouver un plus grand nombre de ſolutions de ces ſortes de problêmes. Mais comme ce que nous venons de dire ſuffit, je n'en parlerai pas ici de peur d'être trop long.

DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

302. Théorême I. *Si l'on a une ſuite de raiſons égales, qui ſoient en progreſſion géométrique, ou qui ne le ſoient pas; la ſomme de tous les antécédens, eſt à la ſomme de tous les conſéquens, comme l'un des antécédens, eſt à ſon conſéquent.*

Démonstration. I°. Soient les raiſons égales $a.b::c.d::e.f$, qui ne ſont pas en progreſſion.

Puiſque chaque antécédent contient ſon conſéquent, ou eſt contenu dans ſon conſéquent de la même façon; il eſt clair que tous les

antécédens contiendront leurs conſéquens, ou ſeront contenus dans leurs conſéquens de la même façon ; & que par conſéquent tous les antécédens ſeront à tous les conſéquens, comme l'un des antécédens eſt à ſon conſéquent. Ainſi l'on aura $a+c+e.b+d+f::a.b$. Si a eſt double de b ; c ſera double de d, & e double de f : & il eſt viſible que tous les doubles $a+c+e$ contiendront leurs ſimples $b+d+f$, comme l'un des doubles a, contient ſon ſimple b. Si a eſt moitié de b ; c ſera moitié de d, & e moitié de f ; & il eſt évident que toutes les moitiés $a+c+e$ ſeront contenues dans leurs tous ou dans leurs doubles $b+d+f$, comme l'une des moitiés a, eſt contenue dans ſon tout ou dans ſon double b ; & ainſi du reſte.

II°. Soit la progreſſion $::a,b,c,d$. Cette progreſſion peut s'écrire ainſi, $a.b::b.c::c.d$; ce qui fait une ſuite de raiſons égales. Donc l'on prouvera, de même que nous venons de faire, que $a+b+c.b+c+d::a.b$. C. Q. F. D.

303. COROLLAIRE. Il ſuit de-là que dans toute progreſſion, la ſomme de tous les termes moins le dernier, eſt à la ſomme de tous les termes moins le premier ; comme le premier eſt au ſecond, ou comme le ſecond au troiſieme, &c.

304. THÉORÊME II. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante ; le ſecond terme moins le premier, eſt au premier ; comme le dernier moins le premier, eſt à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion aſcendante $::a,b,c,d,e$. Par le théorême précédent, nous avons $a+b+c+d.b+c+d+e::a.b$. Donc *invertendo* nous avons $b+c+d+e.a+b+c+d::b.a$; & *dividendo* nous aurons $b+c+d+e-a-b-c-d.a+b+c+d::b-a.a$, & corrigeant l'expreſſion du premier terme, nous aurons $e-a.a+b+c+d::b-a.a$, & mettant la ſeconde raiſon à la place de la premiere, & la premiere à la place de la ſeconde, nous aurons $b-a.a::e-a.a+b+c+d$. C. Q. F. D.

305. *REMARQUE I.* Il faut obſerver qu'au lieu de dire, le ſecond moins le premier eſt au premier ; ou pourroit dire, le troiſieme moins le ſecond eſt au ſecond, ou le quatrieme moins le troiſieme eſt au troiſieme, &c ; ou le dernier moins le pénultieme eſt au pénultieme.

Car la progreſſion étant compoſée des raiſons égales $a.b::b.c::c.d::d.e$; il eſt viſible que $b-a.a::c-b.b::d-c.c::e-d.d$:

& que par conſéquent, au lieu de $b - a.a$, on peut mettre ou $c - b.b$; ou $d = c.c$; ou enfin $e - d.d$.

306. REMARQUE II. Si la progreſſion étoit deſcendante comme : : *e. d. c. b. a*; on la prendroit à rebours : ce qui donneroit la progreſſion aſcendante : : *a, b. c. d. e*, & l'on auroit la même choſe qu'aupararavant.

307. THÉORÊME III. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante; le ſecond terme eſt égal au premier multiplié par l'expoſant; le troiſieme eſt égal au premier multiplié par la ſeconde puiſſance de l'expoſant; le quatrieme eſt égal au premier multiplié par la troiſieme puiſſance de l'expoſant, & ainſi de ſuite.*

DEMONSTRATION. Soit la progreſſion aſcendante : : *a. b. c. d. e*, & l'expoſant *p*. Le ſecond terme *b* ſera donc *ap* : & mettant cette valeur de *b*, dans la ſeconde raiſon *b, c*; nous aurons *ap. c* : & comme l'expoſant de cette raiſon eſt encore *p*, nous aurons $ap \times p$, ou $app = c$, & par la même raiſon nous aurons $ap^3 = d$, & $ap^4 = e$. Donc la progreſſion propoſée ſera la même que celle-ci : : *a. ap. app. ap*^{3}. *ap*^{4}, où l'on voit que le ſecond terme eſt égal au premier multiplié par l'expoſant; que le troiſieme eſt égal au premier multiplié par la ſeconde puiſſance de *p*; &c.

308. REMARQUE. Si la progreſſion étoit deſcendante, comme : : *e. d. c. b. a*; on la prendroit à rebours : ce qui donneroit la progreſſion aſcendante : : *a. b. c. d. e*, où l'on prouveroit la même choſe que ci-deſſus.

309. COROLLAIRE. Il ſuit de-là que *dans toute progreſſion géométrique aſcendante, le dernier terme eſt égal au premier multiplié par l'expoſant élevé à une puiſſance, dont le degré eſt égal au nombre des termes diminué de l'unité.* Car dans la progreſſion : : *a, ap, app, ap*^{3}, *ap*^{4}; le dernier terme *ap*^{4}, eſt égal au premier terme *a*, multiplié par la puiſſance p^4, dont le degré 4 eſt égal au nombre des termes 5 diminué de l'unité.

310. PROBLÊME I. *Trouver la ſomme d'une progreſſion géométrique aſcendante.*

SOLUTION. Soit la progreſſion géométrique aſcendante 2. 4. 8. 16. 32. Je dis $4 - 2$, eſt à 2, comme $32 - 2$, eſt à la ſomme des termes qui précedent 32 (304). Mais $4 - 2 = 2$, & $32 - 2 = 30$: donc j'ai 2. 2 : : 30. 30; & par conſéquent 30 eſt la ſomme de tous les termes moins le dernier. C'eſt pourquoi, ajoutant à cette ſomme le dernier terme 32, la ſomme 62 eſt la ſomme de la progreſſion :

& l'on voit ici que quand l'expoſant eſt 2, le dernier terme moins le premier, eſt égal à la ſomme des termes qui le précedent.

Si la progreſſion avoit été 1. 3. 9. 27. 81 ; on auroit trouvé, en faiſant 3 — 1 eſt à 1, comme 81 — 1 eſt à la ſomme des termes qui précedent le dernier, & en achevant la regle de trois ; que le dernier terme moins le premier d'une progreſſion dont l'expoſant eſt 3, eſt double de la ſomme des termes qui le précédent : & ſi l'expoſant étoit 4, on trouveroit que le dernier terme moins le premier, feroit triple de la ſomme des termes qui le précédent ; & ainſi de ſuite.

311. PROBLÈME II. *Trouver la ſomme d'une progreſſion géométrique deſcendante.*

SOLUTION. Soit la progreſſion géométrique deſcendante 32. 16. 8. 4. 2. je la prends à rebours : ce qui me donne la progreſſion aſcendante 2. 4. 8. 16. 32, dont je cherche la ſomme comme dans le problême précédent. Ou bien, comme il eſt indifférent de dire 4 — 2 eſt à 2, ou de dire 32 — 16 eſt à 16, comme 32 — 2 eſt à la ſomme des termes qui le précedent ; je fais la regle de trois de cette derniere façon ; & je trouve, de même qu'auparavant, que la ſomme des termes qui précédent le dernier, eſt 30.

Or cela me fait voir que ſi je ne veux pas renverſer la progreſſion deſcendante, je dois dire : *Le premier terme* 32 *moins le ſecond* 16, *eſt au ſecond* 16 ; *comme le premier* 32 *moins le dernier* 2, *eſt à la ſomme des termes qui ſuivent le premier* 32 : & ceci peut ſervir de regle générale pour les progreſſions deſcendantes qu'on ne voudra pas prendre à rebours.

312. REMARQUE I. Si la progreſſion géométrique deſcendante s'étend à l'infini, le dernier terme devient infiniment petit, & peut être regardé comme égal à zéro. Par conſéquent on aura : le premier terme moins le ſecond, eſt au ſecond ; comme le premier moins le dernier qui eſt zéro, c'eſt-à-dire comme le premier, eſt à la ſomme des termes qui le ſuivent. Suppoſant donc que la progreſſion eſt : : 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{100}$, juſqu'au dernier terme qui ſera 1 diviſé par la puiſſance infinie de l'expoſant 2 ; lequel ſera par conſéquent un infiniment petit, à cauſe qu'une fraction diminue de plus en plus, à meſure que ſon dénominateur augmente, & devient enfin égale à rien, quand le dénominateur eſt infini ; nous aurons 1 — $\frac{1}{2}$ eſt à $\frac{1}{2}$, comme 1 eſt à la ſomme des termes qui ſuivent le premier : & comme 1 — $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$, nous trouverons que le nombre infini de termes qui

ſuivent

ſuivent le premier 1, ne vaut qu'un; & que par conſéquent la ſomme entiere de la progreſſion eſt 2.

On trouvera de la même façon que ſi la progreſſion étoit :: 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{27}$. & $\frac{1}{3^\infty}$, la ſomme des termes qui ſuivent le premier, ſeroit égale à $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire à la moitié du premier terme : que ſi la progreſſion étoit :: 1. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, &c. $\frac{1}{4^\infty}$; la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſeroit $\frac{1}{3}$; c'eſt-à-dire le tiers du premier terme, & ainſi de ſuite. D'où il ſuit que toute progreſſion deſcendante compoſée d'une infinité de termes, eſt égale à une grandeur finie, à moins que ſon premier terme ne ſoit infini.

313. REMARQUE II. Quant aux progreſſions géométriques aſcendantes; il eſt viſible que leur valeur eſt infinie. Par exemple, ſi la progreſſion eſt :: 1. 2. 4. 8. 16. 2^∞; la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſera égale à $2^\infty - 1$ (310) : par conſéquent la ſomme totale ſera $2 \times 2^\infty - 1$. De même ſi la progreſſion eſt :: 1. 3. 9. 27. 81. 3^∞; la ſomme des termes qui précedent le dernier, ſera $\frac{1}{2} \times 3^\infty - \frac{1}{2}$; & la ſomme totale, $\frac{1}{2} \times 3^\infty - \frac{1}{2}$: & ſi la progreſſion eſt :: 1. 4. 16. 64. 4^∞; la ſomme des termes qui précedent le dernier, eſt $\frac{1}{3} \times 4^\infty - \frac{1}{3}$; & la ſomme totale $\frac{1}{3} \times 4^\infty - \frac{1}{3}$, & ainſi de ſuite.

314. REMARQUE III. Que ſi à ces progreſſions aſcendantes infinies, on ajoute les deſcendantes, enſorte qu'on ait pour la premiere $\frac{1}{2^\infty}$, &c. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. &c. 2^∞; la ſuite des fractions $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$, &c. ſera 1. (312): & comme la ſuite 1. 2. 4. 8. &c. eſt $2 \times 2^\infty - 1$; ajoutant enſemble ces deux valeurs, la ſomme totale ſera $2 \times 2^\infty - 1 + 1$, ou $2 \times 2^\infty$.

De même ſi la progreſſion eſt $\frac{1}{3^\infty}$, &c. $\frac{1}{81}$. $\frac{1}{27}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{3}$. 1. 3. 9. 27. 81, &c. 3^∞; la ſuite des fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, &c. ſera $\frac{1}{2}$; & celle des termes 1. 3. 9. 27. &c. eſt $\frac{1}{2} \times 3^\infty - \frac{1}{2}$: & ajoutant enſemble ces deux valeurs, la ſomme totale ſera $\frac{1}{2} \times 3^\infty - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; ou $\frac{1}{2} \times 3^\infty$; & ainſi de ſuite.

315. THÉORÊME IV. *Toutes les puiſſances d'une grandeur ſont en progreſſion géométrique.*

DÉMONSTRATION. Soit la ſuite des puiſſances a. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. &c. Si je diviſe la ſeconde par la premiere; le quotient ou l'expoſant ſera a. De même ſi je diviſe la troiſieme par la ſeconde, l'expoſant ſera encore a; & ainſi de ſuite. Donc puiſque l'expoſant d'une puiſſance à l'autre eſt toujours le même; ces puiſſances ſont en progreſſion géométrique.

Soit encore la ſuite a^0. a^{-1}. a^{-2}. a^{-3}. a^{-4}. &c, qui eſt la même

que celle-ci 1. $\frac{1}{a}$. $\frac{1}{aa}$. $\frac{1}{a^3}$. $\frac{1}{a^4}$. &c. (161), dont les termes vont en diminuant. Si je diviſe le premier terme a^0 par le ſecond a^{-1}, en me ſervant du calcul des expoſans ; le quotient ou l'expoſant des deux termes ſera a^1, & ſi je diviſe le ſecond terme a^{-1} par le troiſieme a^{-2}, le quotient ſera encore a^1, & ainſi de ſuite. Donc les puiſſances ſeront en progreſſion. C. Q. F. D.

316. REMARQUE. Il faut obſerver que, tandis que les puiſſances poſitives d'une grandeur a^0. a^1. a^2. a^3. &c, ſont en progreſſion géométrique, leurs expoſans 0. 1. 2. 3. 4. &c, ſont en progreſſion arithmetique poſitive : & que tandis que ſes puiſſances négatives a^{-1}. a^{-2}. a^{-3}. &c, ſont auſſi en progreſſion géométrique, leurs expoſans $-1, -2, -3, -4, -5$, &c. ſont en progreſſion arithmétique négative : de façon que le terme zéro ſe trouve entre la progreſſion poſitive & la négative ; & que la progreſſion arithmétique totale eſt $-\infty$, &c, $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$, &c. ∞ : ce qui nous ſervira dans la ſuite, pour mieux faire entendre ce que c'eſt que les *Logarithmes*.

CHAPITRE IX.

DES RAISONS COMPOSÉES.

317. SI l'on a deux ou pluſieurs raiſons, a, b ; c, d; e, f; & qu'on multiplie tous les antécédens les uns par les autres, & tous les conſéquens auſſi, les deux produits ace, bdf, formeront une autre raiſon, laquelle eſt dite *raiſon compoſée* des raiſons a, b ; c, d; e, f, qu'on nomme *les compoſantes*.

318. Une raiſon compoſée de deux raiſons égales, ſe nomme *raiſon doublée* de l'une des compoſantes : une raiſon compoſée de trois raiſons égales, ſe nomme *raiſon triplée* de l'une des compoſantes, & ainſi de ſuite.

319. Les raiſons doublées, triplées, quadruplées, &c, ſont donc différentes des raiſons doubles, triples, quadruples, &c ; & il ne faut pas les confondre : car la raiſon double eſt une raiſon dont l'antécedent eſt double du conſéquent (274) ; au lieu qu'une raiſon doublée eſt une raiſon compoſée de deux raiſons égales. Dans toute raiſon quelconque, ſimple, doublée, triplée, quadruplée, l'*expoſant* eſt toujours le quotient de l'antécédent diviſé par le conſéquent. (239 & 276.)

320. THÉORÊME I. *Dans toute raiſon compoſée, l'expoſant eſt égal au produit des expoſans des raiſons compoſantes.*

DÉMONSTRATION. Soient les raiſons $a, b ; c, d$; l'expoſant de la premiere p; & celui de la ſeconde q : la raiſon compoſée ſera donc ac, bd. (317). Or dans la premiere raiſon, nous avons $a = bp$ (239 & 276); & dans la ſeconde $c = dq$: mettant donc ces valeurs de a & c dans la raiſon compoſée, nous aurons $bpdq, bd$; & par conſéquent diviſant le premier terme par le dernier, l'expoſant ſera pq, c'eſt-à-dire le produit des expoſans p, q, des raiſons compoſantes.

De même, ſoient les trois raiſons compoſantes $a, b ; c, d ; f, h$; l'expoſant de la premiere p, celui de la ſeconde q, & celui de la troiſieme m : la raiſon compoſée ſera donc acf, bdh. Or dans la premiere raiſon j'ai $a = bp$, dans la ſeconde $c = dq$, & dans la troiſieme $f = mh$: mettant donc ces valeurs de a, c, f, dans la compoſée acf, bdh ; j'aurai $bpdqmh, bdh$; & diviſant le premier terme par le ſecond, l'expoſant ſera pqm, lequel eſt produit des trois expoſans p, q, m, & ainſi des autres.

321. Ce theorême eſt général, quand même il ſe trouveroit des raiſons compoſantes qui auroient leurs antécédens plus grands que leurs conſéquens, & d'autres leurs conſéquens plus grands que les antécédens. Car ſoient les raiſons compoſantes 4, 1 ; 1, 3 : l'expoſant de la premiere eſt 4, & celui de la ſeconde eſt $\frac{1}{3}$, & la raiſon compoſée eſt 4, 3, dont l'expoſant $\frac{4}{3}$ eſt égal au produit des expoſans 4, $\frac{1}{3}$ des raiſons compoſantes.

322. THÉORÊME. II. *L'expoſant d'une raiſon compoſée de deux raiſons égales, eſt égal au quarré de l'expoſant de l'une des compoſantes : celui d'une raiſon compoſée de trois raiſons égales, eſt égal au cube de l'expoſant de l'une des compoſantes : celui d'une raiſon compoſée de quatre raiſons égales, eſt égal à la quatrieme puiſſance de l'expoſant de l'une des égales ; & ainſi de ſuite.*

DEMONSTRATION. I°. Soient les deux raiſons $a, b :: c, d$; l'expoſant p de la premiere ſera donc le même que l'expoſant de la ſeconde ; & par conſéquent nous aurons $d = dp$, & $c = dp$. Or la raiſon compoſée eſt ac, bd ; mettant donc dans la compoſée les valeurs de a & de c, nous aurons $bpdp, bd$; & diviſant le premier terme par le ſecond, l'expoſant pp ſera le quarré de l'expoſant p de la premiere raiſon compoſante, ou de la ſeconde.

II°. Soient de même les trois raiſons égales, $a, b :: c, d, :: f, h$; & l'expoſant de chacune d'elles p ; nous aurons donc $a = bp$,

$c = dp$, & $f = hp$. Or la raiſon compoſée eſt acf, bdh; mettant donc les valeurs de a, c, f, nous aurons $bpdphp$, bdh, & diviſant le premier terme par le ſecond, l'expoſant ppp ſera le cube de l'expoſant de la premiere raiſon compoſante, ou de la ſeconde, ou de la troiſieme; & il eſt aiſé de prouver la même choſe à l'égard des raiſons compoſées d'un plus grand nombre de raiſons égales.

323. THÉORÈME III. *Les quarrés ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs racines; les cubes en raiſon triplée, les quatriemes puiſſances en raiſon quadruplée, & ainſi de ſuite.*

DÉMONSTRATION. I°. Soient les quarrés aa, bb, dont les racines ſont a, b. Je prends les deux raiſons égales $a, b :: a, b$; & la compoſée de ces deux raiſons eſt la raiſon doublée aa, bb. Or les termes de cette raiſon doublée ſont les quarrés des termes a, b, de l'une ou de l'autre des compoſantes: donc les quarrés aa, bb, ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs racines.

II°. De même ſoient les cubes a^3, b^3, dont les racines ſont a, b. Je prends les trois raiſons égales $a, b :: a, b :: a, b$; & la compoſée de ces trois raiſons eſt a^3, b^3, laquelle eſt triplée de la premiere, ou de la ſeconde, ou de la troiſieme. Or a^3, b^3, ſont les cubes des termes a, b, de chacune de ces raiſons; donc les cubes ſont en raiſon triplée de la raiſon de leurs racines, & ainſi des autres.

324. COROLLAIRE. Il ſuit de-là que les racines quarrées ſont en raiſon ſoudoublée de celle de leurs quarrés, que les racines cubiques ſont en raiſon ſoutriplée de celle de leurs cubes, &c.

325. THÉORÈME IV. *Si l'on a pluſieurs grandeurs de ſuite, la premiere eſt à la troiſieme en raiſon compoſée de la raiſon de la premiere à la ſeconde, & de celle de la ſeconde à la troiſieme: la quatrieme eſt en raiſon compoſée de la raiſon de la premiere à la ſeconde, de celle de la ſeconde à la troiſieme, & de celle de la troiſieme à la quatrieme, & ainſi de ſuite: c'eſt-à-dire que la raiſon d'un terme à un autre, eſt compoſée de toutes les raiſons qui ſe trouvent entre deux.*

DÉMONSTRATION. I°. Soient les grandeurs a, b, c, d, e, &c; telles que l'on voudra: ſoit qu'elles aillent toujours en augmentant, ou toujours en diminuant, ou tantôt en augmentant, & tantôt en diminuant. Je prends les deux raiſons a, b; b, c, & faiſant la compoſée, j'ai ab, bc; & diviſant l'un & l'autre terme par b, les quotiens a, c, ſont en même raiſon que ab, bc, (33): donc $a, c :: ab, bc$, & par conſéquent la premiere grandeur donnée eſt à la troiſieme c, en raiſon compoſée de celle des deux premieres a, b, & de celle de la ſeconde b à la troiſieme c.

II°. Je prends de même les trois raiſons a, b; b, c; c, d; & leur compoſée eſt abc, bcd: or ſes deux termes étant diviſés par bc, donnent a, d, qui ſont en même raiſon que abc, bcd: donc $a, d :: abc, bcd$; c'eſt-à-dire la premiere grandeur donnée a eſt à la quatrieme d, en raiſon compoſée des raiſons intermédiaires, a, b; b, c; c, d, & ainſi des autres.

326. COROLLAIRE. Si les grandeurs données a, b, c, d, e, &c, étoient en progreſſion géométrique aſcendante, ou deſcendante, ce ſeroit encore la même choſe.

327. THÉORÊME V. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante ou deſcendante, le premier terme eſt au troiſieme, comme le quarré du premier au quarré du ſecond: le premier eſt au quatrieme, comme le cube du premier au cube du ſecond: le premier eſt au cinquieme, comme la quatrieme puiſſance du premier, à la quatrieme puiſſance du ſecond; & ainſi de ſuite.*

DÉMONSTRATION. Soit la progreſſion :: a, b, c, d, e, &c. Par le théorême précédent, le premier terme a eſt au troiſieme c, en raiſon compoſée de la raiſon a, b, & de la raiſon b, c. Or ces deux raiſons ſont égales; donc le premier terme a eſt au troiſieme c, en raiſon doublée de la raiſon a, b, ou de la raiſon b, c, (318). Or la raiſon doublée de l'une des compoſantes eſt égale à la raiſon des quarrés des termes de l'une des compoſantes (323): donc la raiſon a, c, eſt la même que la raiſon des quarrés des deux premiers termes a, b, de la progreſſion.

De même, par le théorême précédent, la raiſon a, d, eſt compoſée des raiſons a, b; b, c; c, d: or ces trois raiſons ſont égales: donc la raiſon a, d, eſt triplée de la raiſon a, b. Mais les cubes de la raiſon a, b, ſont auſſi en raiſon triplée de la raiſon a, b, (323): donc le premier terme a de la progreſſion, eſt au quatrieme terme d; comme le cube a^3 du premier, eſt au cube b^3 du ſecond; & ainſi des autres.

328. THÉORÊME VI. *Une progreſſion géométrique aſcendante ou deſcendante étant donnée; les quarrés de ſes termes, ou les cubes, ou les quatriemes puiſſances; de même, leurs racines quarrées, ou leurs racines cubiques, ou leurs racines quatriemes, &c, ſeront encore en progreſſion.*

DÉMONSTRATION. Dans toute progreſſion géométrique, la raiſon du premier terme au ſecond, eſt égale à celle du ſecond au troiſieme, à celle du troiſieme au quatrieme, & ainſi de ſuite: donc les raiſons doublées, ou triplées, ou quadruplées, &c, ou les raiſons ſoudou-

blées, ſoutriplées, ſouquadruplées, &c, de toutes ces raiſons ſont encore égales. Or les quarrés de ces raiſons ſont en raiſon doublée, les cubes en raiſon triplée, &c; & les racines quarrées ſont en raiſon ſoudoublée, les racines cubiques en raiſon ſoutriplée, &c: donc les quarrés ou les cubes, &c, ou les racines quarrées ou cubiques, &c, ſont entre elles en même raiſon; & par conſéquent elles ſont encore en progreſſion.

329. THÉORÊME VII. *Si deux quarrés inégaux, ou deux cubes; ou deux quatriemes puiſſances, &c, ſont diviſés l'un par l'autre; le quotient eſt un nombre quarré, ou un cube, &c.*

DÉMONSTRATION. Ceci eſt une ſuite des principes précédens; mais on peut le démontrer avec plus de facilité en cette ſorte. Soient les quarrés aa, bb: ſi je diviſe l'un par l'autre, le quotient eſt $\frac{aa}{bb}$, lequel eſt encore un quarré; car ſa racine eſt $\frac{a}{b}$. De même ſoient les cubes a^3, b^3: ſi je diviſe l'un par l'autre, le quotient $\frac{a^3}{b^3}$ eſt encore un cube; puiſque ſa racine cubique eſt $\frac{a}{b}$; & ainſi des autres.

330. PROBLÊME. *Trouver entre deux nombres donnés, autant de moyennes proportionnelles géométriques qu'on voudra.*

SOLUTION. I°. Soient les grandeurs a, b, entre leſquelles on demande une moyenne proportionnelle géométrique. Je la nomme x, & j'ai :: a, x, b : or le quarré de la premiere eſt au quarré de la ſeconde, comme la premiere eſt à la troiſieme (327) : donc aa, xx, a, b : & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, j'ai $aab = axx$; & diviſant par a de part & d'autre, je trouve $ab = xx$, & $x = \sqrt{ab}$: ce qui me fait voir qu'il faut multiplier a par b, & tirer la racine quarrée du produit pour avoir x; de même que nous l'avons trouvée (292).

II°. Soient les grandeurs a, b, entre leſquelles on demande deux moyennes proportionnelles. Je nomme la premiere x, & la ſeconde y; & j'ai :: a, x, y, b. Or le cube de la premiere eſt au cube de la ſeconde, comme la premiere eſt à la quatrieme (327) : donc a^3, x^3 :: a, b; d'où je tire $a^3b = ax^3$; & diviſant tout par a, j'ai $a^2b = x^3$, & tirant la racine cubique je trouve $x = \sqrt[3]{a^2b}$: ce qui me fait voir que pour trouver la premiere des deux moyennes proportionnelles, il faut faire le quarré de la premiere a, le multiplier par la quatrieme b, & tirer la racine cubique du produit. Après quoi comme les quatre

termes ſont en progreſſion, on dira : la premiere a, eſt à la ſeconde x qui ſera une grandeur connue ; comme cette ſeconde eſt à la troiſieme ; & la regle de trois donnera la troiſieme.

On trouveroit de même trois moyennes proportionnelles, quatre, cinq, &c, entre deux grandeurs données.

331. *REMARQUE.* Il n'arrive pas toujours qu'on puiſſe exprimer en nombres les moyennes proportionnelles que l'on cherche ; & l'on verra dans le chapitre ſuivant, quels ſont les cas où cela ne ſe peut pas.

332. THÉORÊME. *On peut toujours trouver une moyenne proportionnelle exprimable en nombres, entre deux quarrés parfaits, c'eſt-à-dire dont on peut extraire la racine ; deux entre deux cubes parfaits ; trois entre deux quatriemes puiſſances parfaites, & ainſi de ſuite.*

DÉMONSTRATION. I°. Soient les deux quarrés parfaits aa, bb, je les multiplie l'un par l'autre ; ce qui donne $aabb$, dont la racine quarrée ab eſt moyenne proportionnelle entre les deux quarrés aa, bb ; puiſque ſon quarré eſt égal au produit des deux quarrés qui ſont ſes extrêmes (330). Ainſi j'ai :: aa, ab, bb : ce qui fait voir que *le produit des racines de deux quarrés, eſt moyen proportionnel entre ces deux quarrés.*

II°. Pour trouver *deux moyennes proportionnelles* entre deux cubes a^3, b^3 ; je multiplie leurs racines a, b, chacune par le quarré aa, ce qui donne les produits a^3, a^2b, qui ſont en même raiſon que les racines a, b, (32). Je multiplie les mêmes racines a, b, chacune par le quarré de la ſeconde : ce qui donne les produits abb, b^3, qui ſont auſſi en même raiſon ; & par conſéquent les deux raiſons a^3, a^2b ; & abb, b^3, étant égales chacune à la raiſon a, b ; ſont égales entre elles : donc a^3, a^2b :: abb, b^3.

Maintenant pour prouver que ces quatre grandeurs ſont, non-ſeulement proportionnelles, mais encore *en proportion continue* ; je multiplie la premiere a^3 par la troiſieme abb, & le produit eſt a^4bb dont la racine quarrée eſt a^2b : par conſéquent a^2b eſt moyenne proportionnelle entre a^3b & abb. De même je multiplie le ſecond terme a^2b par le quatrieme b^3, & le produit eſt a^2b^4 dont la racine quarrée eſt abb : par conſéquent abb eſt moyenne proportionnelle entre a^2b & b^3 ; & les quatre termes a^3, a^2b, abb, b^3 ſont en proportion continue.

III°. Pour trouver *trois moyennes proportionnelles* entre deux quatriemes puiſſances a^4, b^4 ; je multiplie leurs racines a, b, par le cube de la premiere : & les produits a^4, a^3b, ſont encore en même raiſon. Je multiplie les mêmes racines par aab ; & les produits a^3b,

$aabb$, ſont en même raiſon. Je les multiplie encore par abb, & les produits $aabb$, ab^3, ſont en même raiſon. Enfin je les multiplie par b^3, & les produits ab^3, b^4, ſont en même raiſon. Donc j'ai la proportion continue a^4, a^3b :: a^3b, $aabb$ :: $aabb$, ab^3 :: ab^3, b^4 : & on trouvera de même qu'entre deux cinquiemes puiſſances parfaites, il y a quatre moyennes proportionnelles, &c.

Si l'on éleve un binome $a+b$ à ſes puiſſances, & qu'on néglige les coëfficiens numériques; on trouvera que les termes compris entre la plus haute puiſſance de a & la plus haute puiſſance de b, ſont les moyennes géométriques dont nous venons de parler.

RÈGLES DE CINQ, DE SEPT, DE NEUF, &c.

333. Lorſque dans une queſtion propoſée qui contient cinq grandeurs connues, on en cherche une ſixieme, & que les cinq peuvent ſe réduire à trois, de façon que par une regle de trois on puiſſe trouver la ſixieme; les Arithméticiens diſent que cette regle eſt une regle de cinq. De même ils diſent que la regle eſt une regle de ſept, lorſqu'une queſtion contient ſept termes connus, leſquels peuvent ſe réduire à trois, par le moyen deſquels on trouve le huitieme terme cherché, & ainſi des autres. Or les pratiques qu'ils enſeignent, ſont fondées ſur les principes des raiſons compoſées, comme on va voir dans l'exemple ou dans le problême ſuivant.

PROBLÊME. *Deux hommes en trois jours ont fait 24 toiſes d'ouvrage : quatre hommes en 9 jours combien en feront-ils ?*

SOLUTION. Pour réſoudre cette queſtion, les arithméticiens diſent qu'il faut multiplier les deux premiers termes 2 & 3 l'un par l'autre, ce qui fait 6; multiplier enſuite le quatrieme & le cinquieme l'un par l'autre, ce qui fait 36; enfin faire une regle de trois dont le premier terme ſoit le produit 6, le ſecond le nombre 24 de toiſes, & le troiſieme le produit 36. De ſorte que la regle étant faite, le quatrieme terme 144 ſera le nombre de toiſes, que quatre hommes feroient en neuf jours.

6. 24 :: 36. *réponſe* 144

36

144

72

864

La proportion, ſelon les arithméticiens eſt donc 6. 24 :: 36. 144, ou bien en alternant 6. 36 :: 24. 144 : c'eſt-à-dire que le produit 6 du nombre 2 d'hommes multiplié par le nombre 3 de leurs jours, eſt au produit 36 du nombre d'hommes 4 multiplié par leurs jours 9; comme les 24 toiſes faites par

6
864 (144
26
24

par deux hommes en 3 jours, ſont à 144 toiſes que feront 4 hommes en 9 jours.

Or pour rendre raiſon de ceci, il ſuffit de faire obſerver que le nombre 24 de toiſes, doit être au nombre 144 de toiſes; non-ſeulement dans la raiſon du nombre 2 d'hommes au nombre 4 d'hommes, mais encore dans la raiſon du nombre 3 de jours au nombre 9 de jours: par conſéquent 24 doit être à 144, en raiſon compoſée des nombres d'hommes 2, 4, & des nombres de jours 3, 9. Or la raiſon compoſée de ces deux raiſons, eſt 2×3, 4×9, ou 6, 36; & les termes de cette raiſon, ſont les produits des nombres d'hommes par leurs jours: donc, &c.

On ſera encore plus convaincu de ceci, ſi l'on fait attention que deux hommes en trois jours font autant de travail que 2 fois 3 hommes ou 6 hommes en un jour; & que 4 hommes en 9 jours font autant de travail, que 4 fois 9 hommes ou 36 hommes en un jour; & qu'ainſi la queſtion propoſée eſt la même que ſi on diſoit: 6 hommes ont fait 24 toiſes, combien 36 hommes en feront-ils? Ce qui eſt une regle de trois ordinaire.

On juge aiſément par-là, de quelle façon on peut réduire à trois termes, les queſtions de 7, de 9, de 11, &c: c'eſt pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

CHAPITRE X.

DES INCOMMENSURABLES.

334. SI le rappport de deux grandeurs peut s'exprimer en nombres, ces deux grandeurs ſont dites *commenſurables entre elles*; parce qu'on pourra trouver un nombre qui les meſurera. Le rapport de 4 à 2 eſt 2; ces deux grandeurs ſont donc commenſurables: car 2 ſe meſure lui-même, & il meſure auſſi 4; puiſqu'il y eſt contenu deux fois. De même le rapport de 5 à 3 eſt commenſurable: car l'unité les meſure tous les deux, étant contenue cinq fois dans 5, & trois fois dans 3, &c.

335. Si le rapport de deux grandeurs ne peut pas s'exprimer en nombres: ces deux grandeurs ſont dites *incommenſurables entre elles*: ainſi 2 & $\sqrt{3}$ ſont incommenſurables; parce qu'on ne ſauroit exprimer ce que 2 eſt à $\sqrt{3}$, &c.

336. Si deux grandeurs incommenſurables entre elles deviennent commenſurables en les élevant au quarré, on dit que ces deux grandeurs *ſont incommenſurables entre elles, & commenſurables en puiſ-*

ſance. Par exemple, 2 & $\sqrt{3}$ ſont commenſurables en puiſſance; parce que leurs quarrés ſont entre eux comme deux nombres: & ſi ces grandeurs ne ſont commenſurables que lorſqu'on les éleve au cube, on dit qu'elles ſont incommenſurables entre elles & en puiſſance, & commenſurables en troiſieme puiſſance, &c.

337. THÉORÊME I. *Si l'expoſant d'une raiſon doublée n'eſt pas un quarré, ou ſi celui d'une raiſon triplée n'eſt pas un cube; les termes des raiſons ſimples dont ces raiſons ſont doublées ou triplées, ſeront incommenſurables entre eux; mais ſi l'expoſant d'une raiſon eſt un nombre quarré, ou un nombre cube, &c; les termes de la raiſon ſeront entre eux comme deux quarrés, ou comme deux cubes.*

DÉMONSTRATION. Le premier cas eſt facile, après ce qui a été dit ci-devant; & pour le ſecond, ſoit la raiſon 2, 8, dont l'expoſant $\frac{1}{4}$, eſt un nombre quarré. Or l'on voit que 2 eſt le quart de 8: ainſi 2, 8 :: 1, 4. Mais 1 & 4 ſont des nombres quarrés: donc les termes 2 & 8 ſont entre eux comme des nombres quarrés.

De même ſoit la raiſon 16, 54, dont l'expoſant $\frac{16}{54}$, lequel réduit aux moindres termes eſt $\frac{8}{27}$, eſt un nombre cube; puiſque la racine cubique de 8 eſt 2, & celle de 27 eſt 3. Or l'on voit que 16, 54 :: 8, 27; & par conſéquent 16 & 54 ſont entre eux comme des nombres cubes, & ainſi des autres.

338. THÉORÊME. II. *Dans toute progreſſion géométrique aſcendante ou deſcendante, le premier terme eſt commenſurable au ſecond, ſi l'expoſant de la raiſon du premier au troiſieme eſt un quarré; ou ſi celui de la raiſon du premier au quatrieme eſt un nombre cube; ou ſi celui du premier au cinquieme eſt la quatrieme puiſſance d'un nombre, &c.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit la proportion géométrique :: a, b, c, d, e, f, &c. La raiſon du premier terme a au troiſieme c, eſt compoſée de la raiſon a, b, & de la raiſon b, c, (325): or ces deux compoſantes ſont égales, puiſqu'il y a progreſſion: donc la raiſon du premier au troiſieme, eſt doublée de la raiſon a, b, (318); & par conſéquent ſon expoſant eſt le quarré de l'expoſant de la raiſon a, b. Mais on ſuppoſe que cet expoſant eſt un nombre quarré: donc on pourra tirer ſa racine pour avoir l'expoſant de la compoſante a, b, & connoître par-là le rapport du premier terme a au ſecond terme b.

II°. De même la raiſon du premier terme a au quatrieme d, eſt compoſée des trois raiſons égales a, b; b, c; c, d, & par conſéquent elle eſt triplée de la raiſon a, b. Or l'expoſant d'une raiſon triplée eſt le cube de l'expoſant de l'une des compoſantes: dont tirant la racine

cubique de l'expoſant de la raiſon a, d, lequel eſt un nombre cube par la ſuppoſition ; cette racine ſera l'expoſant de la raiſon a, b, & fera voir la raiſon du premier au ſecond, & ainſi des autres.

339. THÉORÊME III. *Dans toute progreſſion géométrique le premier terme & le ſecond ſont incommenſurables entre eux & commenſurables en puiſſance ; ſi l'expoſant de la raiſon du premier au troiſieme n'eſt pas un nombre quarré : & ils ſont incommenſurables entre eux & en puiſſance, ſi l'expoſant du premier au troiſieme n'eſt pas un nombre qu'on puiſſe exprimer.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit la progreſſion :: a, b, c, d, e, &c. L'expoſant du premier terme a au troiſieme c, n'étant pas un nombre quarré, par la ſuppoſition ; on ne pourra en extraire la racine ; or l'expoſant du premier terme au ſecond eſt égal à cette racine ; donc puiſque cet expoſant ne pourra pas s'exprimer en nombres ; les termes a, b, ſeront incommenſurables. Mais les quarrés de ces termes ſeront commenſurables : car ces quarrés étant en raiſon doublée de la raiſon a, b, ſeront en même raiſon que les termes a, c, qui ſont auſſi en raiſon doublée de la raiſon a, b : donc l'expoſant de ces quarrés ſera le même que l'expoſant des termes a, c, & comme on ſuppoſe que cet expoſant eſt un nombre, on pourra donc connoître la raiſon des quarrés.

II°. Que ſi on ſuppoſe que l'expoſant de la raiſon a, c, ne puiſſe pas s'exprimer en nombres, alors la raiſon des quarrés de la raiſon a, b, ne pourra s'exprimer non plus : puiſque leur expoſant étant le même que celui de la raiſon a, c, ne pourra pas nous faire connoître leurs rapports. Ainſi les deux premiers termes a, b, ſeront incommenſurables entre eux & en puiſſance.

340. THÉORÊME IV. *Dans toute progreſſion géométrique, le premier terme & le ſecond ſeront incommenſurables entre eux, & commenſurables en troiſieme puiſſance ; ſi l'expoſant du premier terme au quatrieme eſt un nombre qui ne ſoit pas cube : & ils ſeront incommenſurables entre eux & en troiſieme puiſſance ; ſi l'expoſant du premier au quatrieme eſt une quantité qu'on ne peut exprimer.*

DÉMONSTRATION. La raiſon du premier au quatrieme, eſt triplée de la raiſon du premier au ſecond ; & par conſéquent ſon expoſant eſt le cube de l'expoſant du premier au ſecond : donc puiſqu'on ſuppoſe que cet expoſant n'eſt pas un cube dont on puiſſe extraire la racine, on ne pourra non plus trouver l'expoſant des deux premiers termes. Mais les cubes de ces termes ſeront commenſurables : puiſque

ces cubes étant en raiſon triplée de leurs racines, ſeront entre eux comme le premier & le quatrieme terme qui ſont commenſurables; à cauſe que leur expoſant eſt un nombre. Que ſi cet expoſant n'étoit pas un nombre, il eſt clair que celui des cubes des deux premiers termes ne le ſeroit pas non plus; & que par conſéquent les deux premiers termes ſeroient incommenſurables entre eux & en troiſieme puiſſance.

On trouvera par un ſemblable raiſonnement, que ſi l'expoſant du premier terme au cinquieme, eſt un nombre qui ne ſoit pas une quatrieme puiſſance; le premier & le ſecond terme ſont incommenſurables entre eux, & commenſurables en quatrieme puiſſance: & que ſi cet expoſant n'eſt pas un nombre, le premier & le quatrieme ſont incommenſurables en quatrieme puiſſance; & ainſi des autres.

341. Remarque. Et il faut obſerver que ſi l'expoſant du premier au quatrieme, n'eſt pas un nombre cube; non-ſeulement le ſecond terme eſt un radical, mais encore le troiſieme. Soit par exemple le premier & le quatrieme terme 1. 6. Je nomme les deux moyens $x.y$; & j'ai :: 1. $x.y.$ 6, & par conſequent 1. x^3 :: 1. 6. (330): d'où je tire $x^3=6$, & $x=\sqrt[3]{6}$: ainſi le ſecond terme eſt $\sqrt[3]{6}$. Or ſi je veux trouver le troiſieme, je dis: 1. $\sqrt[3]{6}$ :: $\sqrt[3]{6}$. $\sqrt[3]{36}$; & ce troiſieme eſt la grandeur incommenſurable $\sqrt[3]{36}$.

342. De même ſi l'expoſant du premier au cinquieme, n'eſt pas un nombre qui ſoit une quatrieme puiſſance; les trois termes qui ſont entre le premier & le cinquieme, ſont des grandeurs radicales. Car ſoient le premier & le cinquieme terme 2, 8. Je nomme les trois moyens x, y, z; & j'ai :: 2. $x.y.z.$ 8; & par conſéquent 16. x^4:: 2. 8. (330): d'où je tire $x^4=\frac{16\times 8}{2}$, & $x=\sqrt[4]{64}$; ainſi le ſecond terme eſt $\sqrt[4]{64}$. Or pour trouver le troiſieme, je fais 2. $\sqrt[4]{64}$ :: $\sqrt[4]{64}$. $\frac{\sqrt[4]{64\times 64}}{2}$; & le troiſieme terme eſt $\frac{\sqrt[4]{64\times 64}}{2}$: & pour trouver le quatrieme terme, je fais 2. $\sqrt[4]{64}$ :: $\frac{\sqrt[4]{64\times 64}}{2}$. $\frac{\sqrt[4]{64\times 64\times 64}}{4}$; & ce quatrieme terme eſt incommenſurable de même que les précédens.

On prouveroit de la même façon, que ſi l'expoſant du premier au ſixieme terme, n'eſt pas un nombre qui ſoit une cinquieme puiſſance; les termes compris entre le premier & le ſixieme ſeront incommenſurables.

343. Corollaire. Il ſuit de tout ce que nous venons de dire, qu'on ne peut trouver *une moyenne proportionnelle exprimable en*

nombres entre deux grandeurs, que lorſque l'expoſant de ces grandeurs eſt un quarré : qu'on ne peut trouver *deux moyennes proportionnelles* entre ces mêmes grandeurs, que lorſque l'expoſant eſt un cube : qu'on n'en peut trouver trois que lorſque l'expoſant eſt une quatrieme puiſſance, &c.

Cependant toutes ces moyennes proportionnelles que nous ne ſaurions exprimer en nombres, *s'expriment aiſément en lignes*, par les regles de la géométrie ; comme on verra dans la ſuite.

CHAPITRE XI.

DES LOGARITHMES.

344. SI l'on prend une progreſſion géométrique infinie en montant & en deſcendant $\frac{1}{2^\infty}$, &c, $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32, &c. 2^∞ ; & que ſous les termes 1. 2. 4, &c, qui vont en montant, on mette les termes poſitifs 0. 1. 2. 3, &c, d'une progreſſion arithmétique aſcendante ; & que ſous les termes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$, &c, de la progreſſion géométrique on mette les termes négatifs — 1, — 2, — 3, &c, de la progreſſion arithmétique ; chaque terme de la progreſſion arithmétique ſe nommera le *logarithme* du terme de la progreſſion géométrique ſous lequel il ſe trouvera écrit. Or les deux progreſſions ſeront les ſuivantes : . . .

$\frac{1}{2^\infty}$, &c. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32, &c. 2^∞.
$-^\infty$, &c. — 5. — 4. — 3. — 2. — 1. 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. $^\infty$.

345. J'ai fait obſerver (316), que la ſuite infinie des puiſſances négatives & poſitives d'une grandeur a qui ſont $a^{-\infty}$, &c, a^{-6}. a^{-5}. a^{-4}. a^{-3}. a^{-2}. a^{-1}. a^0. a^1. a^2. a^3. a^4, &c, a^∞, ſont en progreſſion géométrique. Ainſi faiſant $a=2$, cette ſuite de puiſſances littérales ſera la même que la progreſſion géométrique ci-deſſus. Car a^0 eſt égal à 1 (159) ; & les puiſſances négatives a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c, ſont les mêmes que celles-ci $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$; & les expoſans des puiſſances littérales ſeront les mêmes que les termes de la progreſſion arithmétique que nous avons mis ſous ceux de la progreſſion géométrique.

346. COROLLAIRE. Il ſuit delà que *les logarithmes de la progreſſion géométrique auront les mêmes propriétés que les expoſans des puiſſances* de a. Ainſi,

I°. Si je veux *multiplier* le terme 2 de la progreſſion géo-

métrique par le terme 8 ; je n'ai qu'à ajouter enſemble les logarithmes 1, 3, de ces deux termes ; & la ſomme 4 ſera le logarithme du produit cherché (154) : or le terme de la progreſſion géométrique écrit au-deſſus du logarithme 4, eſt 16 : donc 16 eſt le produit de 2 par 8.

II°. Pour *diviſer* le terme 16 de la progreſſion géométrique par le terme 2 ; je prends les logarithmes 4, 1, de ces termes ; & retranchant le ſecond du premier, le reſte 3 eſt le logarithme du quotient cherché (155) : ainſi le terme 8 écrit ſur le logarithme 3, eſt le quotient de 16 diviſé par 2.

III°. Pour *élever* le terme 2 de la progreſſion géométrique à ſa quatrieme puiſſance ; je multiplie le logarithme 1 du terme 2, par l'expoſant 4 de la quatrieme puiſſance de 2 (156) : ainſi le terme 16 écrit au-deſſus du logarithme 4, eſt la quatrieme puiſſance cherchée.

IV°. Pour *extraire la racine cubique* de 8 ; je prends ſon logarithme 3 ; & le diviſant par l'expoſant 3 de la racine cubique, le quotient 1 eſt le logarithme de la racine cubique de 8 (157). Par conſéquent le terme écrit au-deſſus de ce logarithme, eſt la racine cherchée.

D'où l'on voit que ce qu'il faudroit faire par la multiplication & la diviſion, en opérant ſur les termes de la progreſſion géométrique, on le fait par l'addition & la ſouſtraction ; & que ce qu'il faudroit faire par l'élévation des puiſſances ou l'extraction des racines, on le fait par la multiplication & la diviſion. Or comme l'addition & la ſouſtraction ſont moins difficiles que la multiplication & la diviſion ; & que la multiplication & la diviſion ſont moins difficiles que l'élévation des puiſſances & l'extraction des racines ; il eſt viſible que les logarithmes épargnent bien du travail, ſurtout lorſqu'il s'agit de grands calculs, & de l'extraction des racines ſecondes, troiſiemes, quatriemes, &c.

347. Il faut bien obſerver que les logarithmes des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ſont les mêmes que les logarithmes de leurs dénominateurs 2, 4, 8, &c ; à l'exception qu'ils ſont négatifs.

348. Remarque. Comme il ſe trouve entre les termes d'une progreſſion géométrique beaucoup de nombres qui ne ſont point en progreſſion, & qui par conſéquent n'ont point de logarithmes ; l'utilité que l'on tire des logarithmes ſe trouveroit bornée, mais on y a pourvu en cherchant les logarithmes des nombres naturels 1. 2. 3. 4, &c, en cette ſorte :

I°. On a pris la progreſſion géométrique décimale : : 1, 10, 100,

1000, 10000, &c. Et comme pour trouver les logarithmes des nombres entre 1 & 10, il a fallu extraire des racines, ainſi que nous allons dire, ce qui n'auroit pas manqué de donner des reſtes après l'extraction; on a augmenté tous les termes de leur progreſſion, & leurs logarithmes auſſi, de pluſieurs zéros, comme par exemple de 7; & la progreſſion eſt devenue par conſéquent 1. 0000000, 10. 0000000, &c; & leurs logarithmes 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, &c; en mettant un point devant ces zéros, pour diſtinguer les logarithmes d'avec les zéros ajoutés: & l'on a nommé *caractériſtique*, le caractere qui ſe trouve devant ce point. Ainſi dans le logarithme 1.0000000, le caractere 1 ſe nomme le *caractériſtique*, &c.

II°. Après cette préparation, on a cherché le logarithme de 9, ou de 9.0000000, en prenant une *moyenne proportionnelle géométrique* entre les deux termes 1 & 10 de la progreſſion géométrique augmentés de leurs zéros; & en même tems on a pris une *moyenne arithmétique* entre leurs logarithmes auſſi augmentés de leurs zéros, & cette moyenne arithmétique a été le logarithme de la moyenne géométrique. Mais comme la moyenne géométrique s'eſt trouvée moindre que 9 ou 9.0000000; on a cherché une autre moyenne géométrique entre elle & le terme 10 ou 10.0000000, & en même tems une moyenne arithmétique entre le logarithme de la premiere moyenne géométrique, & le logarithme de 10. ou 10.0000000: & comme cette ſeconde moyenne géométrique s'eſt trouvée encore au-deſſous de 9, ou 9.0000000; on a cherché une autre moyenne géométrique entre elle & le nombre 10, & une autre moyenne arithmétique entre ſon logarithme & celui de 10: & lorſqu'en continuant de la même façon on a trouvé une moyenne géométrique entre 9 & 10, on en a pris une autre entre celle-ci & celle qui eſt plus proche de 9, juſqu'à ce qu'on ait trouvé une moyenne géométrique égale à 9, & ſon logarithme.

III°. Le logarithme de 9 étant trouvé, celui de ſa racine 3 s'eſt trouvé aiſément, de même que celui des puiſſances de 3, par les regles données ci-deſſus. Mais il a fallu chercher de la même façon les logarithmes des autres nombres entre 1 & 10, & ceux des nombres entre 10 & 100, &c: ce qui certainement a été un travail très-pénible dont on doit avoir bien des obligations à l'égard de ceux qui ont eu le courage de l'entreprendre.

IV°. Tous les logarithmes des nombres 1. 2. 3. 4. 5, &c, étant trouvés; on a rangé ces nombres en colonnes les uns ſous les autres, & leurs logarithmes à côté: & c'eſt ce qu'on appelle la table des logarithmes, laquelle s'étend depuis le logarithme de 1 juſqu'à ce-

lui de 10000 dans les tables de M. Ozanam qui ſont les plus commodes; & par-là il eſt aiſé de connoître les logarithmes des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c, juſqu'à $\frac{1}{10000}$.

Mais comme il y a des nombres au-delà de 10000, & qu'outre cela il y a des nombres entiers entre 1 & 10000 qui ſont compoſés d'entiers & de fractions, & dont les logarithmes ne ſont pas dans les tables; la queſtion eſt de *trouver leurs logarithmes*, de même que ceux des fractions dont le numérateur eſt plus grand que l'unité : & c'eſt ce que nous allons voir dans les problêmes ſuivans, où nous enſeignerons auſſi à trouver à quel nombre appartient un logarithme qui ne ſe trouve point dans les tables.

349. PROBLÊME I. *Trouver le logarithme du nombre* 9477856.

SOLUTION. Ce nombre étant plus grand que 10000, j'en retranche quelques caracteres à droite, juſqu'à ce que les reſtans ſe trouvent dans les tables. Le moins qu'on peut en retrancher eſt le mieux; parce que les caracteres reſtans ſe trouvent plus près de la fin des tables : ce qui fait que la méthode dont nous allons nous ſervir, devient de la derniere exactitude; quoiqu'elle ne ſoit pas abſolument géométrique.

J'en retranche donc les trois derniers; & les reſtans ſont 9477 qui ſe trouvent dans les tables. Mais comme en retranchant 856, le reſte eſt 9477000; c'eſt-à-dire 9477 multiplié par 1000; je prends dans la table, le logarithme 3.9766709 de 9477, & j'y ajoute le logarithme 3.0000000 de 1000 : & la ſomme 6.9766709 eſt le logarithme du nombre 9477000, (346). Or le nombre propoſé 9477856 eſt plus grand que 9477000, & moindre que 9478000 : car il ne ſurpaſſe 9477000 que de 856; au lieu que 9478000 le ſurpaſſe de 1000. C'eſt pourquoi je prends dans la table, le logarithme 3.9767167 du nombre 9478; & lui ajoutant le logarithme 3.0000000 de 1000, la ſomme 6.9767167 eſt le logarithme de 9478000. Ainſi les logarithmes des nombres 9477000, & 9478000, dont la différence eſt 1000 ſont 6.9766709, & 6.9767167; & la différence de ces deux logarithmes eſt 458.

Je dis donc : ſi la différence 1000 des nombres 9477000 & 9478000 donne 458 pour la différence de leurs logarithmes; la différence 856 des nombres 9477000 & 9477856 que donnera-t'elle pour la différence de leur logarithme? & faiſant la regle de trois, je trouve 1000. 458 :: 856. 392. Ainſi la différence cherchée eſt 392 avec un reſte que je néglige : parce que les logarithmes étant fort grands, leur dernier caractere à droite peut être plus grand ou moindre

moindre ſans altérer aucunement leur valeur. Bien plus on pourroit retrancher de tous les logarithmes deux caracteres à droite, ſans craindre qu'il y eût de l'erreur : ce que l'on concevra aiſément ſi l'on ſe rappelle que chaque logarithme ayant été augmenté de ſept zéros, on a fait la même choſe que ſi on avoit réduit tous les logarithmes en fractions dont le dénominateur fût 10000000; & que par conſéquent il eſt clair que les deux derniers caracteres à droite d'un logarithme étant extrêmement petits, eu égard à ce dénominateur, peuvent être négligés.

Ayant donc trouvé que la différence des logarithmes des nombres 9477000 & 9477856 eſt 392, j'ajoute 392 au logarithme de 9477000; & la ſomme 6.9767101 eſt le logarithme du nombre propoſé 9477856.

350. PROBLÊME II. *Trouver le logarithme de la fraction* $\frac{2}{3}$.

SOLUTION. La fraction $\frac{2}{3}$ eſt la même choſe que le nombre 2 diviſé par 3. C'eſt pourquoi je prends le logarithme 0.3010300 du nombre 2, & le logarithme 0.4771212 du nombre 3. Je retranche ce dernier du premier, & le reſte —0.1760912 eſt le logarithme de $\frac{2}{3}$ (346); & ce logarithme eſt négatif : car ſi d'une grandeur on retranche une autre grandeur plus grande qu'elle, le reſte eſt négatif. Ces ſortes de ſouſtractions ſe font en retranchant la moindre quantité de la plus grande, & écrivant le reſte avec le ſigne —.

351. PROBLÊME. III. *Trouver le logarithme du nombre* $7\frac{1}{2}$.

SOLUTION. Je réduis $7\frac{1}{2}$ en fraction : ce qui fait $\frac{15}{2}$. Or cette fraction eſt la même choſe que le nombre 15 diviſé par 2 : c'eſt pourquoi je prends le logarithme 1.1760913 du nombre 15, & le logarithme 0.3010306 du nombre 2; & retranchant celui-ci du premier, le reſte 0.8750613 eſt le logarithme de la fraction $\frac{15}{2}$ (346.)

Si après avoir réduit l'entier & fraction en fraction, on trouvoit que le numérateur fût plus grand que 10000; on chercheroit le logarithme de ce numérateur, comme il a été enſeigné ci-deſſus (349); & retranchant de ce logarithme le logarithme du numérateur, le reſte ſeroit le logarithme du nombre propoſé.

352. PROBLÊME IV. *Trouver à quel nombre appartient un logarithme donné.*

SOLUTION. Je cherche ce logarithme dans les tables, & ſi je le trouve, le nombre écrit à ſon côté ſera celui à qui il appartient.

Mais ſi le logarithme ne ſe trouve pas dans les tables, on le cher-

chera comme on va le voir dans les exemples ſuivants.

I°. Soit par exemple, le logarithme 3.0441367. Je cherche dans les tables, les logarithmes entre leſquels ce nombre ſe trouve; & ces logarithmes ſont 3.0437551, & 3.0441476, dont le premier appartient au nombre 1106, & le ſecond au nombre 1107, qui ne different que de l'unité. Par conſéquent le logarithme propoſé doit appartenir à un nombre plus grand que 1106, & moindre que 1107: ce qui ne ſauroit être, à moins que ce nombre ne ſoit compoſé d'entier & de fraction. Je prends la différence 3925 des logarithmes des deux nombres, & la différence 3816 du moindre de ces logarithmes au logarithme propoſé 3.0441367. Je fais la différence 1 des deux nombres 1106 & 1107, égale à $\frac{100}{100}$, pour rendre plus juſte l'opération que je vais faire; & je dis: ſi la différence 3925 des logarithmes 3.0437551 & 3.0441476 donne $\frac{100}{100}$ pour la différence des nombres auxquels ils appartiennent; la différence 3916 des logarithmes 3.0441367 & 3.0437451, que donnera-t'elle pour la différence de leurs nombres? Et faiſant la regle de Trois, je trouve 3925. $\frac{100}{100}$: 3916. $\frac{97}{100}$. Par conſéquent $\frac{97}{100}$. eſt à fort peu de choſe près, la différence du nombre 1107 au nombre qui appartient au logarithme propoſé. Ajoutant donc $\frac{97}{100}$ à 1107, la ſomme $1107\frac{97}{100}$ eſt le nombre auquel appartient le logarithme 3.0441367.

II°. Si le logarithme propoſé eſt 4.2507127, lequel eſt plus grand que le plus grand logarithme des tables; j'en retranche le moindre logarithme qui puiſſe en être retranché pour faire en ſorte que le reſte ſe trouve dans les tables près de la fin. Ainſi j'en retranche le logarithme 0.3010300 qui appartient au nombre 2; & le reſte eſt 3.9496827: je cherche ce logarithme dans les tables, & trouvant qu'il appartient au nombre 8906, je multiplie ce nombre par 2, & le produit 17812 eſt le nombre qui appartient au logarithme propoſé 4.2507127 (346): car pour avoir ce logarithme, il faut ajouter au logarithme 3.9496827, le logarithme de 2 que nous avons retranché du logarithme propoſé.

III°. Enfin ſoit le logarithme propoſé 4.1712876. J'en retranche le logarithme 0.3010300 du nombre 2, & le reſte eſt 3.8702576. Or ce logarithme ne ſe trouve point dans les tables, & je vois qu'il eſt entre les logarithmes 3.8702283 & 3.8702868, dont le premier appartient au nombre 7417, & le ſecond au nombre 7418, dont la différence eſt 1 que je fais égale à $\frac{100}{100}$. La différence des logarithmes de ces deux nombres eſt 585, & la différence du moindre de ces logarithmes au logarithme 3.8702576 eſt 293. Je dis donc: ſi la différence 585 des logarithmes 3.8702283 & 3.8702868 donne $\frac{100}{100}$ pour

la différence des nombres auxquels ils appartiennent : la différence 293 des logarithmes 38702283 & 38702576 que donnera-t-elle pour la différence de leurs nombres? Et faisant la regle je trouve $585.\frac{100}{103}::293.\frac{51}{100}$. Ainsi $\frac{50}{100}$ ou une moitié est la différence du nombre 7417 au nombre qui appartient au logarithme 3.8702576; & par conséquent ce nombre est $7417\frac{1}{2}$. Mais pour avoir le logarithme proposé 41712876, il faut ajouter au logarithme 3.8702576 le logarithme de 2 que nous avons retranché au proposé : donc il faut multiplier le nombre $7417\frac{1}{2}$ par 2 (346); & le produit 14835 sera le nombre qui appartient au logarithme 41712876.

353. Je pourrois proposer ici plusieurs questions, dont la solution feroit voir l'utilité des logarithmes : mais pour abréger, je me contenterai de rapporter les deux suivantes.

354. PROBLÊME V. *Le premier & le second terme d'une progression géométrique, & le nombre des termes étant donnés; trouver le dernier terme.*

SOLUTION. Soient les deux premiers termes 1 & 2, & le nombre des termes 14 : l'exposant de la progression sera donc 2, & le nombre des termes diminué de l'unité est 13. Or le dernier terme est égal au premier multiplié par l'exposant élevé à un dégré égal au nombre des termes moins un (309) : donc le dernier terme est égal à 1 multiplié par la treizieme puissance de 2. Mais comme il seroit trop long de chercher la treizieme puissance de 2; je prends le logarithme 0.3010300 de 2; & le multipliant par 13, le produit 3.9133900 est le logarithme de la treizieme puissance de 2. Ce logarithme n'est pas dans les tables : mais j'en trouve un qui est 3.9133899, qui ne differe que d'une unité, & qui par conséquent est le même. Ainsi le nombre 8192, à qui ce logarithme appartient, est la treizieme puissance de 2; & cette puissance, multipliée par le premier terme 1, donne le dernier terme cherché 8192.

355. PROBLÊME VI. *Le premier terme, le second, & le dernier d'une progression géométrique étant données; trouver le nombre des termes.*

SOLUTION. Dans toute progression géométrique, le premier & le troisieme terme sont entre eux comme les quarrés des deux premiers; le premier & le quatrieme sont entre eux comme les cubes des deux premiers; le premier & le cinquieme sont entre eux comme les quatriemes puissances des deux premiers, &c. (327) : d'où il suit que le premier est au dernier, comme le premier élevé à une puissance dont l'exposant est égal au nombre des termes moins un, est au

ſecond élevé à la même puiſſance. Cela poſé,

Soient les deux premiers termes 1, 2, & le dernier 8192. Je nomme le premier terme a, le ſecond b, le dernier c, & le nombre des termes moins un x : donc $a^x . b^x :: a . c$.

Je nomme $l\,a$ le logarithme de a, $l\,b$ le logarithme de b, & $l\,c$ le logarithme de c : donc le logarithme de a^x, c'eſt-à-dire le logarithme de a élevé à la puiſſance x, eſt $x\,l\,a$: car quand on éleve une grandeur à une puiſſance, on multiplie ſon logarithme par l'expoſant de cette puiſſance (346). Par la même raiſon, le logarithme de b^x eſt $x\,l\,b$: ainſi les logarithmes de la proportion géométrique $a^x . b^x :: a . c$, ſont $x\,l\,a . x\,l\,b . l\,a . l\,c$; & ces quatre logarithmes ſont en proportion arithmétique, puiſque les grandeurs dont ils ſont les logarithmes ſont en proportion géométrique.

Faiſant donc la ſomme des extrêmes & la ſomme des moyens, j'ai $x\,l\,a + l\,c = x\,l\,b + l\,a$; & faiſant paſſer $x\,l\,a$ du premier membre dans le ſecond, & $l\,a$ du ſecond dans le premier, j'ai $l\,c - l\,a = x\,l\,b - x\,l\,a$; & diviſant tout par $l\,b - l\,a$, je trouve $x = \frac{l\,c - l\,a}{l\,b - l\,a}$; ce qui me fait voir que le nombre des termes diminué de l'unité, eſt égal à la différence du logarithme du dernier au logarithme du premier, diviſée par la différence du logarithme du ſecond terme au logarithme du premier.

Je prends donc le logarithme du dernier terme 8192, lequel eſt 3. 9133899, ou 3. 9133900 ; ce qui n'altere point ce logarithme, comme on a vu dans le problême précédent ; & en retranchant le logarithme du premier terme qui n'eſt compoſé que de zeros, le reſte eſt encore 3.9133900. Je prends de même le logarithme 0.3010300 du ſecond terme 2, duquel retranchant le logarithme du premier, le reſte eſt encore 0. 3010300 : je diviſe 3. 9133900 par 0. 3010300 ; & le quotient 13 me fait voir que le nombre des termes moins un eſt 13 ; & que par conſéquent, la progreſſion eſt compoſée de 14 termes.

356. Ce ſeroit ici le lieu de parler des fractions décimales : mais comme nous n'avons point parlé des toiſes quarrées & cubiques, auxquelles on applique quelquefois ce calcul, nous ne traiterons cette matiere que lorſque nous expliquerons le toiſé.

Fin du Calcul.

ÉLÉMENS
DES PRINCIPALES PARTIES DES MATHÉMATIQUES.

LIVRE SECOND.

Qui contient les élémens de la géométrie théorique & pratique des lignes, des ſurfaces & des ſolides, de la trigonométrie, des ſections coniques, du toiſé de la maçonnerie & des bois, & du calcul des fractions décimales.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS ET PRINCIPES.

LA Géométrie a pour objet l'étendue conſidérée ſelon ſes trois dimenſions; ſavoir l'étendue en longueur, ou *les lignes*; l'étendue en longueur & largeur, ou *les ſurfaces*; l'étendue en longueur, largeur, & profondeur, ou *les ſolides* : tel eſt l'objet général de ce ſecond Livre.

ORIGINE ET PROPRIÉTÉS DES LIGNES.

1. La *matiere* ou le *corps*, eſt ce qui a des parties unies les unes aux autres : tout ce que nous voyons des yeux corporels, eſt de cette nature.

2. Le *point* eſt une portion de matiere ſi petite, qu'on peut la

gueur, ou pour la largeur, on pour la profondeur : quelquefois on nomme *baſe*, la ſurface qui a deux de ces longueurs; & la troiſieme longueur ſe nomme alors *hauteur*. Par exemple, ſi l'on nomme la ſurface ABCD, *baſe* du ſolide, la ligne qui marquera la diſtance de cette baſe ABCD à l'autre poſition EFGH ſe nomme la *hauteur*. Nous enſeignerons dans la ſuite comment on doit trouver la ligne droite qui marque la diſtance entre deux lignes, entre deux ſurfaces, entre deux corps, &c.

17. La longueur, largeur, & profondeur, ſe nomme les *trois dimenſions* des corps ou des ſolides.

18. Quoique les trois dmienſions du corps ſoient réellement inſéparables, qu'il n'y ait point de lignes ſans largeur & profondeur, ni de ſurfaces ſans profondeur; cependant on peut conſidérer l'une de ces dimenſions ſans faire attention aux autres. Par exemple, je puis conſidérer la longueur d'un chemin, la couper en pluſieurs parties, lui faire prendre des détours, &c. ſans m'embarraſſer de ſa largeur, & il n'en ſera pas moins vrai que cette longueur ſera double de ſa moitié, triple de ſon tiers, &c. qu'elle ſera devenue courbe de droite qu'elle étoit, &c. De même je puis conſidérer la ſurface d'une place, la couper en pluſieurs parties, lui faire changer de figure, &c. ſans penſer le moins du monde à ſa profondeur : ce qui n'empêchera pas de conclure que cette ſurface ſera devenue longue, de quarré qu'elle étoit, &c. Ainſi l'on auroit tort de ne vouloir pas admettre ces ſortes de ſuppoſitions ou plutôt d'abſtractions : puiſqu'on en tire des conſéquences qui ſont autant de vérités inconteſtables, dont l'utilité n'eſt pas à mépriſer.

19. La *géométrie* eſt la ſcience qui apprend à connoître les propriétés des corps, ſelon leurs trois dimenſions, longueur, largeur, & profondeur. On la diviſe en *géométrie ſimple*; & en *géométrie compoſée*.

20. Il ne ſauroit y avoir de lignes droites plus droites les unes que les autres : puiſqu'elles prennent toutes le plus court chemin entre leurs extrêmités. Mais on peut trouver une infinité de lignes courbes de différente eſpece, ſelon qu'elles prendront des chemins plus longs ou plus courts entre leurs extrêmités, & dont les parties ſeront diſpoſées entre elles de différentes manieres. Or, la géométrie ſimple, qu'on nomme auſſi *géométrie élémentaire*, ne conſidere entre toutes ces lignes courbes, que la ſeule ligne circulaire, & par conſéquent elle ſe borne à la conſidération des ſurfaces terminées par des lignes droites & circulaires, & à celles des corps ou ſolide dont les ſurfaces ſont compoſées de ſurfaces planes, ou de ſurfaces qui ſont une ſuite de lignes circulaires.

La

La géométrie composée, qu'on nomme aussi *géométrie transcendante*, s'étend à toutes les lignes courbes de quelque espece qu'elles soient, aux surfaces bornées par ces sortes de lignes, & aux solides dont les surfaces ont quelques-unes de ces lignes pour une de leurs dimensions. Il faudroit des volumes sans fin, pour traiter à fond la géométrie composée, à cause du nombre infini de courbes qu'on peut imaginer; c'est pourquoi, quand nous aurons vu les élémens de la géométrie simple, je me bornerai à parler des trois courbes des sections coniques, qui sont celles dont l'usage est le plus fréquent & le plus nécessaire.

De la ligne circulaire.

21. Le *cerele* est un espace plan ABCD (*fig.* 11) terminé par une ligne courbe ABCD, dont tous les points sont également éloignés d'un point O pris dans cet espace. Le point O se nomme centre du cercle, la courbe, ABCD se nomme *circonférence*, & toutes les lignes droites AO, BO, &c. menées du centre aux points de la circonférence, se nomment rayons. Ainsi tous les rayons d'un cercle sont égaux; car ces rayons étant des lignes droites, mesurent les distances des points de la circonférence au centre, & ces distances sont égales par la définition du cercle.

22. Toute ligne droite qui passe par le centre O d'un cercle, & qui se termine de part & d'autre à la circonférence, se nomme *diametre*, & ce diametre est toujours double du rayon, car il est composé de deux rayons AO, OC.

23. Tout diametre AC (*fig.* 12) divise le cercle en deux parties égales, & la circonférence aussi. Concevons que le plan du cercle ABCD soit fendu le long de la ligne AC, qu'il y ait une charniere en A & une autre en C, & qu'on fasse tourner autour de ces charnieres la partie ABC du plan du cercle, jusqu'à ce qu'elle vienne tomber sur l'autre partie ADC de ce plan; les points A, C de la droite AC ne bougeant point de leur place; tous les autres points de la ligne AC ne bougeront point non plus; car autrement la ligne AC cesseroit d'être droite entre ses extrêmités; ainsi le centre O restera où il est. Or, si le plan ABC tombant sur le plan ADC, ne lui étoit parfaitement égal, la partie de circonférence ABC ne tomberoit pas non plus sur l'autre partie de circonférence ADC, ainsi elle tomberoit, ou toute entiere entre le diametre AC & la partie de circonférence ADC, ou toute entiere en dehors de ADC, ou en partie en dedans & partie en dehors.

Si elle tomboit en dedans comme ARC; le rayon OD mené du

centre O à un point D de la portion de circonférence ADC, couperoit auparavant la portion de circonférence ARC en un point R, & par conſéquent le rayon OR ſeroit plus petit que le rayon OD, c'eſt-à-dire on pourroit mener dans un cercle deux rayons inégaux : ce qui eſt contre la nature du cercle. De même ſi ABC tomboit en dehors comme ASC, le rayon OS mené à la portion de circonférence ASC couperoit auparavant ADC en un point D, & l'on auroit encore dans un même cercle deux rayons inégaux OD, OS. Enfin ſi ABC en tombant ſur ADC avoit une partie AMD en dedans de ADC (*fig.* 13) & une partie DSC en dehors; le rayon OM mené ſur la partie intérieure AMD ne pourroit couper la partie de circonférence ADC, à moins qu'on ne le prolongeât en R, & par conſéquent OM ſeroit plus court que OR; & le rayon OS mené ſur la partie extérieure DSC couperoit auparavant ADC en N, & OS ſeroit plus grand que ON. Ainſi nous aurions encore des rayons inégaux OM, OR, OS, dans un même cercle; ce qui eſt impoſſible. Donc il faut abſolument que la portion ABC de circonférence, tombe ſur l'autre portion ADC, & lui ſoit égale, & que par conſéquent le cercle & la circonférence ſoient coupés chacun en deux, également.

24. HYPOTHESE I. *Si une ligne droite* AO *qui eſt en dedans un plan, tourne ſur ce plan autour de ſon extrêmité* O, *qui ne change jamais de place; ſon autre extrêmité* A *décrira une circonférence de cercle* ABCD, *dont le centre ſera le point* O. (Fig. 11.)

De même ſi l'on prend avec le compas la grandeur AO de la ligne AO, & qu'ayant fixé l'une de ſes pointes en O, on faſſe tourner l'autre A autour de ce point, en tenant toujours le compas élevé à plomb ſur le plan, la pointe A décrira la même circonférence ABCD.

Toute partie AB ou AD, &c, d'une circonférence, ſe nomme *arc.*

25. HYPOTHESE II. *Si l'on ſuppoſe qu'un rayon de cercle* DO *tourne autour de ſon centre* O *d'un mouvement toujours égal, les arcs de cercle* DA, AB, *&c, que ſon extrêmité* D *décrira dans des tems égaux, ſeront égaux.* (Fig. 11.)

Suppoſons que le rayon DO ait paſſé dans une minute de la poſition DO, à la poſition AO; & que dans une autre minute il paſſe de la poſition AO à la poſition BO : il eſt clair qu'il fait le même chemin dans cette ſeconde minute, que ſi à la fin de la premiere on l'avoit remis dans ſa premiere poſition DO, & qu'il eût continué à ſe mouvoir pendant la ſeconde minute. Or, en ce cas, ſon extrêmité D auroit décrit dans la ſeconde minute, , le même arc DA qu'elle auroit décrit dans la premiere; à cauſe de ſon mouvement égal. Donc

l'arc AB qu'il a décrit en paſſant de la poſition AO à la poſition BO dans la ſeconde minute, avec le même mouvement, doit être auſſi égal à l'arc DO.

26. Les géometres diviſent la circonférence du cercle en 360 parties égales ou petits arcs égaux, qu'ils nomment degrés; chaque degré ſe diviſe en 60 parties égales, qu'on nomme *minutes*; chaque minute en 60 parties égales, nommées *ſecondes*; chaque ſeconde en 60 parties égales, nommées *tierces*; & ainſi de ſuite.

27. HYPOTHESE III. *Si une ligne* AO *tourne autour de ſon extrêmité* O, *comme autour d'un centre; toutes les circonférences que ſes points* A, B, C, *&c, décriront, ſeront décrites dans un même tems, de même que leur moitié, leur tiers, leur quart*, &c. (Fig. 14.)

DÉMONSTRATION. I°. La ligne AO en tournant autour du point O ne peut pas revenir à la premiere poſition AO que tous ſes points A, B, C &c, ne reviennent en même tems à leurs poſitions : car autrement cette ligne ceſſeroit d'être droite. Or, quand ces points ſont revenus à leur premiere poſition, leurs circonférences ſont décrites : donc les circonférences ſont toutes décrites dans un même tems.

II°. Suppoſons que la ligne AO ait paſſé de la poſition AO à la poſition EO, & que l'arc AE décrit par le point A, ſoit, par exemple, la cinquieme partie de ſa circonférence : donc le point A, dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé à décrire l'arc AE, décrira la circonférence entiere. Or, le point B aura décrit l'arc BH dans le même tems que le point A aura décrit l'arc AE; ainſi ſi cet arc BH étoit moindre que la cinquieme partie de ſa circonférence, le point B dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé à parcourir l'arc BH, décriroit cinq parties égales de ſa circonférence, moindres chacune que la cinquieme partie; donc il ne décriroit pas les cinq cinquiemes de ſa circonférence, c'eſt-à-dire ſa circonférence entiere : ce qui eſt impoſſible; puiſqu'il faut qu'il décrive ſa circonférence dans le même tems que le point A décrit la ſienne.

De même ſi l'arc BH étoit plus grand que la cinquieme partie de ſa circonférence, le point B dans cinq tems égaux à celui qu'il a employé à décrire cet arc, décriroit cinq parties égales de ſa circonférence plus grandes chacune que la cinquieme : donc il décriroit plus de cinq cinquiemes, c'eſt-à-dire plus que ſa circonférence; ce qui eſt encore impoſſible par la même raiſon : donc, &c.

Et delà, il ſuit que les arcs CR, BH, &c, décrits par tous les points de la ligne AO entre une de ſes poſitions AO & une autre poſition EO, valent tous un même nombre de degrés de leurs circonférences.

Car ſi l'arc AE vaut, par exemple, la ſixieme partie de ſa circonférence ; tous les autres arcs CR, BH, &c, vaudront auſſi la ſixieme partie de leur circonférence : or, ces circonférences ſont diviſées chacune en 360 degrés : donc tous les arcs vaudront la ſixieme partie de 360 degrés, & par conſéquent ils vaudront un même nombre de degrés de leurs circonférences.

Axiomes, preuve de ſuperpoſition.

28. Les axiomes ou les principes ſur leſquels la géométrie fonde tous ſes raiſonnemens, ſont les ſuivans, 1°. *Il eſt impoſſible qu'une choſe ſoit & ne ſoit pas dans un même tems.* 2°. *Les parties d'un tout, priſes enſemble, ſont égales au tout.* 3°. *Si deux grandeurs ſont égales à une troiſieme, elles ſont égales entre elles.* 4°. *Si à deux grandeurs égales on ajoute ou on retranche des grandeurs égales, les ſommes ou les reſtes ſeront égaux, & ſi on leur ajoute ou retranche des grandeurs inégales, les ſommes ou les reſtes ſeront inégaux.* 5°. *Si on multiplie ou ſi l'on diviſe des grandeurs égales par des grandeurs égales, les produits ou les quotiens ſeront égaux, & ſi on les multiplie ou diviſe par des grandeurs inégales, les produits ou les quotiens ſeront inégaux.* 6°. *Si deux grandeurs étant miſes l'une ſur l'autre, conviennent parfaitement, en ſorte que les parties de l'une n'excedent pas les parties de l'autre, ces deux grandeurs ſont parfaitement égales.*

Il n'eſt pas étonnant qu'une ſcience qui n'emploie que des principes auſſi clairs & évidens que ceux-ci, en tire des conſéquences d'une parfaite certitude ; mais ce qu'il y a d'admirable, c'eſt qu'avec la ſeule ſimplicité de ces principes, elle puiſſe élever l'eſprit à de ſi belles & profondes connoiſſances.

29. Lorſqu'on prouve l'égalité de deux grandeurs en les mettant l'une ſur l'autre ; cela s'appelle *démontrer par la ſuperpoſition.* Quelques Auteurs ont prétendu que cette façon de démontrer n'étoit pas aſſez géométrique : mais il eſt aiſé de faire voir qu'ils ont eu tort de penſer ainſi. En effet, ſi la géométrie eſt la ſcience qui démontre les vérités par les voies les plus ſimples & les plus courtes ; je n'en vois point de plus convenable à cette fin, pour faire voir que deux grandeurs ſont égales, que de montrer qu'elles conviennent parfaitement lorſqu'on les met l'une ſur l'autre. Auſſi ceux qui ont eu ce ſcrupule, ont-ils été obligés d'uſer de détours longs & ennuyans, pour prouver des vérités qui ſautent aux yeux.

30. On ne doit point trouver à redire que j'emploie quelquefois le cercle à l'égard des lignes droites, ni me reprocher qu'en agiſſant ainſi, je n'obſerve pas l'ordre naturel des matieres. Je n'uſe du cercle en parlant des lignes droites, que comme d'un inſtrument dont on

ne peut ſe paſſer dans la plupart des problêmes qui concernent les lignes droites, & dont il faut connoître du moins la formation pour s'en ſervir avec connoiſſance de cauſe. Mais ce même cercle, conſidéré comme une figure géométrique qui renferme grand nombre de belles propriétés utiles à la géométrie, eſt traité dans un Chapitre à part ſelon l'ordre des matieres.

31. Avertissement. Pour abréger le diſcours, je ſuppoſerai toujours dans les Chapitres ſuivans, que les différentes lignes que je comparerai entre elles, ou que je menerai dans les figures, ſont dans un même plan, c'eſt-à-dire dans une même ſurface plane; à moins que je n'avertiſſe expreſſément du contraire: & l'on fera bien de faire attention à ceci; car autrement la plupart des propoſitions & des démonſtrations ſeroient abſolument fauſſes.

CHAPITRE II.

DES LIGNES DROITES, DES ANGLES QU'ELLES FORMENT, DES LIGNES PERPENDICULAIRES, ET DES LIGNES PARALLELES.

Proposition I.

32. *Entre deux points* A, B, *on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite.* (Fig. 1.)

Démonstration. La ligne AB eſt le plus court chemin entre ſes extrêmités A, B: or, il ne ſauroit y avoir deux chemins plus courts entre deux points (7): Donc on ne ſauroit mener plus d'une ligne de A à B; c'eſt-à-dire que ſi après avoir mené AB, on veut en mener une autre, cette ſeconde tombera ſur la premiere, & n'en ſera pas différente. C. Q. F. D.

33. Corollaire I. *Toutes les parties* AC, CD, &c, *d'une ligne droite* AB, *ſont auſſi des lignes droites, & ſont entre elles en ligne droite.* (Fig. 1.)

Démonstration. La ligne AB eſt droite par la ſuppoſition: donc le point A, a décrit cette ligne en allant de A en B, toujours devant lui, ſans s'écarter un moment ni à droite ni à gauche (6): donc auſſi en allant de A en C, il ne s'eſt point écarté ni à gauche ni à droite; & le chemin AC qu'il a pris eſt une ligne droite. On prouvera la même choſe des autres parties CD, &c, de la ligne AB, par la même raiſon: donc le chemin que le point A, a pris de A en D, eſt une ligne droite. Mais AD eſt compoſée de deux parties AC, CD: donc ces deux parties AC, CD ſont en ligne droite, & ainſi des autres.

34. COROLLAIRE II. *Si deux lignes droites* AB, DE *ont deux points communs* D, B; *c'eſt-à-dire ſi ces deux points appartiennent également aux deux lignes, ces deux lignes* AB, DE *ne ſont enſemble qu'une ſeule ligne droite* AE. (Fig. 1.)

DÉMONSTRATION. Concevons que le point A mis en A ait décrit la droite AB, & que ce même point mis en D ait décrit la droite DE; ce point A aura décrit les parties AD & BD de la droite AB, en allant toujours devant lui ſans s'écarter un moment ni à droite ni à gauche; car ces deux parties ſont en ligne droite, (33). Par la même raiſon le point A aura auſſi décrit les parties DB, BE de la droite DE, en allant toujours devant lui ſans s'écarter ni à gauche ni à droite: donc le point A aura décrit les trois lignes AD, BD, BE ſans s'écarter ni à gauche ni à droite; & partant la ligne AE compoſée de ces trois lignes, ſera droite. Or, la ligne AE eſt la même que les deux droites AB, DE, qui ont la partie commune DB: donc ces deux lignes ſont en ligne droite.

35. COROLLAIRE III. *Donc ſi deux lignes droites ſe coupent, elles ne ſe coupent qu'en un point.* Car ſi elles ſe coupoient en deux points, elles auroient deux points communs, & ne formeroient qu'une ſeule ligne droite; & par conſéquent elles ne ſe couperoient pas.

36. PROBLÊME. *Entre deux points donnés* A, B, *mener une ligne droite & la prolonger tant qu'on voudra.* (Fig. 1.)

SOLUTION. Je prends un fil délié que je noircis avec du charbon; je tends ce fil avec les mains, autant qu'il ſe peut, ſans le caſſer, & dans cet état, je le couche ſur le plan où ſont les points donnés A, B, de façon que ce fil paſſe par ces deux points. La trace noire qu'il laiſſe ſur le plan entre A & B, eſt la droite demandée: car ce fil ne pouvant être plus tendu qu'il n'eſt, prend le plus court chemin entre A & B.

Je prends ſur la trace AB un point D entre A & B, & tenant mon fil auſſi tendu qu'auparavant, je le fais paſſer par les points D, B, enſorte que la trace qu'il laiſſe, s'étende au-delà de B, comme de B en E, & la partie BE de cette trace, eſt le prolongement de la ligne AB du côté de B: car la trace DE & la trace AB ſont deux lignes droites qui ont deux points communs D, B, & par conſéquent elles ne forment qu'une ſeule ligne droite, (34); & on prolongera de la même façon, la ligne AB, tant qu'on voudra de part & d'autre.

Ceci ſuppoſe que le plan ſur lequel ſont les deux points A, B ſoutient le fil dans toutes ſes parties, ainſi que feroit un plan qui feroit

horizontal. Mais ſi ce plan étoit élevé au-deſſus de l'horizon, comme un mur, alors le fil n'étant pas ſoutenu par-tout, la peſanteur de ſes parties lui feroit décrire une ligne courbe : or, en ce cas, il faudroit ſe ſervir de l'inſtrument nommé *regle.*

LA REGLE.

Pour conſtruire cet inſtrument, on prend une planche bien unie, qui n'ait pas beaucoup d'épaiſſeur, ou une lame de cuivre, d'argent, &c : on trace ſur cette planche ou ſur cette lame, une ligne droite, après quoi on la coupe le long de cette ligne, & l'inſtrument eſt fait. (*Fig.* 15).

Pour mener donc une ligne droite entre deux points A, B, on poſe la regle RS ſur le plan où ſont les points donnés A, B, de façon que ces deux points touchent le côté RS qui a été fait en ligne droite : puis mettant le crayon ou la plume ſur l'un des points A, on mene le crayon ou cette plume de A vers B, en ſuivant toujours la droite RS, & par ce moyen la ligne AB qu'on trace ſur le plan, eſt une ligne droite; puiſqu'elle ſuit la droite RS ſans s'écarter ni à droite ni à gauche.

Pour ſavoir *ſi une regle eſt bien faite*, on trace ſur un plan une droite AB, par le moyen d'un fil : puis on met ſur le plan la regle RS, & l'on examine ſi ſon côté RS s'ajuſte à la droite AB, ſans s'écarter ni d'un côté ni d'autre; & ſi cela eſt, la regle eſt juſte.

37. COROLLAIRE. *Deux points* A, B (Fig. 1) *d'une ligne droite étant donnés, la poſition ou la direction de cette ligne eſt facile à reconnoître :* il n'y a qu'à mener une ligne droite entre ces deux points, & ce ſera certainement la ligne droite à qui ces deux points appartiennent; puiſqu'il n'eſt pas poſſible de mener quelqu'autre ligne droite entre ces deux points. (32).

PROPOSITION II.

38. *Si des extrêmités* A, B, *d'une droite* AB *on mene deux droites* AC, BC, *qui ſe coupent en* C, *& deux autres droites* AE, BE *qui ſe coupent en* E, *en dedans des deux autres; les deux premieres* AC, BC *priſes enſemble, ſont plus grandes que les deux autres* AE, BE *priſes enſemble.* (Fig. 16.)

DÉMONSTRATION. Il paroît naturel de dire que les deux AC, BC prenant un plus grand détour que les deux AE, BE, doivent être auſſi plus grandes : mais comme bien des gens n'admettroient pas ceci pour une démonſtration géométrique ; voici comme on le prouvera.

Je prolonge l'une des intérieures BE, jusqu'à ce qu'elle coupe l'extérieure opposée AC en H : la ligne AE étant droite entre ses extrêmités A, E, est plus courte que les deux AH, EH qui partent des mêmes extrêmités A, E, & qui ne prennent pas le même chemin : ainsi j'ai AE $<$ AH + EH. De même la ligne BH ou BE + EH étant droite entre ses extrémités B, H, est plus courte que les deux ensemble BC, CH; & partant BE + EH $<$ BC + CH. Ajoutant donc ensemble la plus courte AE avec la plus courte BE + EH, & la plus longue AH + EH avec la plus longue BC + CH, j'aurai AE + BE + EH $<$ AH + EH + BC + CH : retranchant de part & d'autre la droite EH, j'aurai AE + BE $<$ AH + CH + BC. Mais AH + HC = AC : donc AE + BE $<$ AC + BC. Ce qu'il faut démontrer.

PROPOSITION III.

39. *Si une droite* AB, *coupe une autre droite* CD *en un point* B; *cette droite* AB, *étant prolongée du côté de* B, *passera de l'autre côté de la droite* CD. (Fig. 17.)

DÉMONSTRATION. Du point B pris pour centre, je décris avec une ouverture de compas prise à discrétion, une circonférence de cercle ADEC : la droite CD qui passe par le centre B & qui coupe la circonférence aux points C, D est donc un diametre, & les deux arcs CAD, CED valent chacun la moitié de la circonférence. (22. 23.) De même la ligne AB étant rayon du cercle, si on la prolonge, elle deviendra diametre, & coupera la circonférence en deux parties égales. Or, les parties CA, AD de la demi-circonférence CAD, sont moindres chacune que la demi-circonférence : donc les demi-circonférences ACE, ADE que la ligne AB prolongée, coupera, seront plus grandes chacune que les deux parties AC, AD. Par conséquent le point E, où les deux demi-circonférences se joindront, & par lequel la ligne AB prolongée doit passer, sera au-delà de la ligne CD, par rapport à la ligne AB.

LES ANGLES.

40. *DEFINITION.* Si deux lignes AB, CB (*Fig.* 18), qui n'ont pas la même direction, c'est-à-dire qui ne sont pas en ligne droite, se coupent en un point B; l'espace indéfini ABC compris entre ces lignes, se nomme *angle.* Le point B où les lignes se coupent, se nomme *sommet* de l'angle, & les deux lignes AB, CB sont les *côtés* de l'angle. Il est clair qu'un angle ABD est plus ou moins grand, selon que les côtés AB, CB sont plus ou moins écartés l'un de l'autre;

ou

ou ce qui revient au même, ſelon que la ligne AB eſt moins ou plus inclinée ſur la ligne CB.

41. On déſigne un angle par les trois lettres A, B, C, miſes aux extrémités de ſes côtés & au ſommet ; en obſervant d'écrire la lettre B du ſommet entre les deux autres : ainſi pour exprimer l'angle formé par les droites AB, CB, on dit l'angle ABC.

42. PROBLÊME. *Meſurer les angles, c'eſt-à-dire trouver le rapport qu'ils ont entre eux.* (Fig. 19.)

SOLUTION. Soient les angles BAC, DAB, qui ont leurs ſommets au même point A. Du point A pris pour centre, je décris avec une ouverture de compas priſe à diſcrétion, une circonférence de cercle CBDC que je diviſe en ſes 360 degrés ; & ſi, par exemple, l'arc CB compris entre les côtés de l'angle BAC vaut 30 dégrés, & que l'arc DB compris entre les côtés de l'angle DAB en vaille 60 ; je dis que les deux angles BAC, DAB ſont entre eux, de même que 30 eſt à 60, ou comme 1 à 2, & ainſi des autres ; en obſervant que le ſommet de l'angle ſoit toujours au centre du cercle.

Dans l'uſage ordinaire, on dit que l'arc CB de 30 degrés eſt la meſure de l'angle CAB ; & que l'arc BD de 60 degrés eſt la meſure de l'angle DAB : ce que l'on doit entendre dans le ſens que je viens d'expliquer.

Pour rendre raiſon de cette pratique, concevons que le côté CA prolongé indéfiniment du côté de C, tourne ſur ſon extrêmité A, & tombe ſucceſſivement ſur les côtés BA, DA ; tous les points de CA décriront entre les côtés CA, BA de l'angle BAC des arcs NQ, MS, &c, infiniment proches, & qui couvriront totalement l'eſpace BAC, lequel par conſéquent ſera la même choſe que la ſomme de ces arcs. Or, comme on ſuppoſe que l'arc CB vaut 30 degrés, ou la douzieme partie de ſa circonférence ; tous les autres arcs NQ, MS, &c, vaudront auſſi 30 degrés, ou la douzieme partie de leurs circonférences (27) : ainſi la ſomme des arcs, ou l'angle BAC, vaudra la douzieme partie de la ſomme des circonférences. De même comme on ſuppoſe que l'arc BD compris entre les côtés BA, DC de l'angle DAC, vaut 60 degrés ; tous les arcs décrits par les points de la ligne CA entre les côtés BA, DA vaudront auſſi 60 degrés, c'eſt-à-dire la ſixieme partie de leurs circonférences : ainſi l'angle DAB égal à la ſomme de tous ces arcs, vaudra la ſixieme partie de la ſomme des circonférences. Or, nous venons de voir que l'angle BAC vaut la douzieme partie de cette ſomme des circonférences : donc l'angle BAC eſt à l'angle BAD, comme $\frac{1}{12}$ eſt à $\frac{1}{6}$, ou comme $\frac{1}{12}$ eſt à $\frac{2}{12}$,

c'eſt-à-dire comme 1 eſt à 2 ; & par conſéquent comme l'arc CB de 30 degrés, eſt à l'arc DB de 60 degrés.

43. REMARQUE. La meſure d'un ou pluſieurs angles n'eſt donc pas, comme on pourroit penſer, la meſure de leur grandeur : mais c'eſt la meſure du rapport de leur grandeur, ou ſi l'on veut, la meſure de l'inclinaiſon de leurs côtés. Car il eſt viſible que plus l'arc compris entre les côtés d'un angle ſera petit ; plus ces côtés ſeront proches l'un de l'autre, & que par conſéquent ils ſeront plus inclinés l'un ſur l'autre ; & qu'au contraire plus l'arc compris ſera grand, moins les côtés ſeront inclinés.

Et il faut remarquer que le plus ou le moins de longueur des côtés des angles, ne change rien dans leur valeur, non plus que le plus ou le moins de grandeur de la circonférence, dont les arcs doivent meſurer le rapport de ces angles. Car,

I°. Les angles étant des eſpaces indéfinis du côté oppoſé à leurs ſommets, le plus ou le moins de longueur de leurs côtés ne les détourne point ; & l'on doit regarder ces côtés comme prolongés à l'infini.

II°. Tous les arcs grands ou petits, compris entre les côtés d'un angle, valent un même nombre de degrés de leurs circonférences : ainſi les arcs BC, MS, compris entre les côtés de l'angle BAC, valent également 30 degrés ; & les arcs DB, VS compris entre les côtés de l'angle DAB, valent également 60 degrés : donc, ſoit que je me ſerve des arcs CB, BD de la circonférence CDBC, ou des arcs MS, SV de la circonférence MSVM ; je trouverai toujours que les deux angles BAC, DAB, ſont entre eux comme 30 degrés à 60 degrés.

44. *DÉFINITION.* Tout angle DAM (*Fig.* 20) qui embraſſe le quart DM de la circonférence, ſe nomme *angle droit :* tout angle BAC qui embraſſe un arc BC moindre que le quart de la circonférence, ſe nomme *angle aigu :* tout angle MAB qui embraſſe un arc MB plus grand que le quart de la circonférence, ſe nomme *angle obtus.*

45. Tous les angles droits ſont égaux : car ils embraſſent tous le quart de la circonférence, ou 90 degrés. Mais tous les aigus ne ſont pas égaux, non plus que tous les obtus : car il peut y avoir des angles aigus qui embraſſent plus ou moins de degrés, au-deſſous de 90, & des angles obtus qui en embraſſent plus ou moins au-deſſus de 90.

46. PROBLÊME. *A l'extrémité* D *d'une ligne droite donnée* DE, *faire un angle égal à un angle donné* ABC. (Fig. 21.)

SOLUTION. Du point B pris pour centre & d'une ouverture de compas priſe à diſcrétion, je décris une circonférence CAHC. Je

conſerve la même ouverture de compas, & portant l'une des pointes en D, je décris avec l'autre une circonférence de cercle EMNE; je prends avec le compas la grandeur CA de l'arc CA compris entre les côtés de l'angle ABC; & je porte cette grandeur de E en M ſur la circonférence EMNE: du point M je mene au point D la droite MD; & l'angle MDE eſt égal à l'angle donné ABC.

Car par la conſtruction, le rayon DE de la circonférence EMNE, eſt égal au rayon BC de la circonférence CAHC: c'eſt pourquoi mettant le rayon DE ſur le rayon BC, en ſorte qu'ils s'ajuſtent parfaitement, la circonférence EMNE s'ajuſtera parfaitement ſur la circonférence CAHC, & l'arc EM ſur ſon égal CA. Donc la droite MD tombera ſur la droite AB; puiſque les extrêmités M, D de la droite MD tomberont ſur les extrêmités A, B de la droite AB, & qu'entre deux points on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite; ainſi l'angle MDE tombera ſur l'angle ABC, & lui ſera égal.

Proposition IV.

47. *Si deux angles* ABC, abc, *ſont égaux, & que les côtés* AB, CB *de l'un, ſoient égaux aux côtés* ab, cb *de l'autre; la droite* AC *qui joint les extrêmités* A, C *des côtés du premier, ſera égale à la droite* ac *qui joint les extrémités* a, c *des côtés du ſecond; & les angles que la droite* AC *fera avec les côtés* AC, CB *du premier, ſeront égaux chacun à chacun aux angles que la droite* ac *fera avec les côtés* ab, cb *du ſecond.* (Fig. 22.)

Démonstration. Je mets le côté BC du premier, ſur le côté *bc* du ſecond qui lui eſt égal: le côté BA tombera auſſi ſur le côté *ba* qui lui eſt égal. Car s'il tomboit en dedans de l'angle *abc*, l'angle ABC ſeroit plus petit que l'angle *abc*; & s'il tomboit en dehors, l'angle ABC ſeroit plus grand que l'angle *abc*; & l'un & l'autre eſt contre la ſuppoſition: donc les points A, C, tomberont ſur les points *a*, *c*; & la droite AC menée entre les points A, C, tombera ſur la droite *ac* menée entre les points *a*, *c* & lui ſera égale. D'où il ſuit que l'angle BAC tombera ſur l'angle *bac*, & l'angle ACB ſur l'angle *acb*. C. Q. F. D.

Angles de ſuite. Angles oppoſés au ſommet.

48. *Définition.* Si l'on prolonge l'un des côtés CB d'un angle CBA, au-delà du ſommet B, en E; l'angle ABE fait par le prolongement BE avec l'autre côté AB, & l'angle ABC, ſe nomment *angles de ſuite*: & ſi l'on prolonge les deux CB, AB, au-delà du ſommet; l'angle HBE fait par les deux prolongemens, & l'angle ABC,

ſe nomment *angles oppoſés au ſommet.* (Figure 23).

PROPOSITION V.

49. *Les angles de ſuite valent enſemble deux angles droits, & les angles oppoſés au ſommet ſont égaux.* (Fig. 23).

DÉMONSTRATION. I°. Du ſommet B pris pour centre, & avec une ouverture du compas à diſcrétion, je décris une circonférence de cercle qui coupe les côtés des angles aux points C, A, E: le côté CB & ſon prolongement BE forment une ligne droite qui paſſe par le centre B, & qui par conſéquent eſt un diametre, lequel coupe la circonférence en deux demi-circonférences CAE, CHE. Or la meſure de l'angle ABC, eſt l'arc AC compris entre ſes côtés (42); & la meſure de l'angle ABE eſt l'arc AE; & ces deux arcs AC, AE, pris enſemble, valent la demi-circonférence CHE, ou deux quarts de circonférence: donc la meſure totale des angles de ſuite CBA, ABE, eſt deux quarts de circonférence. Mais deux quarts de circonférence ſont la meſure de deux angles droits: donc les angles de ſuite CBA, ABE, valent enſemble deux angles droits.

II°. L'angle ABE & ſon angle de ſuite EBH, valent enſemble deux droits, comme on vient de voir: le même angle ABE & ſon angle de ſuite ABC, valent auſſi deux droits: donc les deux enſemble ABE, EBH ſont égaux aux deux enſemble ABE, ABC: retranchant donc de part & d'autre l'angle ABE, il reſtera l'angle EBH égal à l'angle ABC qui lui eſt oppoſé au ſommet. C. Q. F. D.

LIGNES PERPENDICULAIRES.

50. *DÉFINITION.* Une ligne droite AB eſt dite *perpendiculaire* ſur une autre ligne droite CD, lorſqu'elle n'eſt pas plus inclinée ſur CD d'un côté que de l'autre. (*Fig.* 24).

51. COROLLAIRE. Donc, I°. *Les deux angles* ABD, ABC *qu'une perpendiculaire* AB *fait avec la droite* CD *du même côté, ſont chacun droits.* Ces deux angles ſont angles de ſuite, & valent enſemble deux angles droits (49). Or, ils ſont égaux; puiſque AB n'eſt pas plus incliné ſur CD d'un côté que de l'autre: donc chacun d'eux eſt droit.

Donc, II°. *Toute ligne* AB *qui fait un angle droit* ABD *avec une autre droite* BD, *eſt perpendiculaire ſur cette ligne* BD; car ſi l'on prolonge DB en C, les angles de ſuite ABD, ABC vaudront deux droits (49), & comme ABD en vaut un, ABC en vaudra un auſſi & ſera égal à ABD (45). Ainſi AB n'inclinera pas plus d'un côté que d'un autre ſur CD.

Donc, III°. *Si l'on prolonge la perpendiculaire* AB *au-delà de* CB *en* E, *ſon prolongement* BE *ſera auſſi perpendiculaire ſur* CD. Les angles de ſuite ABD, DBE valent enſemble deux droits; or, ABD eſt droit; donc DBE l'eſt auſſi, & partant BE eſt perpendiculaire ſur CD.

Donc, IV°. *Si une ligne* AE *eſt perpendiculaire ſur une autre* CD, *réciproquement, celle-ci eſt perpendiculaire ſur* AE. Les angles ABD, DBE ſont droits, comme on vient de voir, & par conſéquent égaux (45) : donc CD n'eſt pas plus inclinée ſur AE d'un côté que d'un autre.

Donc, V°. *D'un même point* B *pris ſur une droite* CD, *on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire* BA *ſur cette droite.* Si on en pouvoit mener une autre comme BH, il faudroit qu'elle paſſât ou à droite ou à gauche de la perpendiculaire BA, & cependant il faudroit que les angles HBD, HBC qu'elle feroit avec CD, fuſſent égaux; ce qui n'eſt pas poſſible, puiſque l'angle HBD eſt plus petit que l'angle ABD qui le renferme, lequel angle eſt droit, à cauſe que AB eſt perpendiculaire ſur CD.

Donc, VI°. *Si d'un même point* B *pris ſur une droite* CD *on mene de part & d'autre deux droites* BA, BE *perpendiculaires ſur* CD; *ces deux droites ne feront enſemble qu'une ligne droite :* puiſque AB eſt perpendiculaire ſur CD, ſon prolongement BE de l'autre côté de CD eſt auſſi perpendiculaire ſur CD, comme on vient de voir. Or, du même point B on ne peut pas mener du même côté deux perpendiculaires; donc la perpendiculaire BE eſt le prolongement de la perpendiculaire AB, & ces deux lignes ſont enſemble une ſeule ligne droite.

Proposition VI.

52. *D'un point* A *pris hors d'une ligne droite* CD, *& qui n'eſt pas dans le prolongement de cette droite, on ne peut mener ſur* CD *qu'une ſeule perpendiculaire* AB. (Fig. 25).

Démonstration. Si l'on veut que du point A on puiſſe mener ſur CD une autre ligne AH qui lui ſoit auſſi perpendiculaire; je prolonge la perpendiculaire AB en E de l'autre côté de CD. Je fais BE =AB, & je mene la droite EH : la droite AB & ſon prolongement BE ſont perpendiculaires ſur CD; donc les angles ABH, EBH ſont droits (51), & partant égaux (45). Or les côtés AB, BH du premier de ces angles ABH, ſont égaux, chacun à chacun, aux côtés BE, BH du ſecond EHH, & les lignes AH, EH joignant les extrémités de ces côtés égaux ſeront égales : donc, l'angle AHB que la ligne AH fait

avec le côté BH du premier angle ABH, eſt égal à l'angle EHB que la ligne EH fait avec le côté BH du ſecond angle EBH (47). Mais AHB doit être droit, puiſqu'on ſuppoſe que AH eſt perpendiculaire ſur CD: donc EHB ſera auſſi droit, & la droite EH ſera auſſi perpendiculaire ſur CD (51). Ainſi les perpendiculaires AH, EH, qui partent du même point H de la ligne CD, ne feront enſemble qu'une ſeule ligne droite AE entre les extrêmités A, E. Mais la ligne ABE eſt auſſi droite entre les mêmes extrêmités: donc entre deux points il ſe trouveroit deux lignes droites; ce qui eſt impoſſible: donc il eſt impoſſible auſſi que AH ſoit perpendiculaire ſur CD. Ce qu'il falloit démontrer.

53. COROLLAIRE I. *Si du point* A (fig. 26) *pris hors d'une ligne droite* CD, *& qui n'eſt pas ſur le prolongement de cette ligne, on mene une perpendiculaire* AB, *& pluſieurs autres lignes, que nous nommerons obliques, parce qu'elles ne ſauroient être perpendiculaires ſur* CD; *je dis*,

I°. *Que la perpendiculaire* AB *ſera la plus courte de toutes les lignes menées du point* A *ſur* CD.

II°. *Que les autres ſeront d'autant plus longues qu'elles couperont la ligne* CD *en des points* H, D, &c, *plus éloignés du point* B *où la perpendiculaire coupe cette ligne.*

III°. *Qu'on trouvera tant d'obliques que l'on voudra égales deux à deux; mais jamais trois d'égales.*

DÉMONSTRATION. I°. Je prolonge la perpendiculaire AB au-delà de la ligne CD en E: je fais BE = AB, & je mene la ligne EH. La ligne AB & ſon prolongement BE étant perpendiculaires ſur CD, les angles ABH, EBH ſont droits (51), & par conſéquent égaux (45). Or, les côtés AB, BH de l'angle ABH ſont égaux chacun à chacun aux côtés EB, BH de l'angle EBH: donc la ligne AH qui joint les extrêmités des côtés AB, BH eſt égale à la ligne EH qui joint les extrêmités des côtés EB, BH (47). Or, les deux lignes droites AB, BE ne ſont enſemble qu'une ligne droite entre les points A, E: donc les deux droites AH, HE ne ſont pas enſemble une ligne droite entre les mêmes points A, E, & ſont par conſéquent plus longues que les deux enſemble AB, BE. Ainſi la ligne AH, moitié des deux AH & HE, eſt plus longue que la moitié AB des deux AB, BE: & partant la perpendiculaire AB eſt plus courte que l'oblique AH. On prouvera de même que la perpendiculaire AB eſt plus courte que l'oblique AD, &c.

II°. Du point E, je mene la droite ED à l'extrêmité D d'une autre oblique AD, & je prouverai de même qu'auparavant que ED = AD,

Or, les deux droites égales AH, HE menées des extrêmités A & E de la droite AE, ſe coupent en dedans des deux droites AD & ED menées des mêmes points A, E : donc les deux AH, HE, priſes enſemble, ſont moindres que les deux AD, DE (38) : & partant la droite AH, moitié des deux AH, HE, eſt moindre que la droite AD moitié des deux AD, DE. Ainſi l'oblique AD, qui coupe CD en un point D plus éloigné du pied B de la perpendiculaire AB, eſt plus longue que l'oblique AH qui coupe CD en un point H plus proche du même pied B.

III°. Je prends ſur CD de l'autre côté du pied B de la perpendiculaire AB, la diſtance BM égale à la diſtance BH, la diſtance BC égale à la diſtance BD ; & du point A je mene les droites AM, AC. La droite AB étant perpendiculaire ſur CD, l'angle ABH eſt égal à l'angle ABM (51) ; & les côtés AB, BH de l'angle ABH ſont égaux chacun à chacun aux côtés AB, BM de l'angle ABM : donc l'oblique AH qui joint les extrêmités des côtés AB, BH, eſt égale à la droite AM qui joint les extrêmités des côtés AB, BM (47) : c'eſt-à-dire, que les deux obliques AH, AM, qui coupent la droite CD en des points H, M également éloignés du pied B de la perpendiculaire AB, ſont égales. On prouvera de même que les deux obliques AC, AD ſont égales, pour la même raiſon ; & comme de part & d'autre, du pied B de la perpendiculaire, on peut trouver tant de points que l'on voudra également diſtans deux à deux du point B, on trouvera auſſi tant d'obliques égales deux à deux que l'on voudra. Mais on n'en trouvera jamais trois qui ſoient égales : car ſi cela étoit, il faudroit qu'il y en eût deux qui fuſſent du même côté de la perpendiculaire AB, & comme ces deux lignes ne pourroient couper la ligne CD en deux points également éloignés du point B, elles ne ſauroient être non plus égales : ce qui ſeroit contre la ſuppoſition. C. Q. F. D.

54. Corollaire II. Donc, *ſi d'un point* A *pris hors d'une droite* CD, *on mene ſur cette ligne une perpendiculaire* AB, *& deux obliques égales* AH, AM ; *la perpendiculaire* AB *coupera la droite* CD *en un point* B *également éloigné des points* H, M, *où les obliques coupent la même ligne* CD.

C'eſt une ſuite du corollaire précédent ; & de-là il eſt aiſé de conclure que *ſi deux lignes* AH, AM, *menées ſur une droite* CD *d'un point extérieur* A, *ſont égales ; ces deux lignes ſont deux obliques, entre leſquelles la perpendiculaire menée du point* A *ſur* CD *doit paſſer.* Car ſi l'une de ces lignes étoit perpendiculaire ſur CD, elle ſeroit plus courte que l'autre : ce qui ſeroit contre la ſuppoſition.

55. COROLLAIRE III. *La perpendiculaire* AB, *menée du point extérieur* A *ſur une ligne droite* CD, *eſt la diſtance du point* A *à cette droite* CB. Cette perpendiculaire eſt la plus courte ligne qu'on puiſſe mener du point A ſur CD (53): donc elle eſt la diſtance du point A à cette ligne. (9.)

56. COROLLAIRE IV. *Si un point quelconque d'une droite* ABE, *perpendiculaire ſur une autre droite* CD, *eſt également éloigné des deux points* C, D *de la droite* CD; *cette perpendiculaire prolongée de part & d'autre à l'infini, paſſera par tous les points également éloignés des points* C, D. (fig. 27.)

DÉMONSTRATION. Il faut ici prouver deux choſes, 1°. Que tous les points de la perpendiculaire ABE, prolongée de part & d'autre à l'infini, ſont également éloignés des points C, D. 2°. Qu'il ne peut ſe trouver aucun point également éloigné des points C, D, qui ne ſoit ſur la perpendiculaire: ce que je démontre ainſi.

I°. Si le point de la perpendiculaire également éloigné des points C, D, eſt le point B où cette perpendiculaire coupe la droite CD; je prends un autre point quelconque A ſur cette perpendiculaire; & de ce point, je mene les droites AC, AD aux points C, D. Ces droites ſeront deux obliques menées du point A de la perpendiculaire AB, & ces obliques ſeront égales: puiſqu'elles coupent la droite CD en des points également éloignés de la perpendiculaire (53). Mais ces droites meſurent les diſtances du point A aux points C, D: donc le point A eſt également éloigné des points C, D. Et comme on prouvera la même choſe à l'égard de tout autre point pris ſur la perpendiculaire; il s'enſuit que tous les points de cette droite ſont également éloignés de C & D.

Que ſi le point de la perpendiculaire également éloigné des points C, D, eſt hors de la ligne CD, tel que le point A; je mene les droites AC, AD, qui ſeront par conſéquent deux obliques égales: donc la perpendiculaire coupera CD en un point B également éloigné des points C & D. Par conſéquent je prouverai comme auparavant que tous les autres points de la perpendiculaire ſont également éloignés de C & D.

II°. Maintenant, ſi l'on prétend que, quoique tous les points de la perpendiculaire AE (*fig.* 28) ſoient également éloignés des points C & D de la droite CD, il puiſſe néanmoins ſe trouver quelque point H hors de la perpendiculaire AE qui ſoit auſſi également éloigné des points C, D; je mene de ce point H les droites HC, HD, qui ſeront égales & par conſéquent obliques l'une & l'autre ſur CD

(54). Ainſi la perpendiculaire menée du point H ſur CD, coupera cette ligne CD en un point également éloigné des points C & D; & partant, elle la coupera au point B où la perpendiculaire AE la coupe: donc il s'enſuivroit que ſur un même point B pris ſur CD, on pourroit mener deux droites AB, BH perpendiculaires ſur la ligne CD; ce qui n'eſt pas poſſible (51). Par conſéquent il n'eſt pas poſſible non plus que le point H ſoit également éloigné de C & D. Ce qu'il falloit démontrer.

57. Corollaire V. *Une même ligne ne peut être perpendiculaire ſur deux lignes* AB, CD, *qui ſe coupent en un point* L. (fig. 29.)

Démonstration. Si on veut que la droite DB, qui coupe les droites AB, CD, en deux points D, B, différens du point L où ces droites ſe coupent, ſoit perpendiculaire ſur l'une & l'autre de ces droites; réciproquement ces lignes ſeront perpendiculaires ſur elle (51): & par conſéquent il s'enſuivra que du point L, où ces lignes ſe coupent hors de la ligne DB, on pourra mener deux perpendiculaires LD, LB ſur cette droite DB; ce qui eſt impoſſible. (52.)

Et ſi on veut que la droite ML qui paſſe par le point où les deux lignes ſe coupent, ſoit perpendiculaire ſur l'une & l'autre; réciproquement les deux lignes ſeront perpendiculaire ſur elles (51): donc il s'enſuivra que d'un même point L d'une droite LM, on pourroit mener deux perpendiculaires LD, LB, d'un même côté; ce qui ſeroit encore impoſſible. (51.)

58. Corollaire VI. *Si une droite* AE *eſt tellement diſpoſée à l'égard d'une autre droite, que deux de ſes points quelconques ſoient également éloignés de deux points* C, D *de la droite* CD, *c'eſt-à-dire, que le point* A *ſoit également éloigné de* C & D, *& le point* E *auſſi également éloigné de* C & D; *la droite* AB *eſt perpendiculaire ſur* CD. (fig. 27.)

Démonstration. Du point A je conçois une perpendiculaire menée ſur CD: cette perpendiculaire prolongée de part & d'autre, à l'infini, paſſera par tous les points également éloignés de C & D (56); & partant elle paſſera par le point E. Mais la droite AE paſſe auſſi par les points A, E: donc cette droite n'eſt pas différente de la perpendiculaire; car entre deux points on ne peut mener qu'une droite. (32.)

59. Lemme I. *Si des extrêmités* A, B *d'une droite* AB, *priſes pour centre, & avec des rayons* AE, BN, *qui, pris enſemble ſoient plus grands que la droite* AB, *on décrit deux circonférences* EPLQ, NPSQ; *ces deux circonférences ne ſe couperont qu'en deux points* P,

Q, *dont l'un ſera d'un côté de la droite* AB, *& l'autre de l'autre côté.* (fig. 30.)

DÉMONSTRATION. I°. Il eſt clair que ces deux circonférences ne ſe couperont point ſur la droite AB. Car leurs rayons AE, BN étant enſemble plus grands que la droite AB, ces deux rayons tombant ſur AB, anticiperont l'un ſur l'autre, & l'extrêmité E du premier AE tombera plus près du point B que l'extrêmité N du ſecond BN.

II°. Ces deux circonférences ſe couperont : car l'extrêmité E du rayon AE, en décrivant la demi-circonférence EPL du côté de P, s'éloigne de plus en plus du centre B, & va trouver la ligne AB prolongée au-delà de A par rapport à B. Et au contraire l'extrêmité N du rayon BN, en décrivant la demi-circonférence, s'éloigne de plus en plus du centre A, & va couper la ligne AB prolongée au-delà du point B. Ainſi les deux demi-circonférences prenant des routes oppoſées, doivent ſe couper quelque part ; & la même choſe doit ſe dire des deux autres demi-circonférences qui ſont de l'autre côté de la ligne AB.

III°. Suppoſant donc que le point où les deux demi-circonférences EPL, NPS ſe coupent, ſoit le point P. Je conçois que de ce point, ſoit menée une perpendiculaire PH ſur la droite AB ; & du centre A, des lignes droites AR, AR, &c, ſur tous les points de cette ligne : la droite AH étant perpendiculaire ſur PH, les droites AR, AR, &c, ſont obliques & toutes plus courtes que le rayon AP qui eſt plus éloigné qu'elles de la perpendiculaire AH (53). Ainſi ces obliques ne vont pas aboutir juſqu'à l'arc PE compris entre le point P & la droite AB : car ſi cela étoit, elles ſeroient égales au rayon AP ; & par conſéquent l'arc PE eſt tout entier à droite de la ligne PH. De même ſi l'on mene de l'autre centre B des lignes droites BR, BR, &c, ſur tous les points de PH ; toutes ces lignes ſeront plus courtes que le rayon, & n'iront pas aboutir ſur l'arc PN, lequel par conſéquent ſera tout entier à gauche de la droite PH. C'eſt pourquoi les deux arcs PE, PN des demi-circonférences EPL, NPS ne ſe coupent point ailleurs qu'en P : puiſqu'ils ſont ſéparés par la droite PH.

IV°. Je prolonge la droite PH en X du côté de P, & du centre A je mene ſur tous les points du prolongement PX des droites AZ, AZ, &c. Toutes ces lignes ſont des obliques plus longues que le rayon AP qui eſt plus proche qu'elles de la perpendiculaire : ainſi elles coupent l'arc PL avant de couper la droite PX ; & par conſéquent l'arc PL eſt tout entier à gauche de PX. De même ſi de l'autre centre B on mene des droites BZ, BZ, &c, ſur PX ; ces droites couperont

l'arc PS avant de couper PX; & partant cet arc ſera tout entier à droite de PX : donc les arcs PL, PS des demi-circonférences EPL, NPS ne ſe couperont point ailleurs qu'en P; puiſqu'ils ſont ſéparés par la droite PZ. Or nous venons de voir que les autres deux arcs PE, PN, ne ſe coupent qu'en P : donc les demi-circonférences EPL, NPS, compoſées de ces arcs, ne ſe coupent auſſi qu'en P. On prouvera la même choſe des autres demi-circonférences EQL, NQS, & partant les deux circonférences entieres ne ſe coupent qu'en deux points, l'un au deſſus & l'autre au-deſſous de la droite AB. Ce qu'il falloit démontrer.

60. LEMME II. *Une circonférence de cercle ne peut couper une ligne qu'en deux points.* (*fig* 31).

DÉMONSTRATION. I°. Si la ligne AB qui coupe la circonférence aux points A, B, *paſſe par le centre* O du cercle; la propoſition eſt évidente : car AB eſt compoſée de deux rayons AO, OB. Ainſi ſi la circonférence pouvoit couper le diametre en quelque point pris entre ſes extrémités A, B, par exemple en P; la droite OP compriſe entre le centre & ce point P, ſeroit un rayon, & partant nous aurions deux rayons inégaux OP, OB dans un même cercle; ce qui eſt impoſſible. De même ſi la circonférence coupoit les prolongemens de AB en un point quelconque Q; la droite OQ ſeroit un rayon, & nous aurions encore deux rayons inégaux OQ, OB : ce qui eſt impoſſible.

II°. Mais ſi la droite CD qui coupe la circonférence en deux points C, D ne *paſſe pas par le centre* O; je mene du centre O aux extrémités C, D de cette ligne, les deux rayons OC, OD leſquels étant égaux ſeront par conſéquent deux obliques égales menées du point extérieur O ſur la droite CD, (54); & la perpendiculaire du point O ſur CD coupera cette ligne en un point D également éloigné de C & D. Or, toutes les lignes OR, OR, &c, menées du point O ſur tous les points de la droite CD pris entre les deux rayons OC, OD, ſeront plus courtes que ces rayons; puiſqu'elles ſeront plus proches de la perpendiculaire, (53), & n'iront pas aboutir à la circonférence : donc la circonférence ne ſauroit couper cette ligne dans aucun de ces points. De même toutes les lignes OS, OS, menées du point O ſur les prolongemens de la droite CD, ſeront plus longues que les rayons; puiſqu'elles ſeront plus éloignées de la perpendiculaire : donc la circonférence ne paſſera pas par leur extrémité S, S, &c, partant elle ne coupe la ligne CD qu'aux deux points C, D.

61. DEFINITION. Lorſque d'un point B (*Fig.* 27) pris ſur une

ligne AB *décrira une ligne* BM *indéfinie, qui ſera un ligne droite.* (Fig. 36.)

DÉMONSTRATION. Puiſque la ligne AB eſt toujours perpendiculaire ſur AC, & que ſon extrêmité A n'abandonne jamais cette ligne; tous les points de la ligne BM ſont à égale diſtance de AC. (55). Ainſi ſi nous concevons que la ligne BM ſe meuve vers la ligne AC, de façon que tous ſes points ne faſſent pas plus de chemin l'un que l'autre, il eſt clair que lorſque l'un de ſes points ſera parvenu ſur la ligne AC, tous ſes autres points ſeront auſſi parvenus ſur AC, & que par conſéquent BM tombera toute entiere ſur AC: mais AC eſt droite; donc BM l'eſt auſſi.

LIGNES PARALLELES.

67. DÉFINITION. Deux lignes droites AC, BM, ſont dites *paralleles entre elles*, lorſqu'elles ſont partout à égale diſtance, c'eſt-à-dire lorſque les perpendiculaires menées de tous les points de l'une BM ſur l'autre AC, ſont égales; ou enfin lorſque l'une d'entre elles BM eſt formée par le mouvement d'une droite AB, toujours perpendiculaire ſur l'autre, & dont l'extrêmité A n'abandonne jamais AC, comme il a été dit dans la propoſition précédente. (fig. 36.)

68. COROLLAIRE. Donc I°. *Toute perpendiculaire* BA *menée d'un point quelconque* B, *de l'une des paralleles* BM *ſur l'autre parallele* AC, *meſure la diſtance des deux paralleles.*

Tous les points de BM ſont éloignés de AC d'une quantité égale à BA: donc BA eſt la diſtance de la droite BM à ſa parallele AC. Or la diſtance de la droite AC à la droite BM, ne peut pas être différente de la diſtance de la droite BM à la droite AC: donc BA meſure auſſi la diſtance de AC à BM.

Donc II°. *Toute ligne* BA *compriſe entre les deux paralleles & perpendiculaire ſur l'une* AC, *eſt auſſi perpendiculaire ſur l'autre* BM.

Les droites BM, AC, étant partout à égale diſtance; ſi du point A, je mene une perpendiculaire ſur BM; cette perpendiculaire meſurera la diſtance de AC à BM. Or, la diſtance de AC à BM, ne peut être différente de la diſtance de BM à AC, c'eſt-à-dire de la droite BA qui a été menée perpendiculaire ſur AC: donc la perpendiculaire menée de A ſur BM doit être égale à BA. Mais cela ne ſauroit être, ſi la perpendiculaire menée du point A, tomboit en un autre point que B: car en ce cas, AB ſeroit oblique ſur BM, & plus grande que la perpendiculaire (53): donc BA doit être perpendiculaire ſur BM de même que ſur AC.

Et de là il eſt aiſé de prouver l'*inverſe* de cette propoſition, c'eſt-à-dire *que ſi une ligne* AB *eſt perpendiculaire ſur deux autres* BM, AC; *ces deux lignes* BM, AC *ſont paralleles entre elles.*

Car ſi on veut que BM ne ſoit pas parallele à AC; concevons que par le point B on faſſe paſſer une parallele à AC. La droite AB étant perpendiculaire ſur AC, ſera auſſi perpendiculaire ſur ſa parallele; mais AB eſt auſſi perpendiculaire ſur BM : donc il faut que BM & la parallele menée du point B ſoient la même ligne; autrement une droite AB ſeroit perpendiculaire ſur deux différentes lignes en un même point B; ce qui eſt impoſſible (57).

Donc III°. *D'un même point* B *on ne ſauroit mener deux paralleles à une même ligne* AC : par la raiſon qu'on vient de voir.

Donc IV°. *Deux perpendiculaires* AB, TR, *entre deux paralleles* AC, BM *ſont paralleles entre elles:* puiſque la ligne AC, ou AT eſt perpendiculaire ſur l'une & ſur l'autre.

Donc V°. *Les parties* AT, BR *des paralleles compriſes entre deux perpendiculaires* AB, TR *ſont égales entre elles.* Les perpendiculaires AB, TR ſont paralleles entre elles, comme on vient de voir, & les parties AT, BR ſont perpendiculaires ſur elles; donc les parties AT, BR, ſont égales par la définition des paralleles.

ANGLES ALTERNES.

69. DÉFINITION. Si une ligne droite RS (fig 37) coupe deux paralleles BM, AC;

I°. Les angles BHE, CEH qu'elle fait en dedans des paralleles, l'un BHE en haut & à gauche, & l'autre CEH en bas & à droite, ſe nomment *angles alternes* : ainſi les angles MHE, AEH ſont auſſi alternes.

II°. Les angles MHR, CER que la droite RS fait du même côté avec les paralleles, ſe nomment *angles du même côté:* les angles MHS, CES ſont donc auſſi *angles du même côté;* de même que les angles BHR, AER, & les angles BHS, AES.

III°. Les angles MHE, CEH, que RS fait en dedans des paralleles du même côté, ſe nomment *angles internes oppoſés :* ainſi les angles AEH, BHE ſont auſſi *internes oppoſés.*

PROPOSITION VIII.

70. *Si une droite* RS *coupe deux paralleles* BM, AC; *les angles alternes* BHE, CEH *ſont égaux.* (Fig. 38.)

DEMONSTRATION. Du point E, j'abaiſſe ſur BM la perpendiculaire EV; & du point H, ſur AC la perpendiculaire HT. Les angles

droits EVH, HTE ſont égaux; & à cauſe que les perpendiculaires EV, HT ſont égales (67), & que les parties VH, ET des paralleles compriſes entre ces perpendiculaires ſont auſſi égales (68); les deux angles égaux EVH, HTE ont les côtés égaux chacun à chacun. Or, la droite HE paſſe par les extrêmités de ces côtés: donc l'angle EHV que cette droite fait avec le côté EH du premier angle EVH, eſt égal à l'angle HET qu'elle fait avec le côté ET du ſecond angle HTE. (47). Mais les angles EHV, HET ſont les mêmes que les angles alternes BHE, CEH: donc les angles alternes ſont égaux.

71. COROLLAIRE I. *Les angles du même côté* RHM, HET *ſont égaux.*

DÉMONSTRATION. L'angle BHE eſt égal à l'angle RHM qui lui eſt oppoſé au ſommet (49); & le même angle BHE eſt égal à ſon alterne HET (70): donc les angles RHM, HET ſont égaux.

72. COROLLAIRE II. *Les angles internes oppoſés* MHE, CEH *valent enſemble deux droits.*

DÉMONSTRATION. L'angle RHM & ſon angle de ſuite MHE, valent enſemble deux droits (49): or, l'angle CEH eſt égal à l'angle RHM (71); donc l'angle CEH & l'angle MHE valent auſſi enſemble deux droits.

73. COROLLAIRE III. L'inverſe de cette propoſition & de ſes corollaires eſt auſſi véritable, c'eſt-à-dire *ſi une ligne droite* RS *qui coupe deux autres lignes droites* BM, AC, *fait les angles alternes égaux ou les angles du même côté égaux, ou les angles internes oppoſés, égaux enſemble à deux droits; les lignes* BM, AC *ſont paralleles.*

DEMONSTRATION. Si l'on veut que BM ne ſoit pas parallele à AC; concevons que par le point H on mene une parallele à la droite AC: la ligne RS, qui coupera les deux paralleles, fera donc avec elles les angles alternes égaux; & par conſéquent l'angle que la parallele menée du point H fera avec la ligne RS du côté de S, ſera égal à l'angle TEH. Mais l'angle que la ligne BH fait avec RS du côté de S, eſt auſſi égal à l'angle TEH: donc la ligne BH ſera néceſſairement la même que la parallele menée du point H, & par conſéquent les droites BH ou BM, & AC ſont paralleles.

74. COROLLAIRE IV. *Si deux lignes droites* HE, SR *ſont également inclinées ſur l'une des paralleles* AC; *elles ſont auſſi également inclinées ſur l'autre* BM. (Fig. 39 & 40.)

DÉMONSTRATION.

DÉMONSTRATION. Les deux lignes HE, SR, peuvent être également inclinées ſur AC ou d'un même côté, ou d'un ſens différent. Si elles ſont également inclinées d'un même côté (*fig.* 39); les angles HEC, SRC ſont donc égaux (71): & partant les angles EHB, RSB qui ſont égaux à leurs alternes HEC, SRC, ſont auſſi égaux; & les droites HE, SR ſont également inclinées ſur BM. Si les droites HE, SR ſont également inclinées ſur AC d'un ſens différent (*fig.* 40); les angles HER, SRE ſeront donc égaux: & partant leurs alternes EHB, RSM le ſeront auſſi; & les deux droites HE, RS ſeront également inclinées ſur BM dans un ſens différent.

PROPOSITION IX.

75. *Les droites* EH, RS, *également inclinées d'un même côté entre deux paralleles* AC, BM, *ſont paralleles entre elles & égales.* (fig. 39)

DÉMONSTRATION. La ligne AC qui coupe les droites EH, RS, fait les angles HEC, SRC du même côté égaux, à cauſe que les lignes ſont également inclinées du même côté: donc EH, RS ſont paralleles (73).

Des points H, S, j'abaiſſe ſur AC les perpendiculaires HT, SV; ainſi les angles BHT, BSV ſont droits (68) & égaux. C'eſt pourquoi retranchant de ces angles, les angles égaux BHE, BSR (74); les angles reſtans EHT, RSV ſont égaux. Or les angles droits HTE, SVR ſont égaux: mettant donc la figure RVS ſur la figure ETH, enſorte que la perpendiculaire SV tombe ſur ſon égale HT, l'angle droit RVS tombera ſur ſon égal ETH, & l'angle RSV ſur ſon égal EHT; donc les deux lignes SR, RV tomberont ſur les deux HE, ET & leur ſeront égales chacune à chacune; donc les inclinées EH, SR ſont égales.

Et cette ſeconde partie de la propoſition eſt encore vraie, quand les également inclinées entre les paralleles ſont inclinées dans un ſens différent (*fig.* 40): ce qu'on démontrera de la même façon.

76. COROLLAIRE. I. *Les parties* SH, ER *des paralleles compriſes entre les également inclinées d'un même côté, ſont égales* (fig. 39).

DÉMONSTRATION. Nous venons de voir que les droites ET, RV ſont égales. Ajoutant donc à chacune de ces lignes droites TR, nous aurions ER = TV. Mais à cauſe des perpendiculaires HT, SV, nous avons TV = HS: donc HS = ER.

77. COROLLAIRE II. *Si deux lignes* HE, SR *ſont paralleles entre deux paralleles*, BM, AC, *elles ſont également inclinées entre ces paralleles, & égales* (fig. 39).

DÉMONSTRATION. Les deux lignes HE, SR étant paralleles entre elles; la ligne droite AC qui les coupe, fait les angles HEC, SRC du même côté égaux (71): donc ces lignes ſont également inclinées du même côté; & puiſqu'elles ſont également inclinées, elles ſont égales (75).

PROPOSITION X.

78. *Si deux points* H, S *d'une droite* BM, *prolongée, ſi l'on veut, à l'infini, ſont également éloignés d'une droite* AC, *auſſi prolongée à l'infini, qui eſt d'un même côté par rapport à ces points; la droite* BM *eſt paralelle à* AC, *& cette droite* BM *paſſe par tous les points qui ſont autant éloignés de* AC *du même côté que les points* H, S. (Fig. 39).

DÉMONSTRATION. Puiſque les points H, S ſont à égale diſtance de AC; les perpendiculaires HT, menées de ces points ſur AC, ſont égales (55). Concevons donc que la perpendiculaire HT, ſe meuve de façon que ſon extrêmité T parcoure tous les points de la droite AC, & que pendant ce mouvement la droite HT ſoit toujours perpendiculaire ſur AC: il eſt clair que lorſque le point T tombera ſur le point V, la perpendiculaire HT tombera ſur la perpendiculaire SV qui lui eſt égale. Car autrement, d'un même point V on pourroit élever deux perpendiculaires ſur AC; ce qui eſt impoſſible (51). Or pendant ce mouvement, l'autre extrêmité H de la perpendiculaire HT décrira une ligne HS qui ſera droite (66); & cette droite prolongée à l'infini, ſera parallele à AC (67): donc la droite BM qui paſſe par les deux points H, S de la droite HS, & qui par conſéquent n'eſt pas différente de la droite HS prolongée à l'infini (34), eſt auſſi paralelle à AC.

Maintenant puiſque BM eſt parallele à AC, il eſt clair que tous ſes points ſont autant éloignés de AC que les points H, S. Mais ſi l'on veut que malgré cela il ſe trouve du même côté quelque point tel que P, qui ſoit autant éloigné de AC que les points H, S, & qui cependant ne ſoit pas ſur BM; je mene du point H au point P, la droite HP, laquelle ſera parallele à AC à cauſe de ſes deux points H, P également éloignés de AC, & partant d'un même point H, on pourra mener deux paralleles HB, HM à une même droite AC; ce qui eſt impoſſible (68). C. Q. F. D.

79. PROBLÊME. *D'un point donné* H *pris hors d'une droite* AC, *& qui n'eſt pas dans ſon prolongement, mener une parallele à la droite* AC (Fig. 39).

SOLUTION. Du point H j'abaiſſe une perpendiculaire HT ſur AC: d'un autre point V pris ſur AC, j'éleve ſur AC une perpendiculaire VS que je fais égale à HT. La ligne droite HS menée par les extrêmités H, S des perpendiculaires, eſt la parallele demandée : car les deux points H, S par leſquels elle paſſe, ſont également éloignés de la droite AC; ce qui la rend parallele (78).

Ou bien du point donné H, (*Fig.* 41), je mene ſur AC une oblique HR ; & faiſant en H un angle RHP égal à l'angle HRA, le côté HP de l'angle RHP eſt la parallele demandée : à cauſe des angles alternes égaux RHP, HRA.

80. REMARQUE. On ajoute ordinairement à la définition des paralleles *qu'elles ne ſe rencontreront jamais, quand même on les prolongeroit à l'infini;* mais il m'a paru qu'il ſuffiſoit de dire qu'elles *étoient toujours à égale diſtance :* car il eſt viſible que ſi elles ſont toujours à égale diſtance, elles ne peuvent jamais ſe rencontrer.

PROPOSITION XI.

81. *Si une droite* PQ *eſt parallele à l'une des deux paralleles* BM, AC, *elle eſt auſſi parallele à l'autre.* (Fig. 42, 43).

DÉMONSTRATION. Il peut ſe faire que la droite PQ, parallele à BM, ſoit entre les paralleles BM, AC (*fig.* 42); ou au-delà de AC (*fig.* 43); ou au-delà de BM (*Fig.* 44).

I°. Si PQ paſſe entre les paralleles BM, AC; je mene entre ces paralleles, la perpendiculaire HT qui coupe PQ en E; & à cauſe que PQ & BM ſont paralleles par ſuppoſition ; la droite HE, perpendiculaire ſur BM, eſt auſſi perpendiculaire ſur PQ (68). Or le prolongement ET de la droite HE eſt encore perpendiculaire ſur PQ (51), & ce même prolongement ET eſt auſſi perpendiculaire ſur AC; puiſque la ligne HET eſt perpendiculaire ſur AC : donc les droites PQ, AC ſont paralleles (68).

II°. Si PQ, parallele à BM, eſt au-delà de AC; je mene entre ces deux lignes la perpendiculaire HE; & la partie HT de cette perpendiculaire, ſera perpendiculaire ſur AC; à cauſe que BM, AC ſont paralleles (51). Or, le prolongement TE de HT, eſt encore perpendiculaire ſur AC (51); & le même prolongement eſt perpendiculaire ſur PQ; puiſque la ligne entiere HE eſt perpendiculaire ſur PQ; donc les lignes AC, PQ ſont paralleles (68).

III°. Enfin ſi PQ, parallele à BM, eſt au-delà de BM (*Fig.* 44) ; je mene entre ces deux lignes la perpendiculaire HE, & par conſéquent le prolongement HT de cette perpendiculaire étant encore perpendiculaire ſur BM (51), ſera auſſi perpendiculaire ſur AC pa-

rallele à BM (68) : donc la ligne droite EHT ſera perpendiculaire ſur PQ & AC, & ces deux droites ſeront paralleles (68).

82. COROLLAIRE. *Donc ſi deux droites* BM, AC *ſont paralleles à une troiſieme* PQ, *elles ſont paralleles entre elles.*

DÉMONSTRATION. I°. Si la droite PQ eſt entre les deux BM, AC (*Fig.* 42) ; je prends ſur PQ un point E, duquel j'éleve de part & d'autre des perpendiculaires ſur PQ qui aillent couper les droites BM, AC. Ainſi à cauſe que BM & PQ ſont paralleles, la perpendiculaire EH ſera auſſi perpendiculaire ſur BM (68) ; & à cauſe que AC & PQ ſont auſſi paralleles, la perpendiculaire ET ſera auſſi perpendiculaire ſur AC (68). Or, les deux perpendiculaires EH, ET ſur PQ, ne ſont qu'une même ligne droite HE (51) : donc, à cauſe que cette droite HE eſt perpendiculaire ſur les deux BM, AC ; ces deux lignes ſont paralleles (68).

II°. Si la droite PQ eſt au-delà des deux BM, AC, par exemple, au-delà de AC (*Fig.* 43) ; je mene entre PQ, & la parallele BM, la perpendiculaire EH : & à cauſe que AC eſt auſſi parallele à PQ, la partie ET de la perpendiculaire EH ſera auſſi perpendiculaire ſur AC (68) : donc le prolongement TH de la partie ET étant encore perpendiculaire ſur AC, de même qu'il l'eſt ſur BM ; les droites BM & AC ſeront paralleles (68) ; & on démontreroit la même choſe, ſi PQ étoit au-delà de BM.

PROPOSITION XII.

83. *Si d'un point quelconque* A *pris hors d'une droite* BM *prolongée même à l'infini, on mene une perpendiculaire ſur cette droite, & pluſieurs inclinées* AB, AD, AH, &c ; *la perpendiculaire ſera toujours du côté des moindres angles que les obliques font avec la droite* BM, *& les obliques les plus longues ſeront les plus inclinées* (Fig. 45).

DÉMONSTRATION. I°. Du point H, où l'oblique AH coupe la droite BM, j'éleve la perpendiculaire HL, laquelle laiſſera le point A ſur ſa gauche ou ſur ſa droite : car ſi elle paſſoit par A, elle auroit les deux points H, A, communs avec la droite AH ; & par conſéquent elle ſeroit la même que l'oblique AH (34), & ne ſeroit pas perpendiculaire ſur BM. Suppoſons donc que le point A ſoit à gauche de HL : les angles LHB, LHM, que la perpendiculaire fait ſur BM ſont droits (51) : par conſéquent ils valent enſemble deux droits, de même que les angles de ſuite AHB, AHM que l'oblique AH fait avec la même droite BM (49). Or, à cauſe que le côté AH de l'angle AHB eſt à gauche de la perpendiculaire ; l'angle AHB eſt moindre que l'angle droit LHB : donc l'autre angle AHM eſt plus grand que

l'autre angle droit LHM : ainſi l'angle AHB eſt le plus petit des deux angles que l'inclinée AH fait ſur BM.

Maintenant ſi la perpendiculaire abaiſſée du point A ſur BM, coupoit cette droite du côté du plus grand angle AHM ; il faudroit qu'elle coupât auparavant la perpendiculaire HL en quelque point S : & partant, il s'enſuivroit que d'un même point S, pris hors d'une droite BM, on pourroit mener deux perpendiculaires SH, SM ; ce qui eſt impoſſible (52) : donc il faut que la perpendiculaire, menée du point A, coupe BM en quelque point E du côté du moindre angle AHB que l'oblique AH fait avec BM ; & ainſi des autres.

II°. Soient les deux obliques AB, AD, du même côté de la perpendiculaire AB : du point B, où la plus éloignée coupe la ligne BM, je mene une droite BR parallèle à l'autre oblique AD : ainſi à cauſe que BM coupe les paralleles BR, DA ; les angles du même côté RBM, ADM ſont égaux (71). Or, à cauſe que l'oblique LA coupe ces deux paralleles ; l'angle ABM eſt moindre que l'angle RBM : donc il eſt auſſi plus petit que l'angle ADM ; & partant l'oblique AB, plus longue que l'oblique AD, eſt auſſi plus inclinée ſur BM que AD.

Si l'oblique la plus longue AB eſt du côté de B par rapport à la perpendiculaire AE, & que l'autre oblique plus courte AH ſoit de l'autre côté ; je prends de ce même côté une oblique AM égale à l'oblique AB. Ainſi les diſtances EB, EM, du pied de la perpendiculaire AE aux points B, M, des obliques, ſont égales (54) ; & les angles égaux AEB, AEM, ont les côtés AE, EB égaux chacun à chacun aux côtés AE, EM : donc l'angle ABM, fait avec le côté BE par la ligne AB qui joint les extrêmités des côtés du premier angle AEB, eſt égal à l'angle AME fait avec le côté ME par la ligne AM qui joint les extrémités des côtés du ſecond angle AEM (47). Or, à cauſe que l'oblique AM eſt plus grande que l'oblique AH qui eſt du même côté ; elle eſt auſſi plus inclinée ſur BM que AH, comme nous venons de le prouver : donc l'oblique AB, qui eſt autant inclinée que l'oblique AM, eſt auſſi plus inclinée que AH qui eſt plus courte qu'elle. C. Q. F. D.

84. Corollaire. *Donc les obliques égales ſont également inclinées ſur* BM, *& ſont avec elles des angles égaux ;* ce qu'on démontrera, comme nous avons fait à l'égard des obliques égales AB, AM.

85. Remarque. On a toujours reproché à Euclide d'avoir pris pour axiôme que *deux lignes qui ne ſont pas paralleles, étant prolongées de part & d'autre, doivent ſe couper :* & la raiſon en eſt, a-t-on

dit, parce qu'il y a dans la Géométrie des lignes qui s'approchent de plus en plus, & qui cependant ne ſe coupent jamais, & que d'ailleurs Euclide pouvoit démontrer cet axiôme.

Si ce reproche étoit légitime, on pourroit le faire auſſi à quiconque avanceroit ſans preuve que *deux lignes droites qui ſe coupent, s'éloignent de plus en plus entre elles, à meſure qu'elles s'éloignent du point où elles ſe coupent; & que deux lignes qui ſont plus proches d'un côté que d'un autre, s'éloignent de plus en plus, en allant de la moindre diſtance à la plus grande, & s'approchent de plus en plus, en allant de la plus grande diſtance à la moindre.* Car ces deux propoſitions peuvent ſe démontrer: & d'ailleurs il y a dans la Géométrie des lignes qui n'ont pas ces propriétés.

Afin donc qu'on ne m'accuſe pas d'uſer de ſuppoſitions; & pour faire voir qu'on peut fort bien prouver ce qu'on avance, ſans avoir recours à la méthode ſans ordre, dont Euclide s'eſt ſervi; voici comment je démontre ces trois propoſitions.

PROPOSITION XIII.

86. *Si deux lignes droites ſe coupent; elles s'éloignent entre elles de plus en plus, à meſure qu'elles s'éloignent du point où elles ſe coupent*, (fig. 46.)

DÉMONSTRATION. Les deux droites AB, AC, ſe coupent en A. Si l'on veut que ces droites ne s'éloignent pas de plus en plus, à meſure qu'elles s'éloignent du point A; il faudra donc qu'il ſe trouve ſur AB des points tels que D & E qui ſoient également éloignés de la droite AC; ou dont le plus éloigné E du point A, ſe trouve plus proche de la droite AC, que le moins éloigné D.

I°. Si l'on veut donc que les points D, E ſoient à égale diſtance de AC; la droite DE qui paſſera par ces deux points ſera parallele à AC (78). Or cette droite DE eſt partie de la droite AB qui coupe AC; donc il s'enſuivroit qu'une droite AB auroit une partie DE parallele à une droite AC, & une autre partie DA qui couperoit cette même droite; ce qui eſt impoſſible; puiſque deux paralleles prolongées à l'infini, ſont toujours à égale diſtance.

II°. Si l'on veut que le point E de la droite AB, lequel eſt plus éloigné du point A que le point D, ſoit cependant plus proche de la droite AC que le point D: je mene du point D, une droite DM parallele à AC; & par conſéquent tous les points de cette parallele ſeront autant diſtans de la droite AC que le point D. Et comme on ſuppoſe que le point E eſt plus proche de AC, que le point D; il faudroit néceſſairement que le point E fût entre les paralleles DM,

AC, comme en P. Or la droite AB coupe la parallele DM en D; & par conſéquent cette droite étant parvenue en D, paſſe au-delà de la parallele : donc, afin qu'elle paſſât par P, il faudroit qu'elle coupât la parallele DM en un autre point. Mais une droite ne peut pas couper une autre droite en deux points (35) : donc il n'eſt pas poſſible que le point E ſoit plus proche de AC que le point D. Ainſi il faut néceſſairement que tous les points de AB s'éloignent de plus en plus de AC, à meſure qu'ils s'éloignent du point A. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

87. *Si deux droites* AB, CD, *ne ſont pas partout à égale diſtance; ces droites prolongées à l'infini, s'éloignent de plus en plus, en allant de la petite diſtance vers la grande, & s'approchent de plus en plus en allant du ſens contraire,* (fig. 47).

DÉMONSTRATION. Le point A de la ligne AB, eſt plus proche de la ligne CD, que l'autre point B. Je mene du point A la droite AM parallele à CD; & dont par conſéquent tous les points ſont autant éloignés de CD que le point A : ainſi le point B de la ligne AB, étant plus éloigné de CD que le point A, la ligne AB eſt en deçà de la ligne AM par rapport à CD. Or, AB coupe la ligne AM : donc par la propoſition précédente, tous ſes points en allant de A en B & au-delà de B, s'éloignent de plus en plus de CD, parallele à AM.

II°. Maintenant ſi je prolonge BA au-delà du point A en S, & AM auſſi au-delà de A en R; le prolongement AS de BA, paſſera de l'autre côté de la parallele MR qu'elle coupe; & par conſéquent le prolongement ſera entre les deux paralleles RM, CD : & comme AS s'éloignera de plus en plus de AR, à meſure qu'elle s'éloignera du point A, par la propoſition précédente; il s'enſuit que AS s'approchera de plus en plus de CD prolongée. C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

88. *Si deux droites* AB, CD, *ne ſont pas partout à égale diſtance; ces deux droites prolongées du côté de leurs moindres diſtances doivent ſe couper,* (fig. 48).

DÉMONSTRATION. Des points A, B de la droite AB, j'abaiſſe ſur la droite CD prolongée s'il le faut, les perpendiculaires AR, BD; & trouvant que AR eſt plus courte que BD, je vois que le point A de la ligne AB eſt plus proche de CD, que l'autre point B. Du point le plus proche A, j'abaiſſe ſur BD la perpendiculaire AM : ainſi la

ligne BD étant perpendiculaire ſur les deux AM, CD; ces deux lignes ſont paralleles (68) : & par conſéquent le point M de la ligne AM, étant à même diſtance de la ligne CD que le point A, doit être moins éloigné de CD que le point B de la droite AB; c'eſt-à-dire que la perpendiculaire AM coupe ſur BD une partie BM. Je porte la partie BM ſur BD pluſieurs fois juſqu'à ce que je paſſe au-delà du point D; par exemple, ici de M en N, & de N en P qui eſt au-delà de D : ce que je puis toujours faire, à cauſe que la ligne BD n'étant pas infinie, puiſqu'elle pourroit encore être prolongée au-delà des points B & D, ne ſauroit contenir ſa partie BM une infinité de fois. Des points de diviſion N, P, j'éleve des perpendiculaires indéfinies NS, PV ſur BP, leſquelles ſeront paralleles aux droites AM, CD, à cauſe que BD eſt perpendiculaire ſur toutes ces lignes (68). Cela poſé :

Les droites ARL, BDP étant perpendiculaires ſur DC, ſont paralleles entre elles (68), & perpendiculaires ſur les droites AM, NS, PV paralleles à CD (68) : ainſi leurs parties AQ, MN compriſes entre les paralleles AM, NS ſont egales (77) ; & comme MN eſt égal à BM par la conſtruction, AQ eſt auſſi égal à BM. Prenant donc ſur NS, la partie QS égale à MA, les angles BMA, AQS ſont égaux, & ont les côtés égaux chacun à chacun : c'eſt pourquoi menant la ligne SA, qui joint les extrêmités des côtés de l'angle AQS; cette ligne fera avec le côté AQ de cet angle AQS, un angle SAQ égal à l'angle ABM fait avec le côté BM de l'autre angle BMA par la droite AB (47). Or, la ligne BA étant entre les deux paralleles BD, AR; cette ligne prolongée du côté de A, feroit en A avec la parallele AQ, un angle égal à l'angle du même côté ABM (71); & par conſéquent égal à l'angle SAQ : donc le prolongement de BA, ne peut pas être différent de la ligne AS ; & la ligne BA prolongée doit couper la droite SN.

Je mene du point S la droite ST perpendiculaire ſur CD prolongée, & cette droite ST étant prolongée en X, eſt auſſi perpendiculaire ſur PV parallele à DT (68). De plus, la même droite ST, ſera parallele à BP, qui eſt auſſi perpendiculaire ſur DT (68). Ainſi les droites SX, NP perpendiculaires entre les paralleles SN, TD ſont égales (67); & à cauſe de NP = BM, nous aurons SX = BM. Prenant donc ſur PV, la partie XV égale à AM, & menant la droite VS ; les angles BMA, SXV ſont égaux, & ont les côtés égaux chacun à chacun. C'eſt pourquoi je prouverai comme ci-deſſus, que l'angle ABM eſt égal à l'angle VSX. Mais ſi la droite BA déjà prolongée en S, étoit encore prolongée au-delà de S, elle feroit en S avec

avec la droite SX parallele à BP, un angle égal à l'angle ABP (71), & par conſéquent égal à l'angle VSX : donc le ſecond prolongement SV de la droite AB, ne doit pas être différent de la droite SV ; & partant AB prolongée en S, puis au-delà de S, doit couper la droite PV : donc, à plus forte raiſon, la droite AB prolongée coupera en quelque point E la droite CD prolongée ; puiſque celle-ci étant toujours entre ces deux paralleles SN, PV, la droite AB ne peut couper SN & PV ſans couper DE. Ce qu'il falloit démontrer.

CHAPITRE III.

DES TRIANGLES ET DES FIGURES DE PLUSIEURS COTÉS, CONSIDÉRÉS PAR RAPPORT A LEURS COTES ET A LEURS ANGLES.

89. DÉFINITIONS. TOUT eſpace plan renfermé par pluſieurs lignes ſe nomme *figure*. Si les lignes qui renferment cet eſpace ſont droites, la figure ſe nomme *figure rectiligne* : ſi ces lignes ſont courbes, la figure eſt dite *curviligne* ; & ſi les unes ſont droites & les autres courbes, la figure ſe nomme *mixtiligne*. Nous ne parlerons ici que des rectilignes.

90. La plus ſimple de toutes les figures rectilignes, eſt celle qui eſt compriſe ſous trois lignes droites & qu'on nomme *triangle* ; car il eſt clair qu'il faut au moins trois lignes droites, pour renfermer un eſpace.

91. Le triangle conſidéré par rapport à ſes côtés, eſt *équilatéral*, lorſque ſes trois côtés ſont égaux ; *iſoſcele*, lorſqu'il n'y en a que deux égaux ; & *ſcalene*, lorſque ſes trois côtés ſont inégaux.

92. Le triangle conſidéré par rapport à ſes angles, ſe nomme *rectangle*, lorſque l'un de ſes angles eſt droit ; *ambligone* ou *obtus-angle*, lorſqu'il y a un angle obtus ; *oxigone* ou *acutangle*, lorſque ſes trois angles ſont aigus.

93. La *baſe* d'un triangle eſt le côté ſur lequel on conçoit qu'il s'appuie ; & il eſt indifférent de prendre pour baſe, lequel on voudra de ſes côtés : mais ordinairement dans le triangle rectangle, on prend pour baſe le côté oppoſé à l'angle droit, & cette baſe ſe nomme *hypothénuſe* ; & dans un triangle iſoſcele, on prend pour baſe, le côté qui eſt inégal aux autres.

94. La hauteur d'un triangle ABC (*fig.* 49 & 50), eſt la perpendiculaire BD abaiſſée ſur la baſe AC de l'angle oppoſé B, qu'on nomme alors le *ſommet* du triangle ; & il n'importe pas que cette

perpendiculaire tombe ſur la baſe en dedans du triangle (*fig.* 49), ou ſur la baſe prolongée en dehors (*fig.* 50): car par le mot de *hauteur*, on entend la diſtance du ſommet à la baſe, laquelle doit ſe meſurer par le chemin le plus court, c'eſt-à-dire, par la perpendiculaire.

95. Lorſqu'on prolonge l'un des côtés AC (*fig.* 50) d'un triangle, l'angle BCD fait par ſon prolongement CD, avec ſon côté voiſin BC, ſe nomme *angle externe*; & les trois angles du triangle ſe nomment *angles internes*.

PROPOSITION XVI.

95. *Dans tout triangle* ABC, *deux côtés quelconques pris enſemble, ſont plus grand que le troiſieme.* (fig. 49.)

DÉMONSTRATION. Le côté AB eſt droit entre ſes extrêmités A, B: donc il eſt plus court que les deux autres BC, AC, qui pris enſemble ſe terminent aux mêmes extrêmités, & ainſi des autres. C. Q. F. D.

96. PROBLÊME. *Avec trois lignes droites données, conſtruire un triangle.* (fig. 51.)

SOLUTION. Si les trois lignes données ne ſont pas telles qu'en les prenant deux à deux, elles ſoient toujours plus grandes que la troiſieme; le problême eſt impoſſible: car c'eſt une condition néceſſaire dans tout triangle. (95.)

Mais ſi cette condition eſt remplie, je prends l'une des droites données AC pour baſe: de l'extrêmité A priſe pour centre, & avec une ouverture de compas égale à la ſeconde des lignes données, je décris un arc PQ: de l'autre extrêmité C priſe pour centre, je décris un autre arc RS du même côté que l'arc PQ: & comme les deux rayons pris enſemble ſont plus grands que la baſe AC; les deux arcs PQ, RS ſe coupent en un ſeul point B hors de la ligne AC. (59.)

C'eſt pourquoi menant du point B les droites BA, BC; le triangle ABC eſt le triangle demandé: car le rayon BA de l'arc PQ, eſt égal à la ſeconde des lignes données; le rayon BC de l'arc RS, eſt égal à la troiſieme; & la baſe AC eſt égal à la premiere.

PROPOSITION XVII.

97. *Dans tout triangle, l'angle externe* BCD *vaut les deux internes oppoſés* CBA, BAC; *& les trois angles du triangle pris enſemble valent deux angles droits.* (fig. 52.)

DÉMONSTRATION. I°. De l'angle B oppoſé au côté prolongé AC,

je mene MN parallele à ce côté AC : l'angle BCD eſt donc égal à ſon alterne MBC (70). Or l'angle MBC vaut les deux angles MBA, ABC; & l'angle MBA eſt égal à ſon alterne BAC : donc l'angle externe BCD, égal à l'angle MBC, eſt égal aux deux internes oppoſés BAC, ABC.

II°. L'angle BCA eſt égal à ſon alterne CBN ; & l'angle BAC eſt égal à ſon alterne MBA : donc les trois angles MBA, ABC, CBN, valent enſemble les trois angles du triangle. Décrivant donc du ſommet commun B pris pour centre, & avec un rayon quelconque, une circonférence de cercle ; les trois arcs MR, RS, SN, compris entre ces angles & qui ſont leur meſure, compoſent enſemble une demi-circonférence MRSN : à cauſe que la droite MN qui paſſe par le centre eſt un diametre. Ainſi les trois angles pris enſemble vaudront la demi-circonférence ou deux angles droits ; & par conſéquent les trois angles d'un triangle valent enſemble deux angles droits. C. Q. F. D.

98. COROLLAIRES. Donc I°. *Deux angles d'un triangle ſont toujours moindres que deux droits :* puiſque les trois enſemble n'en valent pas davantage.

II°. *Si dans un triangle l'un des angles eſt droit ou obtus ; les deux autres ſont chacun aigus :* car s'il s'en trouvoit un autre qui fût droit ou obtus, les trois enſemble vaudroient plus de deux droits.

III°. *Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, ou la ſomme de deux angles égale à la ſomme de deux angles, le troiſieme angle ſera égal au troiſieme :* car autrement la ſomme totale des trois angles de l'un des triangles ne ſeroit pas égale à la ſomme des trois angles de l'autre ; & partant l'une ou l'autre de ces ſommes vaudroit plus ou moins de deux droits.

99. DÉFINITION. Je dirai que deux triangles ſont *parfaitement égaux*, lorſqu'en les mettant l'un ſur l'autre, les côtés tombent ſur les côtés & les angles ſur les angles ; & ce qui me fait ajouter le terme de *parfaitement* à celui d'*égaux*, c'eſt qu'il y a des triangles, qui ſans pouvoir s'ajuſter les uns ſur les autres, ſont cependant égaux, c'eſt-à-dire, que les eſpaces que leurs lignes renferment ſont égaux entre eux, comme on verra dans la ſuite.

PROPOSITION XVIII.

100. *On peut toujours conclure que deux triangles* ABC, abc, *ſont parfaitement égaux ; ſi l'on ſait que les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre chacun à chacun ; ou que deux côtés* AB, BC *ſont égaux à deux côtés* ab, bc, *chacun à chacun, & l'angle compris* ABC

égal à l'angle compris abc; *ou enfin que l'un des côtés* AC *eſt égal à l'un des côtés* ac, *& les angles faits aux extrêmités* A, C *égaux aux angles faits aux extrêmités* a, c. (*fig.* 53.)

DÉMONSTRATION. I°. Si les trois côtés ſont égaux; des extrêmités A, C de la baſe AC, priſes pour centres, & avec des rayons égaux aux deux autres côtés AB, BC, je décris des demi-circonférences RBH, SBM, du même côté de la baſe AC prolongée de part & d'autre: je fais la même choſe à l'égard de l'autre triangle *abc*. Ainſi mettant la baſe AC ſur ſon égale *ac;* les centres A, C, des demi-circonférences RBH, SBM, tomberont ſur les centres *a*, *c*, des demi-circonférences *rbh*, *sbm;* les rayons AR, CS, ſur les rayons *ar*, *cs*, qui leur ſont égaux chacun à chacun: donc les demi-circonférences RBH, SBM, tomberont ſur les demi-circonférences *rbh*, *sbm*, & le point B où les deux premieres ſe coupent, ſur le point *b* où ſe coupent les deux dernieres. Donc les droites BA, BC, tomberont ſur les droites *ba*, *bc:* & partant les deux triangles ABC, *abc*, s'ajuſteront & ſeront parfaitement égaux.

II°. Si les côtés AB, BC, ſont égaux chacun à chacun aux côtés *ab*, *bc*, & l'angle compris ABC, égal à l'angle compris *abc;* je mets l'angle ABC ſur ſon égal *abc*, & partant les côtés AB, BC, tomberont ſur leurs égaux *ab*, *bc*, & la droite AC ſur la droite *ac;* & les deux triangles ſeront parfaitement égaux.

III°. Si la baſe AC, eſt égale à la baſe *ac*, & les angles faits en A & C égaux chacun à chacun aux angles faits en *a* & *c;* je mets BC ſur ſon égale AC, les angles A & C tomberont ſur leurs égaux *a* & *c;* & partant les droites AB, BC, ſur les droites *ab*, *bc*, & le point B où les deux premieres ſe coupent, ſur le point *b* où les deux autres ſe coupent; ainſi les deux triangles s'ajuſteront & ſeront parfaitement égaux. C. Q. F. D.

101. COROLLAIRE. *On ne peut conclure que deux triangles ſont parfaitement égaux, quoique l'on ſache que les trois angles ſont égaux aux trois angles chacun à chacun; ou qu'un côté & un angle ſont égaux à un côté & un angle; ou qu'un côté & deux angles ſont égaux à un côté & deux angles; à moins que les deux angles de part & d'autre ne ſoient faits aux extrêmités des côtes égaux.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit le triangle ABC (*fig.* 54). Je coupe l'un des côtés AB en un point D; & de ce point je mene une droite DE parallele à l'un des côtés AC, & qui coupe l'autre côté BC en un point E. Ainſi le côté AB coupant les deux paralleles AC, DE, fait les angles BAC, BDE, du même côté égaux (71): de même le côté BC coupant les deux paralleles AC, DE, les angles BCA, BED,

du même côté ſont égaux. Or, l'angle B eſt commun aux deux triangles ABC, DBE: donc ces deux triangles ont les trois angles égaux chacun à chacun. Mais il eſt viſible que ces deux triangles ne ſont pas égaux : donc on ne peut conclure l'égalité des triangles de l'égalité de leurs angles.

II°. Soit le triangle ABC (*fig.* 55). De l'extrêmité C de l'un des côtés, je mene ſur tous les points du côté oppoſé AB prolongé juſqu'en M, des droites CP, CM; & ainſi j'ai les triangles APC, ABC, AMC, qui ſont tous inégaux : car les uns ſont parties des autres. Cependant tous ces triangles ont le même côté AC, & un angle A commun ; donc de l'égalité d'un côté & d'un angle, on ne peut pas conclure l'égalité de deux triangles.

III°. Enfin, ſoit le triangle ABC (*fig.* 56), dont je ſuppoſe que l'angle B n'eſt pas égal à l'angle C. Je fais en C un angle égal à l'angle B; & le côté CM de cet angle tombera, ſur AB prolongé en M, ſi l'angle B eſt plus grand que l'angle ACB; & au contraire le côté CP de l'angle fait en C, tombera ſur AB, entre A & B, ſi l'angle B eſt plus petit que l'angle ACB. Or, dans l'un & l'autre cas, le triangle ABC ne ſera égal ni au triangle ACM, ni au triangle ACP, quoique les uns & les autres de ces triangles aient un côté AC commun, & deux angles égaux : donc de l'égalité d'un côté & de deux angles quelconques, on ne peut pas conclure l'égalité de deux triangles. C. Q. F. D.

Proposition XVIII, *bis.*

102. *Deux triangles rectangles* ACB, acb, (fig. 57.) *ſeront toujours parfaitement égaux entre eux, ſi l'hypothenuſe* AB *& l'un des côtés* AC *de l'un ſont égaux chacun à chacun à l'hypothenuſe* ab, *& au côté* ac *de l'autre ; ou ſi les deux côtés* AC, CB, *ſont égaux aux côtés* ac, cb *de l'autre : mais ſi l'hypothenuſe* AB *& le côté* AC *de l'un* (fig. 58.) *ſont égaux aux deux côtés* cb, ac *de l'autre chacun à chacun, les deux triangles ne ſont pas parfaitement égaux.*

Démonstration. I°. Si l'hypothenuſe AB & le côté AC (*fig.* 57), ſont égaux chacun à chacun à l'hypothenuſe *ab* & au côté *ac*, je mets le côté AC ſur ſon égal *ac*, & à cauſe de l'angle droit ACB, égal à l'angle droit *acb*, le côté CB tombera ſur la direction du côté *cb*, & tous les deux ſeront égaux. Car ſi CB étoit plus grand que *cb*, le point B tomberoit au-delà de *b*, par exemple en *e* ; & l'hypothenuſe AB tomberoit ſur *ae* : & comme elle ſeroit plus éloignée de la droite *ac*, perpendiculaire ſur *ce*, que l'hypothenuſe *ab* ; elle ſeroit plus longue que cette hypothenuſe (53) : ce qui eſt contre la ſup-

position. De même si CB étoit plus courte que *cb*, son point B tomberoit entre *b* & *c*; & l'hypothenuse AB couperoit *cb* en un point plus proche de la perpendiculaire, que l'hypothenuse *ab*: d'où il s'ensuivroit que AB seroit moindre que *ab* (53); ce qui est encore contre la supposition : donc CB doit tomber sur *cb*; & les deux triangles doivent être parfaitement égaux.

II°. Si les deux côtés AC & CB sont égaux chacun à chacun aux deux côtés *ac*, *cb* : les deux triangles seront parfaitement égaux : à cause de l'angle droit compris B, égal à l'angle droit compris *b*, (100.)

III°. Si l'hypothenuse AB (*fig.* 58.) & le côté AC sont égaux chacun à chacun aux côtés *cb*, *ac*; le côté CB étant perpendiculaire sur AC est plus court que l'hypothenuse AB (59). Ainsi dans l'autre triangle *abc*, le côté *cb* égal à AB, est plus grand que le côté CB du premier triangle : & comme *cb*, étant perpendiculaire sur *ac*, est plus petit que l'oblique *ab*; il s'ensuit que l'hypothenuse *ab* du second triangle est plus grande que le côté AC du premier : ainsi ces deux triangles n'ayant pas les côtés égaux chacun à chacun, ne sont pas parfaitement égaux. C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

103. *Dans tout triangle isoscele, les deux angles sur la base, c'est-à-dire sur le côté inégal, sont égaux : dans tout triangle équilatéral, les trois angles sont égaux : dans tout triangle scalene, les trois angles sont inégaux; le plus grand est celui qui est opposé au plus grand côté, & le moindre est celui qui est opposé au plus petit côté.*

DÉMONSTRATION. I°. Si le triangle ABC (*fig* 59) est isoscele, & que AC soit le côté inégal; les deux côtés égaux AB, BC sont deux obliques égales menées du point A sur la droite AC (54) : donc ces obliques sont également inclinées sur AC (84); & partant les angles BAC, BCA sur la base sont égaux.

II°. Si le triangle ABC (*fig.* 60) est équilatéral; je le considere comme isoscele sur l'un de ses côtés AC; & par conséquent les angles A, C sont égaux : je le considere aussi comme isoscele sur le côté AB; & partant les angles A, B, sont égaux : donc les trois angles A, C, B sont égaux.

III°. Si le triangle ABC est scalene (*fig.* 61), & que le côté AC soit le plus grand, & le côté AB le moindre; je prolonge le côté moyen en E, jusqu'à ce que CE soit égal à AC; & je tire la ligne EA. Le triangle ACE est isoscele, & les angles CEA, CAE sont égaux. Or l'angle ABC, externe au triangle AEB, étant égal aux deux internes

opposés AEB, EAB (97), est plus grand que le seul AEB ou CEA: *donc* il est aussi plus grand que l'angle CAE; & à plus forte raison est-il plus grand que l'angle CAB, qui n'est qu'une partie de l'angle CAE. Ainsi dans le triangle scalene ABC, l'angle ABC opposé au plus grand côté AB, est plus grand que l'angle CAB opposé au côté moyen CB.

Je prolonge le petit côté BA en M, jusqu'à ce que BM soit égal au côté moyen BC, & je mene la droite MC: le triangle MBC est donc isoscele, & l'angle BMC est égal à l'angle BCM. Or l'angle BAC, externe au triangle AMC, étant égal aux deux internes opposés BMC, ACM (97), est plus grand que le seul AMC ou BMC: *donc* il est plus grand aussi que l'angle BCM; & à plus forte raison est-il plus grand que l'angle BCA, qui n'est qu'une partie de l'angle BCM. Ainsi dans le triangle BAC scalene, l'angle BAC opposé au côté moyen BC, est plus grand que l'angle BAC opposé au plus petit côté. Mais nous venons de voir que l'angle ABC, opposé au plus grand côté AC, est plus grand que l'angle BCA opposé au moyen: donc à plus forte raison l'angle ABC est plus grand que l'angle BCA opposé au petit. C. Q. F. D.

104. Corollaire I. *En général dans tout triangle, les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés.*

Démonstration. Nous venons de démontrer ceci à l'égard du triangle scalene: nous avons vu aussi que dans le triangle équilatéral tous les angles sont égaux; à cause que les côtés auxquels ils sont opposés sont égaux; & que dans le triangle isoscele, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux: il ne reste donc qu'à faire voir que dans le triangle isoscele, l'angle opposé à la base est plus grand que chacun des deux égaux, si la base est plus grande que chacun des côtés égaux, & plus petit si la base est plus petite. Ce que je fais ainsi.

I°. Si la base AB (*fig.* 62) du triangle isoscele ABC, est moindre que chacun des côtés égaux AB, AC; je prolonge cette base en D, jusqu'à ce que AD soit égal à AB, & je mene la droite BD. Ainsi le triangle BAD est isoscele, & les angles ABD, ADB sont égaux. Or l'angle ACB, externe au triangle CBD, étant égal aux deux internes opposés CDB & CBD (97), est plus grand que CDB ou ADB: *donc* l'angle ACB est aussi plus grand que l'angle ABD; & à plus forte raison plus grand que l'angle ABC, qui n'est qu'une partie de l'angle ABD. Ainsi dans le triangle isoscele ABC, l'angle ACB, opposé au côté AB plus grand que la base AC, est plus grand que l'angle ABC opposé à cette base.

II° Si la base AC (*fig.* 63) est plus grande que chacun des deux

côtés égaux AB, BC; je prolonge l'un des côtés AB, juſqu'à ce que AD ſoit égal à AC. Ainſi dans le triangle iſoſcele DAC, j'ai l'angle ADC égal à l'angle ACD: & comme l'angle ABC, externe au triangle CBD, eſt plus grand que le ſeul interne CDB; puiſqu'il vaut les deux internes oppoſés (97): ce même angle ABC eſt plus grand auſſi que l'angle ACD égal à CDB ou ADC; & à plus forte raiſon plus grand que l'angle ACB qui n'eſt qu'une partie de l'angle ACD. Ainſi dans le triangle iſoſcele ABC, l'angle ABC oppoſé à la baſe AC plus grande que chacun des côtés égaux AB, BC, eſt plus grand que l'angle ACB oppoſé au côté AB. Ce qu'il falloit démontrer.

105. COROLLAIRE II. *Dans tout triangle les plus grands côtés ſont oppoſés aux plus grands angles.* (fig. 61).

DÉMONSTRATION. Dans le triangle ſcalene ABC, l'angle B eſt le plus grand, l'angle A eſt le moyen, & l'angle C eſt le moindre. Si le côté BC oppoſé à l'angle moyen étoit égal au côté AC oppoſé au plus grand; le triangle ſeroit iſoſcele, & les angles A & B ſeroient égaux (103); ce qui eſt contre la ſuppoſition: & ſi BC étoit plus grand que AC; l'angle A, oppoſé à BC, ſeroit plus grand que l'angle B oppoſé à AC (104); ce qui eſt encore contre la ſuppoſition. Donc il faut néceſſairement que BC ſoit moindre que CA.

De même ſi le côté AB, oppoſé au moindre angle C, étoit égal au côté BC oppoſé à l'angle moyen A; le triangle ſeroit iſoſcele, & les angles A, C ſeroient égaux (103); ce qui eſt contre la ſuppoſition: & ſi AB étoit plus grand que BC, l'angle C oppoſé à AB ſeroit plus grand que l'angle A oppoſé à BC (104) ce qui eſt encore contre la ſuppoſition: donc AB doit être plus petit que BC. Donc, &c.

106. COROLLAIRE III. Donc l'*hypothenuſe d'un triangle rectangle eſt plus grande que chacun des deux autres côtés.* Car elle eſt oppoſée au plus grand angle; & par la même raiſon dans tout triangle obtus-angle, le côté oppoſé à l'angle obtus eſt le plus grand.

PROPOSITION XIX, *bis*,

107. *Dans tout triangle iſoſcele, la perpendiculaire menée ſur la baſe du ſommet de l'angle oppoſé, diviſe cette baſe en deux parties égales: dans tout triangle équilatéral, les perpendiculaires menées des ſommets des angles ſur les côtés oppoſés, diviſent chacun en deux également: & dans tout triangle ſcalene, les perpendiculaires menées des angles ſur les côtés oppoſés, diviſent ces côtés chacun en deux parties égales.*

DÉMONSTRATION

Démonstration. I°. Si le triangle ABC (fig. 59) eſt iſoſcele, & que le côté AC ſoit la baſe; les deux côtés BA, BC, ſont deux obliques égales menées ſur AC du point extérieur B : donc la perpendiculaire menée du même point ſur AC, doit couper AC en un point également éloigné des points A, C (54); & par conſéquent AC doit être coupée en deux également.

II°. Si le triangle ABC (*Fig.* 60), eſt équilatéral, je conſidere ce triangle comme iſoſcele ſur le côté AC; & par conſéquent la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé B ſur AC, coupera AC en deux également. Par la même raiſon, ſi je le conſidere comme iſoſcele ſur le côté AB, le côté ſera coupé en deux également par la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé C; & de même de l'autre côté BC.

III°. Enfin, ſi le triangle ABC (*Fig.* 61.) eſt ſcalene, les deux côtés BA, BC ſeront deux obliques inégales menées ſur AC d'un point extérieur B : donc la perpendiculaire menée du même point B ſur AC, ne coupera pas AC en un point également éloigné des extrêmités A, C, des obliques; car autrement ces obliques ſeroient égales (54) : donc AC ſera coupée en deux parties inégales, & de même des autres côtés. C. Q. F. D.

Proposition XX.

108. *Si deux triangles* ABC, abc, *ont les côtés* AB, BC *égaux chacun à chacun aux côtés* ab, bc; *mais que l'angle* B *compris par les deux premiers, ſoit moindre que l'angle* b *compris par les deux autres; la baſe* AC *du premier eſt plus petite que la baſe* ac *du ſecond, & ſi l'angle* B *eſt plus grand que l'angle* b, *la baſe* AC *eſt plus grande que la baſe* ac. (fig. 64.)

Démonstration. I°. Je fais en B avec le côté AB un angle ABD égal à l'angle *b;* & je fais le côté BD égal au côté *bc* du ſecond triangle *abc*. Je mene les droites AD, DC : les triangles ABD, *abc* ſont parfaitement égaux; à cauſe des côtés AB, BD égaux chacun à chacun aux côtés *ab*, *bc*, & de l'angle ABD égal à l'angle *abc* (100) : donc la baſe AD eſt égale à la baſe *ac*. Or le triangle CBD eſt iſoſcele; à cauſe du côté BD égal à *bc*, lequel eſt égal à BC; donc l'angle BDC eſt égal à l'angle BCD (103). Mais l'angle DCA eſt plus grand que l'angle BCD qui n'eſt qu'une de ſes parties : donc l'angle DCA eſt auſſi plus grand que l'angle BDC, & à plus forte raiſon plus grand que l'angle ADC, qui n'eſt qu'une partie de l'angle BDC. Ainſi dans le triangle ADC, l'angle ACD étant plus grand que l'angle CDA; le côté AD oppoſé à l'angle ACD eſt plus grand que le côté AC oppoſé à l'angle ADC (104); & partant la baſe AC du premier

triangle, eſt plus petite que la baſe AD ou *ac* du ſecond.

II°. Que ſi l'angle B étoit plus grand que *b*, on prouveroit de même que nous venons de faire, que la baſe *ac* oppoſée au plus petit angle ſeroit moindre que l'autre baſe AC, & que par conſéquent la baſe du plus grand, eſt plus grande que celle du moindre. C. Q. F. D.

109. COROLLAIRE. *Si deux triangles* ABC, abc *ont les côtés* AB, BC *égaux chacun à chacun aux côtés* ab, bc, *mais que la baſe* AC, *ſoit plus petite que la baſe* ac *du ſecond; l'angle* B *oppoſé à la moindre baſe, eſt plus petit que l'angle* b *oppoſé à la plus grande; & ſi la baſe* AC *eſt plus grande que* ac, *l'angle* B *eſt plus grand que l'angle* b. (fig. 64.)

DÉMONSTRATION. Si l'angle B étoit égal à l'angle *b*, les deux triangles ſeroient parfaitement égaux; & la baſe AC ſeroit égale à la baſe *ac* (100); ce qui eſt contre la ſuppoſition: & ſi l'angle B étoit plus grand que l'angle *b*; la baſe AC ſeroit plus grande que la baſe *ac* (108); ce qui eſt encore contre la ſuppoſition: donc il faut néceſſairement que l'angle B ſoit moindre que *b*; & on prouvera de même que l'angle B ſera plus grand que *b*, ſi AC eſt plus grand que *ac*.

110. PROBLÊME. *A l'extrêmité* B *d'une droite* AB, *élever une perpendiculaire.* (fig. 71.)

SOLUTION. Si la droite AB peut ſe prolonger au-delà de B en H, on éleveroit la perpendiculaire ſur AH en B de la même façon que nous l'avons enſeigné ci-deſſus. (62.)

Mais ſi la droite AB ne peut être prolongée à cauſe de quelque obſtacle qui s'y oppoſe; je prends ſur AB une partie de B en C à diſcrétion. Des points C & B pris pour centres, & avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de CB, je décris deux arcs du même côté qui ſe coupent en un point D hors de la ligne CB: à cauſe que les deux rayons ſont enſemble plus grands que CB (59), je mene les droites DC, DB; je prolonge CD en faiſant DE égal à CD; & du point E par le point B, je mene la droite EB, qui eſt la perpendiculaire demandée.

Par la conſtruction, les triangles CDB, DBE, ſont iſoſceles: ainſi les deux angles DCB, DBC ſont égaux (103), & les deux angles DBE, DEB le ſont auſſi. Or les quatre angles DCB, DBC, DBE, DEB valent enſemble les trois angles du triangle CBE, c'eſt-à-dire, deux droits (97): donc la moitié de ces quatre angles, ſçavoir les angles DBC, DBE pris enſemble, valent un droit. Mais ces deux angles enſemble compoſent l'angle CBE: donc cet angle eſt droit; & partant B eſt perpendiculaire ſur AB. (51.)

DES FIGURES COMPRISES SOUS PLUS DE TROIS COTÉS.

111. DÉFINITIONS. Toute figure de quatre côtés ſe nomme *quadrilatere.*

112. Si les quatre côtés ſont égaux & les quatre angles droits, le quadrilatere ſe nomme *quarré.* D'où il ſuit que les côtés oppoſés d'un quarré (*fig.* 65) ſont paralleles entre eux : car les côtés AB, DC du quarré ABCD étant perpendiculaires ſur le côté AD, à cauſe des angles droits A, D, ſont paralleles entre eux (68); & de même les côtés oppoſés AD, BC, étant perpendiculaires ſur le côté CD, à cauſe des angles droits D, C ſont paralleles.

113. Si les quatre angles ſont droits ſans que les quatre côtés ſoient égaux, le quadrilatere ſe nomme *rectangle ;* & alors les côtés oppoſés ſont égaux : car les côtés oppoſés AB, DC du rectangle ABCD (*fig.* 66) étant paralleles entre les côtés oppoſés AD, BC qui ſont auſſi paralleles, à cauſe des angles droits, doivent être égaux (77); & par la même raiſon les deux côtés oppoſés AD, BC doivent être égaux.

114. Si les quatre angles ne ſont pas droits ni les quatre côtés, mais que les côtés oppoſés ſoient paralleles; le quadrilatere ſe nomme *parallélogramme* (fig. 67); & alors les côtés oppoſés ſont égaux, par la raiſon que nous en avons donnée au ſujet du rectangle. (113.)

115. Le *rhombe* ou *lozange* (fig. 68) eſt un quadrilatere qui n'a pas les angles droits, mais dont les quatre côtés ſont égaux ; & dans cette figure les côtés oppoſés ſont paralleles : car menant de deux angles oppoſés B, D, la droite BD; le rhombe eſt diviſé en deux triangles parfaitement égaux BAD, BCD; puiſqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun (100): & de plus ces deux triangles étant iſoſceles, ont les angles ſur la baſe BD égaux (73). Ainſi ADB étant égal à ſon alterne CBD, les côtés AD, BC du rhombe ſont paralleles (73): de même l'angle ABD étant égal à ſon alterne CDB, les côtés AB, CD ſont auſſi paralleles.

116. Le *trapeze* (fig. 69) eſt un quadrilatere dont les quatre angles ne ſont pas tous égaux, & les côtés oppoſés ne ſont pas paralleles ; & le *trapezoïde* (fig. 70) eſt un quadrilatere dont les quatre angles ne ſont pas tous égaux, & dont il n'y a que deux côtés qui ſoient paralleles.

117. Dans tout quadrilatere (*fig.* 65, 66, 67, 68, 69, 70), la droite BD menée d'un angle B à ſon oppoſé D, ſe nomme *diagonale.*

Les figures qui ont plus de quatre côtés, ſe nomment en général *polygones*, & en particulier le polygone ſe nomme *pentagone*, lorſ-

qu'il a cinq côtés ; *hexagone*, lorſqu'il en a ſix ; *Eptagone*, lorſqu'il en a ſept ; *octogone*, lorſqu'il en a huit ; *enneagone*, lorſqu'il en a neuf ; *décagone*, lorſqu'il en a dix ; *ondécagone*, lorſqu'il en a onze ; *dodécagone*, lorſqu'il en a douze. Les autres ſe nomment ploygones de 13 côtés, de 14, de 15, de 16, &c.

Lorſque les polygones ont tous les angles & les côtés égaux, ils ſe nomment *réguliers*, & lorſque cela n'eſt pas, ils ſe nomment *irréguliers*.

PROPOSITION XXI.

118. *Tous les quadrilateres, à l'exception du trapeze & du trapezoïde, ſont coupés en deux également par l'une ou l'autre de leur diagonale* AC, BD, *& les deux diagonales ſe coupent en deux parties égales.* (fig. 65, 66, 67, 68.)

DÉMONSTRATION. I°. Par la formation du quarré, du rectangle, du parallélogramme, & du lozange ; les côtés oppoſés ſont paralleles & égaux : donc ſi l'on mene la diagonale BD, les triangles BCD, BAD qu'elle forme avec les côtés ſont parfaitement égaux ; puiſque le côté BC eſt égal à ſon oppoſé AD, le côté CD à ſon oppoſé AB, & que le troiſieme côté BD eſt commun à l'un & l'autre triangle (100). Or ces deux triangles compoſent la figure entiere : donc la figure eſt coupée en deux également par la diagonale.

II°. Les deux diagonales BD, AC étant menées ; les triangles BOC, AOD oppoſés au ſommet O, ont le côté BC égal au côté AD oppoſé à BC, l'angle OBC égal à ſon alterne ODA, & l'angle OCB égal à ſon alterne OAD. Ainſi ces deux triangles ayant un côté égal à un côté, & les angles ſur ces côtés égaux chacun à chacun, ſont parfaitement égaux (100) : donc le côté BO du premier triangle oppoſé à l'angle OCB, eſt égal au côté OD oppoſé à l'angle OAD égal à l'angle OCB, & partant la diagonale BD eſt diviſée en deux également en O.

De même le côté OC du premier triangle oppoſé à l'angle OBC, eſt égal au côté OA du ſecond triangle oppoſé à l'angle ODA, égal à l'angle OBC : & partant la diagonale AC eſt auſſi diviſée en deux également en O. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

119. *Tout polygone régulier ou irrégulier, en y comprenant le triangle & le quadrilatere, peut être diviſé en autant de triangles qu'il a de côtés ; ou en autant de triangles moins un qu'il a de côtés ; ou en autant de triangles moins deux qu'il a de côtés : mais le triangle n'eſt pas ſuſceptible de ce dernier cas.*

DÉMONSTRATION. Soit le pentagone irrégulier ABCDE (*fig.* 72).

Je prends un point O dans l'eſpace que ſes côtés renferment; & de ce point, je mene aux angles les droites OA, OB, OC, OD, OE, & le pentagone eſt diviſé en autant de triangles qu'il a de côtés : ce qui eſt évident; & de même des autres polygones réguliers ou irréguliers.

Soit le même pentagone ABCDE (*fig.* 73). Je prends un point R ſur l'un de ſes côtés BC, & qui ne ſoit ni l'une ni l'autre des extrêmités B, C. Je mene de ce point des droites RA, RE, RD, à tous les angles où j'en puis mener, ce qui diviſe le pentagone en triangles. Or le premier triangle RBA, emporte le côté AB du pentagone, & la partie BR du côté BC; & le dernier triangle RCD emporte le côté CD du pentagone, & la partie RC du côté de BC : ainſi il faut trois côtés du pentagone pour les deux triangles RBA, RCD; & au contraire il ne faut qu'un côté du pentagone pour chacun des autres triangles RAE, RED. C'eſt pourquoi comme le pentagone n'a que cinq côtés, il ne doit y avoir que quatre triangles, c'eſt-à-dire $5-1$, ou autant qu'il y a de côtés moins un, & ainſi des autres.

Soit encore le même pentagone ABCDE (*fig.* 74). De l'un de ſes angles B, je mene des droites BE, BD aux autres angles où j'en puis mener : ce qui diviſe le pentagone en triangles. Or les deux triangles extrêmes BAE, BCD, emportent chacun deux côtés du pentagone; & par conſéquent il faut qu'il y ait deux triangles de moins qu'il n'y a de côtés : & il eſt viſible que le triangle, ou le polygone des trois côtés, eſt le ſeul qui ne peut pas ſe diviſer de cette troiſieme façon. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

120. *Tout polygone régulier* ABCDEF *peut ſe diviſer en autant de triangles iſoſceles & parfaitement égaux, qu'il a de côtés; & les ſommets de ces triangles ſeront tous en un même point* O, *également éloignés de tous les angles du polygone.* (fig. 75.)

DÉMONSTRATION. Je diviſe tous les angles en deux également par les droites AO, BO, CO, DO, &c. Ainſi, à cauſe que tous les angles du polygone ſont égaux, puiſqu'il eſt régulier; tous les angles OAB, OAF, &c, que les lignes AO, BO, &c, font avec les côtés du polygone, ſont auſſi égaux. Or chaque angle BAF, &c, du polygone vaut moins que deux droits; puiſque cet angle & ſon angle de ſuite RAF ne valent que deux droits (49) : donc les angles OAB, &c, faits par les droites AO, BO, &c, avec les côtés du polygone, ſont moindres chacun qu'un droit. Mais ſi le côté AB coupoit les deux droites AO, BO, de façon que les angles internes du même côté OAB, OBA fuſſent enſemble égaux à deux droits; les lignes

AO, BO ſeroient paralleles (73) : donc puiſque ces deux angles OAB, OBA, valent enſemble moins de deux droits; les deux lignes AO, BO, doivent s'approcher, & par conſéquent ſe couper en un point O; & le triangle AOB doit être iſoſcele, à cauſe des angles égaux ſur la baſe AB. On prouvera de même que les lignes BO, CO, doivent ſe couper, & former un triangle iſoſcele BOC; à cauſe des angles égaux ſur la baſe BC.

Or les triangles iſoſceles AOB, BOC, ayant la baſe AB égale à la baſe BC, & les deux angles ſur la baſe AB, égaux chacun à chacun aux deux angles ſur la baſe BC, ſont parfaitement égaux (100) : donc les deux côtés égaux AO, BO, du premier, doivent être égaux aux côtés égaux BO, CO, du ſecond; & par conſéquent le côté BO doit être commun aux deux triangles, & le point O doit être leur ſommet commun. On démontrera de la même façon que les autres triangles COD, &c, ſont iſoſceles & parfaitement égaux aux deux dont nous venons de parler; & que le ſommet O doit être commun à tous : & de-là il ſuit que tous les côtés AO, BO, &c, de ces triangles étant égaux, le point O eſt également éloigné de tous les angles du polygone. C. Q. F. D.

121. COROLLAIRE. Donc ſi du point O pris pour centre, & avec un rayon égal à l'une des droites AO, on décrit une circonférence; cette circonférence paſſera par les extrêmités B, C, D, &c, des autres lignes BO, CO, &c; & par conſéquent par tous les angles du polygone.

PROPOSITION XXIV.

122. *Si après avoir diviſé un polygone régulier* ABCDEF *en autant de triangles iſoſceles & parfaitement égaux qu'il a de côtés, on mene du ſommet* O *commun à tous les triangles des perpendiculaires* OS, OT, *&c, ſur les côtés; ces perpendiculaires ſeront égales* (fig. 75).

DÉMONSTRATION. Les triangles AOF, FOE ſont iſoſceles : donc les perpendiculaires menées des ſommets ſur les baſes, coupent les baſes AF, FE chacune en deux également en S & T (107). Or ces deux baſes ſont égales : donc leurs moitiés SF, FT le ſont auſſi. Ainſi les triangles OFS, OFT ayant l'angle OFS égal à l'angle OFT, & les côtés OF, FS, qui comprennent l'angle OFS, égaux chacun à chacun aux côtés OF, FT, qui comprennent l'angle OFT, ſont parfaitement égaux (100) : donc la perpendiculaire OS eſt égale à la perpendiculaire OT; & ainſi des autres. C. Q. F. D.

123. *DÉFINITION.* Lorſqu'un polygone (*fig.* 75), eſt diviſé en autant de triangles iſoſceles, & parfaitement égaux qu'il a de côtés;

le point O qui eſt le ſommet commun des triangles, ſe nomme *centre du polygone* : les angles ABC, &c, formés par les côtés du polygone, ſe nomment *angles de la figure* : les angles OAB, OBA, de l'un des triangles ſur un côté AB, ſe nomment *angles ſur la baſe* : les côtés OA, OB, &c, des triangles ſe nomment *rayons* ; & les perpendiculaires OS, OT, &c, ſe nomment *apothêmes*, ou *rayons droits*.

Proposition XXV.

124. *Tous les angles d'un polygone régulier valent autant de fois deux angles droits moins quatre que le polygone a de côtés.* (fig. 75.)

Démonstration. Tout polygone régulier peut ſe diviſer en autant de triangles iſoſceles & égaux qu'il a de côtés : or les trois angles de chacun de ces triangles, valent enſemble deux angles droits (97) : donc tous les angles des triangles pris enſemble valent autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés. Or de cette ſomme il faut retrancher les angles au ſommet O, à cauſe que les angles du polygone ne comprennent que les angles des baſes des triangles : & tous ces angles au ſommet valent enſemble quatre angles droits ; puiſqu'ils embraſſeroient la circonférence entiere qui ſeroit décrite du centre O : donc les angles du polygone valent autant de fois deux angles droits moins quatre que le polygone a des côtés.

Par exemple, l'exagone étant compoſé de ſix triangles ; tous les angles de ces triangles valent enſemble ſix fois 2 angles droits, c'eſt-à-dire 12 angles droits, deſquels retranchant les 4 angles droits qui ſont la valeur des ſix angles faits en O ; il reſtera huit angles droits, pour la valeur de la ſomme des angles de l'exagone, & ainſi des autres.

Proposition XXVI.

125. *Si l'on prolonge tous les côtés d'un polygone d'une ſeule part en* R, X, *&c, tous les angles extérieurs ſont égaux ; chacun d'eux eſt égal à l'angle au centre ; & tous enſemble valent quatre angles droits.* (fig. 75.)

Démonstration. I°. Tous les angles du polygone ſont égaux entre eux : or, chacun de ces angles BAF, &c, & ſon angle de ſuite RAF, &c, valent enſemble deux droits (49) : donc tous les angles extérieurs ſont égaux.

II°. L'angle BAF, & ſon angle de ſuite RAF, valent enſemble deux droits ; & les trois angles OAF, OFA, AOF du triangle AOF, valent enſemble auſſi deux droits. Donc les angles BAF, RAF ſont

enſemble égaux à la ſomme des trois OAF, OFA, AOF. Mais l'angle BAF eſt égal à la ſomme des deux OAF, OFA; puiſque chacun de ceux-ci vaut la moitié de BAF : donc l'angle RAF extérieur eſt égale à l'angle au centre AOF, & ainſi des autres.

III°. Il y a autant d'angles extérieurs, que d'angles au centre; & tous les angles au centre valent enſemble quatre droits : donc à cauſe que chaque extérieur eſt égal à chaque angle au centre, la ſomme des extérieurs eſt égale à quatre angles droits. C. Q. F. D.

126. PROBLÊME I. *Un polygone* ABCDE *étant donné; trouver la valeur de l'angle au centre, de l'angle ſur la baſe, & de l'angle de la figure* (fig. 76).

SOLUTION. Suppoſons que le polygone ſoit un pentagone; du centre O & avec le rayon OA, je décris un cercle qui paſſe par tous les angles du polygone (122), & qui eſt diviſé en cinq parties égales par les cinq angles égaux du centre : ainſi chacun de ces angles vaut la cinquieme partie de la circonférence ou de 360 dégrés; & partant l'angle au centre vaut 72 degrés. Or les trois angles du triangle AOB valent enſemble deux droits (97) ou 180 degrés. Retranchant donc de 180 la valeur 72 de l'angle au centre AOB; le reſte 108 eſt la valeur des deux angles ſur la baſe pris enſemble, ou la valeur de l'angle BAE de la figure, lequel eſt égal aux deux angles OAB, OBA; puiſqu'il eſt le double de chacun d'eux : donc chacun des angles OAB, OBA ſur la baſe vaut 54 degrés; & on trouvera de la même façon les angles des autres polygones.

127. COROLLAIRE I. *Dans l'exagone, les angles ſur la baſe & l'angle au centre ſont égaux, & tous les triangles qui le compoſent ſont équilatéraux* (fig. 75).

DÉMONSTRATION. L'angle au centre AOB embraſſe la ſixieme partie de la circonférence, & vaut le ſixieme de 360 degrés, c'eſt-à-dire 60. Retranchant donc cette valeur 60, de la valeur 180 des trois angles du triangle AOB; il reſtera 120 pour la valeur des deux angles ſur la baſe; & par conſéquent chacun d'eux vaudra 60, de même que l'angle au centre. Ainſi les trois angles du triangle AOB étant égaux, les trois côtés le ſeront auſſi; car s'il y avoit des côtés inégaux, les angles oppoſés à ces côtés ſeroient auſſi inégaux (104.)

128. COROLLAIRE II. *Dans le décagone ou polygone de* 10 *côtés, l'angle au centre eſt la moitié de l'angle ſur la baſe.*

DÉMONSTRATION. L'angle au centre embraſſe la dixieme partie de la circonférence ou de 360 degrés, & partant cet angle vaut 36 degrés;

degrés; & cette valeur étant retranchée de la valeur 180 du triangle, le reſte 144 eſt la valeur des deux angles ſur la baſe: ainſi chacun de ces angles eſt 72. Or 36 eſt la moitié de 72 : donc l'angle au centre eſt la moitié de l'angle ſur la baſe.

129. PROBLÊME II. *Le côté* AB *d'un polygone étant donné, conſtruire ce polygone* (fig. 76).

SOLUTION. Je fais à chacune des extrêmités A, B, un angle égal à l'angle ſur la baſe du polygone demandé. Par exemple, ſi c'eſt un pentagone, je fais en A un angle OAB de 54 degrés (128), & un autre OBA en B d'un même nombre de degrés. Du point O, où les côtés OA, OB de ces angles ſe coupent, & avec une ouverture du compas égale à OA, OB; je décris une circonférence, ſur laquelle portant encore quatre fois le côté AB, de B en C, de C en D, &c, j'ai le pentagone demandé.

Car le triangle AOB eſt iſoſcele, à cauſe des angles égaux OBA OAB ſur la baſe AB; & comme ces deux angles valent enſemble, 108 degrés, & qu'il en faut 180 pour les trois angles de ce triangle (97); il s'enſuit que l'angle AOB en vaut 72, ou la cinquieme partie de la circonférence. Ainſi en portant ſur la circonférence le côté AB encore 4 fois; la circonférence s'eſt trouvé diviſée en ſes cinq parties égales. C'eſt pourquoi ſi des points des diviſions C, D, &c, nous menons des rayons au centre; nous trouverons cinq triangles égaux au premier AOB, rangés autour du même ſommet O : & partant la figure compoſée de ces cinq triangles, eſt un pentagone régulier dont le côté eſt AB, tel qu'on le demandoit.

REMARQUE. On trouve dans les étuis, nommés étuis de Mathématiques, *un demi-cercle gradué*, c'eſt-à-dire diviſé en ſes 180 degrés; & par le moyen de ce demi-cercle, on décrit aiſément un angle de tel nombre de degrés que l'on veut.

130. PROBLÊME III. *L'apothême* OR *d'un polygone étant donné, conſtruire ce polygone* (fig. 76.)

SOLUTION. Suppoſons que le polygone demandé ſoit un pentagone. J'éleve ſur l'extrêmité R de l'apotheme OR, une perpendiculaire indéfinie AE; & comme l'angle au centre d'un pentagone eſt de 72 degrés, je fais à l'autre extrêmité O de l'apotheme OR deux angles AOR, EOR, l'un d'un côté & l'autre de l'autre, chacun de 36 degrés, c'eſt-à-dire de la moité de 72. Ainſi ces angles étant aigus, leurs côtés AO, EO ſont inclinés ſur OR, du côté de la per-

pendiculaire AE; & par conſéquent ils doivent couper cette perpendiculaire en des points A, E : & comme dans les triangles ARO, ERO, le côté OR eſt commun, & que les angles AOR, ARO faits ſur ce côté, ſont égaux chacun à chacun aux angles ERO, EOR, faits ſur le même côté; il s'enſuit que ces deux triangles ſont égaux (100): donc l'angle OAR eſt égal à l'angle OER; & partant le triangle AOE eſt iſoſcele, & l'angle de ſon ſommet eſt de 72 degrés, ou la cinquieme partie de la circonférence.

Ainſi du point O pris pour centre, & avec le rayon AO ou OE, décrivant une circonférence, & portant encore quatre fois la baſe AE ſur cette circonférence de E en D, de D en C, &c; on aura un pentagone régulier, dont l'apotheme eſt OR, tel qu'on le demandoit : ce qui ſe démontre comme dans le problême précédent.

131. PROBLÊME IV. *Conſtruire un quarré ſur une ligne donnée* AD. (fig. 65.)

SOLUTION. Aux extrêmités A, D de la ligne AD, j'éleve deux perpendiculaires AB, DC, que je fais égales chacune à la droite AD. Des extrêmités B, C, de ces perpendiculaires, je mene la droite BC; & la figure ABCD, eſt le quarré demandé.

Car à cauſe que la droite AD eſt perpendiculaire ſur les droites AB, DC; ces deux lignes ſont paralleles entre elles (68) : & à cauſe que les deux points B, C de la droite BC ſont également éloignés de la droite AD; les deux lignes BC, AD ſont paralleles, (78) égales & également inclinées entre les paralleles AB, CD (77). Mais AD eſt perpendiculaire entre les deux AB, CD : donc BC l'eſt auſſi; & par conſéquent tous les angles de la figure étant droits, & tous les côtés égaux, cette figure eſt un quarré (112) fait ſur le côté demandé.

132. PROBLÊME V. *Deux des côtés inégaux* AD, AB *d'un rectangle étant donnés; conſtruire ce rectangle.* (fig. 66).

SOLUTION. J'éleve AB perpendiculairement ſur l'extrêmité A, du côté AD : puis du point B, je mene une parallele à la droite AD; & du point D, une parallele à la droite AB, laquelle coupe l'autre parallele en C; & la figure ABCD eſt le rectangle demandé.

Car les deux droites AB, DC étant paralleles entre les paralleles AD, BC, ſont égales & également inclinées. (77). Or, AB eſt perpendiculaire ſur AD : donc DC l'eſt auſſi; & par la même raiſon, les droites AD, BC ſont égales & également inclinées; & la droite BC

eſt perpendiculaire ſur les deux AB, DC : donc la figure a ſes quatre angles droits ; & les côtés oppoſés, paralleles : donc elle eſt un rectangle (113) ; & ce rectangle eſt tel qu'on le demandoit.

133. Problême VI. *Deux des côtés inégaux* AD, AB *d'un parallélogramme étant donnés ; conſtruire ce parallélogramme* (fig. 67.)

Solution. Je fais faire aux deux côtés donnés un angle BAD égal à l'angle donné : de l'extrêmité B je mene une parallele à AD ; de l'extrêmité D, une parallele à AB, laquelle coupe l'autre parallele en C ; & la figure ABCD eſt le parallélogramme demandé : ce qui ſe démontre comme à l'égard du rectangle.

CHAPITRE IV.

DE LA PUISSANCE DES LIGNES.

134. Par le mot de *puiſſance* d'une ligne, nous n'entendons ici que ſa ſeconde puiſſance, c'eſt-à-dire le quarré d'une ligne ; & ce que nous propoſons, c'eſt de ſavoir combien le quarré d'une ligne diviſée en pluſieurs parties égales ou inégales, contient de quarrés de ſes parties, & de produits des unes par les autres ; & auſſi quel eſt le rapport des quarrés des ces parties à quelques produits des unes par les autres, &c, ce que l'on entendra mieux par les propoſitions ſuivantes.

135. Problême. *Faire le produit de deux lignes données* AB, AC, (fig. 77.)

Solution. J'éleve AB perpendiculairement ſur AC ; je mene BD parallele à AC, & CD parallele à AB : ce qui forme un rectangle ABDC (132), lequel eſt la même choſe que le produit demandé ; & en voici la démonſtration.

Multiplier la ligne AB par la ligne AC, c'eſt prendre la ligne AB autant de fois qu'il y a d'unités dans la ligne AC. (*Calc.* II.) Or, la ligne AC étant une ſuite de points, le point eſt ſon unité ; & par conſéquent pour multiplier AB par AC, il faut prendre AB autant de fois qu'il y a de points dans AC. Concevons donc que ſur tous les points de la ligne AC, s'élevent des perpendiculaires égales chacune à AB ; ces perpendiculaires ſeront paralleles entre elles (68) : & comme elles ſe toucheront les unes & les autres dans toute leur longueur, leur ſomme formera un eſpace qui eſt le rectangle ABCD. Or, la ſomme de ces lignes n'eſt pas différente de la premiere, priſe

autant de fois qu'il y a d'unités dans AC, ou multipliée par AC : donc le rectangle ABCD, eſt égal au produit de AB par AC.

136. *Remarque I.* On demandera peut-être pourquoi je fais faire un angle droit aux deux lignes AB, AC, plutôt qu'un angle aigu ou obtus : & en effet, il paroît d'abord que ſi nous faiſons former aux deux lignes AB, AC un angle aigu BAC (*fig* 78), & que nous achevions le parallélogramme ABCD, comme il a été dit ci-deſſus (133); ce parallélogramme contiendra autant de lignes égales à AB, qu'il y a de points dans AB, & que par conſéquent le parallélogramme doit être auſſi égal au produit des deux lignes. Cependant comme ce ſeroit ici une erreur groſſiere, il faut faire voir en quoi elle conſiſte, en montrant qu'il n'y a que le rectangle qui ſoit égal au produit de ces lignes.

I°. Le point, étant conſidéré comme indiviſible, doit avoir une longueur & une largeur infiniment petite; & partant, nous devons le conſidérer comme un quarré moindre que tout ce que nous pouvons imaginer de plus petit, ou comme un petit cercle dont le diametre eſt moindre que tout ce qu'on pourroit aſſigner ou concevoir. Or, les lignes ne ſont autre choſe que les traces du point : c'eſt pourquoi nous devons les conſidérer comme ayant toutes une même largeur infiniment petite, & égale à la largeur ou à la longueur du point, ou comme des rectangles tels que ABEH (*fig.* 79), qui peuvent être égaux ou inégaux en longueur; mais dont la largeur, c'eſt-à-dire la diſtance des paralleles AB, EH, ou la perpendiculaire AH entre ces deux paralleles eſt toujours la même & infiniment petite. Cela poſé,

II°. Suppoſons que le rectangle infiniment mince ABEH (*fig.* 79), ſoit la ligne qu'on veut multiplier par la ligne AC. Si nous mettons ce rectangle perpendiculairement ſur la ligne AC; il eſt clair qu'il ne prendra ſur cette ligne que la longueur AH d'un point : c'eſt pourquoi, concevant qu'il y ait une infinité de rectangles égaux au rectangle ABEH, les uns auprès des autres, le long de la ligne AC, & qui lui ſoient tous perpendiculaires; il y en aura certainement autant que la ligne AC contient de points : & par conſéquent leur ſomme ou le premier pris autant de fois qu'il y a de points dans AC, ſera le produit demandé; & ce produit ſera un rectangle.

III. Maintenant, concevons qu'une infinité de rectangles infiniment minces & égaux chacun au précédent, ſoient tous également inclinés ſur la ligne AC (*fig.* 80). Il faudra néceſſairement que tous ces rectangles ne s'appuient ſur AC que ſur un angle de leurs baſes, & qu'ils laiſſent des petits triangles rectangles tels que HTV, VXZ qui ſeront tous égaux entre eux (100), ayant le côté TV égal

au côté XZ, l'angle droit HTV égal à l'angle droit VXZ, & l'angle TVH égal à l'angle XZV, à cauſe des baſes TV, XZ également inclinées ſur AC.

Mais pour remédier à l'inconvénient de ces triangles vuides, je prolonge le côté RB en A; ce qui donne encore un petit triangle rectangle égal à chacun des triangles vuides HTV, &c; & du point E, je mene ES parallele à AH. Les triangles rectangles ESB, HAR ſont parfaitement égaux (102); à cauſe des hypoténuſes ES, AH paralleles entre les paralleles AB, HE, & par conſéquent égales (77), & des côtés BE, RH auſſi égaux, pour la même raiſon. Retranchant donc du rectangle RBEH, le triangle ESB; & lui donnant en ſa place le triangle HAR; le parallélogramme ASEH ſera encore égal au rectangle RBEH : & faiſant la même choſe à l'egard des autres rectangles, nous aurons le parallélogramme ASDC égal à la ſomme des petits parallélogrammes ou à la ſomme des rectangles.

Or les parties égales AH, HV, &c, que ces parallélogrammes prennent ſur AC, ſont plus grandes que les épaiſſeurs RH, TV &c, des rectangles infiniment minces : donc il y a néceſſairement moins de parallélogrammes ou de rectangles que la ligne AC ne contient de points; & par conſéquent le premier rectangle, pris autant de fois que la ligne AC a de points, doit faire une ſomme plus grande que la ſomme des petits parallélogrammes contenus dans le parallélogramme ASDC. Ainſi ce parallélogramme n'eſt pas le produit qu'on demande; & on trouvera toujours qu'en inclinant une ligne ſur l'autre, le parallélogramme ſera moindre que le produit demandé.

137. Remarque II. J'ai dit plus haut (35), que ſi deux lignes droites ſe coupent, elles ne ſe coupent qu'en un point; & dans la remarque précédente, j'ai fait voir qu'une ligne droite, qui coupe obliquement une autre, prend une partie plus grande ſur cette ligne que ſi elle la coupoit perpendiculairement : d'où il paroît qu'on peut conclurre que deux lignes droites peuvent ſe couper en plus d'un point. Or, de peur qu'on ne me reproche de me contredire moi-même, je vais faire voir que ces deux propoſitions n'ont rien d'oppoſé; pourvu qu'on les entende comme elles doivent être entendues.

Nous avons démontré (34) que ſi deux lignes droites ont deux points communs, ces deux lignes ne ſont qu'une ſeule & même ligne droite; & delà nous avons conclu que deux lignes droites ne peuvent ſe couper en deux points : c'eſt-à-dire que ſi deux points de l'une s'ajuſtent ſur deux points de l'autre, les deux lignes ne peuvent ſe couper. Ainſi il ne s'agit que de faire voir, que quoique deux lignes qui ſe coupent obliquement, ſe coupent en une partie

plus grande, que ſi elles ſe coupoient perpendiculairement ; cependant il n'y a jamais deux points de l'une qui s'aſſujettiſſent ſur deux points de l'autre, de la façon dont nous venons de l'expliquer.

I°. Concevons donc que deux lignes droites ſoient repréſentées par les rectangles AB, CD (*fig.* 81, 82), dont les largeurs ſont infiniment petites & égales ; ou ſi l'on veut, par les ſuites des petits cercles infiniment petits & égaux compris dans ces rectangles : & mettons ces deux rectangles ou ces deux ſuites de cercles perpendiculairement l'un ſur l'autre ; enſorte qu'ils ſe coupent (*fig.* 81.) Le petit quadrilatere dans lequel ces rectangles ſe couperont, ſera un quarré ; puiſque les quatre côtés ſe coupent à angles droits, & qu'ils ſont égaux ; à cauſe qu'étant perpendiculaires entre les longs côtés des rectangles, ils en expriment les largeurs qui ſont égales par la ſuppoſition : & comme les diametres des petits cercles égaux, ſont égaux chacun à la largeur des rectangles ; il eſt clair que le petit quarré ne peut contenir que l'un de ces cercles E. Ainſi, ſi nous regardons les rectangles comme repréſentant des lignes qui ſe coupent perpendiculairement, ces lignes ne ſe couperont qu'en un point qui ſera le petit quarré ; & ſi nous regardons les ſuites de ces cercles, comme repréſentant ces lignes, elles ne ſe couperont auſſi qu'en un point qui ſera le petit cercle E ; & par conſéquent les deux lignes n'auront de commun que le point E.

II°. Maintenant, concevons que les deux obliques AB, CD ſoient obliques l'une ſur l'autre (*fig.* 82) ; ou, ce qui revient au même, que la ligne CD tourne autour du point fixe E ; enſorte que l'angle DEB devienne oblique : les points H, S de la ligne CD, voiſins du point E, pourront bien anticiper un peu ſur les points R, T de la droite AB, voiſins du point E, mais les deux premiers ne tomberont abſolument ſur les deux ſeconds, que lorſque la ligne CD tombera ſur la ligne AB : & par conſéquent, tant que cela ne ſera pas, la droite HS menée entre les deux points H, S de la ligne CD, ne tombera pas ſur la droite RT menée entre les deux points R, T de la droite AD. Ainſi, ni les points H, S, ni les points R, T ne pourront être dits communs aux deux lignes ; puiſque leurs directions ſont différentes ; & il n'y aura que le point E, qui ſera abſolument commun & à l'un & à l'autre : donc ces deux lignes ne ſe couperont qu'en un point commun ; quoique la partie dans laquelle ils ſe coupent, ſoit plus grande que ſi elles ſe coupoient perpendiculairement.

III°. A la vérité il peut ſouvent arriver que les lignes AB, CD (*fig.* 82), ſe coupent obliquement ; & que néanmoins les points H,

R n'anticipent pas l'un ſur l'autre, non plus que les points T, S: & alors il ſemble qu'on puiſſe dire que les deux obliques AB, CD ne ſe coupent pas en une partie plus grande que ſi elles étoient perpendiculaires entre elles. Mais il faut obſerver que le point H étant tout entier hors du point E; le point E ne peut paſſer de la poſition E à la poſition H, à moins que pendant ce mouvement, ſon centre ne parcoure ſucceſſivement la diſtance qui eſt entre lui & le centre du point H. Ainſi le point E paſſant en H, prend pluſieurs poſitions intermédiaires entre la poſition E & la poſition H: par la même raiſon, le même point E paſſant de la poſition E à la poſition R, prend pluſieurs poſitions intermédiaires entre la poſition E & la poſition R. C'eſt pourquoi les poſitions intermédiaires entre E & H, ou du moins quelques-unes d'entre elles, anticipent ſur les poſitions intermédiaires de E en R, ou ſur quelques-unes d'entre elles; & ces anticipations font que deux obliques AB, CD ſe coupent en une partie plus grande, que lorſqu'elles ſont perpendiculaires. Car quoiqu'alors il y ait auſſi des anticipations, telles que nous venons de dire; cependant elles ne font pas que la partie coupée ſoit plus grande que le point E (*fig.* 81); ou que le petit quarré dans lequel le point E ſe trouve, & dans lequel toutes les anticipations qu'on peut imaginer ſont toujours renfermées, ſoit plus grand. La ſeule inſpection des figures fait voir ceci clairement.

Il ſeroit impoſſible de rendre raiſon de tout ce que nous avons dit dans le problême précédent & dans ces deux remarques, ſi on s'aviſoit de dire avec Euclide, que le point n'a point de parties & la ligne point de largeur; & ce ſont ces mauvaiſes définitions qui ont donné lieu à bien des gens d'accuſer les géometres de tomber dans des abſurdités. Nous en donnerons encore une exemple lorſque nous parlerons du cercle (*).

(*) La théorie de M. l'abbé Deidier, ſur la nature & ſur les ſections des lignes, ne ſera ſans doute pas du goût de tout le monde. Mais comme cette diſcuſſion, peut-être un peu embarraſſée & peu déciſive, eſt plus du reſſort de la métaphyſique que de la géométrie; il eſt aſſez indifférent qu'on ſoit ou qu'on ne ſoit pas de ſon avis. Ce qu'il y a de certain ſur cet objet,

C'eſt en premier lieu, qu'il eſt abſurde de dire que les lignes qui forment les ſurfaces, n'ont abſolument aucune étendue en largeur: car il eſt évident qu'un inétendu, joint tant de fois que l'on voudra à un inétendu, ne peut jamais former une étendue. Ces lignes, compoſées d'une infinité de points qui ont chacun une infiniment petite étendue en tout ſens, ont donc chacune en largeur, une infiniment petite étendue, dont on peut faire abſtraction, mais dont on ne peut leur ôter ou leur conteſter la réalité.

C'eſt en ſecond lieu, que deux lignes en ſe coupant en un point, ſe coupent en un point d'autant plus grand, que l'angle de leur inclinaiſon eſt plus petit. Par exemple, ſoient une infinité de lignes *rs*, *rs*, paralleles & contiguës, chacune d'une largeur égale & infiniment petite, coupées par une perpendiculaire *mn* & par une oblique *ab* (fig. 81.):

Il eſt clair que la ſection perpendiculaire *mn* eſt plus petite que la ſection oblique *ab*: &

138. Définition. Dans tout rectangle ABDC (*fig.* 77), le côté AC ſur lequel on conçoit qu'il s'appuie ſe nomme *baſe*; & le côté AB ou ſon égal CD, perpendiculaire ſur la baſe, ſe nomme *hauteur*. On déſigne un rectangle par les quatre lettres miſes aux quatre angles, en diſant le rectangle ABCD; ou ſimplement par les deux lettres miſes à deux angles oppoſés A, D, en diſant le rectangle AD.

Proposition XXVII.

139. *Si deux rectangles ont les baſes égales & les hauteurs auſſi, ils ſont égaux.*

Démonstration. Chaque rectangle eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur : or, la baſe de l'un eſt égale à la baſe de l'autre, & la hauteur eſt égale à la hauteur, par la ſuppoſition : donc les deux produits ou les deux rectangles ne ſauroient être différens. C.Q.F.D.

Proposition XXVIII.

140. *Si une ligne droite* AB (fig. 83, 84) *eſt diviſée en deux ou pluſieurs parties égales ou inégales; le quarré de cette ligne contient le quarré de la premiere partie; plus, deux rectangles de la premiere par la ſeconde; plus le quarré de la ſeconde; plus, deux rectangles des deux premieres par la troiſieme; plus le quarré de la troiſieme; plus deux rectangles des trois premieres par la quatrieme; plus le quarré de la quatrieme; & ainſi de ſuite, s'il y a un plus grand nombre de parties.*

Démonstration. I°. Soit la ligne AB (*fig.* 83), diviſée en deux parties AC, CD. Je fais ſon quarré AMNB (133) : je prends ſur le côté AM, perpendiculaire ſur AB, la partie AE égale à la partie AC : & par conſéquent la partie EM eſt égale à la partie reſtante CB; à cauſe de AE = AC : au point C j'éleve CS, perpendiculaire ſur AB; & au point E j'éleve ET, perpendiculaire ſur AM. Les droites AM, CS, BN étant perpendiculaires ſur AB, ſont paralleles entre elles (68); & par la même raiſon, les droites AB, ET, MN ſeront auſſi paralleles. De plus, les droites AM, CS, BN, perpendiculaires ſur AB, ſont auſſi perpendiculaires ſur les droites ET, MN,

---

que ſi la perpendiculaire & l'oblique ne coupent chaque ligne *rs*, *rs*, qu'en un ſeul point; chaque point coupé par l'oblique *ab*, doit être plus grand ou plus étendu dans le ſens de la ſection oblique, que chaque point coupé par la perpendiculaire *mn*, dans le ſens de la ſection perpendiculaire : puiſque la ſomme de tous les points coupés de part & d'autre, forme les deux lignes évidemment inégales *ab* & *mn*.

paralleles

paralleles à AB (68) : ainſi toutes ces lignes ſe coupent perpendiculairement, & leurs parties auſſi. Cela poſé,

Le petit quadrilatere AEOC, ayant ſes quatre angles droits, & les côtés AC, AE, égaux entre eux par la conſtruction, & égaux à leurs paralleles EO, OC, eſt par conſéquent le quarré de la partie AC. De même le quadrilatere SOTN eſt le quarré de l'autre partie CB. Car ſes côtés OT, SN ſont égaux chacun à la partie CB; puiſqu'ils ſont perpendiculaires entre les paralleles CS, BN : & par la même raiſon, les deux autres côtés OS, TN ſont auſſi égaux chacun à EM = CB : enfin les deux rectangles EMSO, OCBT, ayant le côté OC = OE, & le côté EM égal au côté CB, ſont égaux entre eux, & égaux chacun au produit de la partie AC par la partie CB. Donc le quarré AMNB de la droite AB diviſée en deux parties AC, CB, contient le quarré AEOC de la premiere partie AC, plus deux rectangles EMSO, COTB de la premiere partie par la ſeconde; plus le quarré OSNT de la ſeconde.

II°. De même, ſoit la ligne AB (*fig.* 84), diviſée en trois parties AC, CD, DB. Je fais ſon quarré AMNB; & des points de diviſion C, D, j'éleve ſur DB les perpendiculaires CS, DT. Je prends ſur le côté AM, la partie AE égale à la partie AC; la partie EH égale à la partie CD; & par conſéquent la troiſieme partie HM eſt égale à la troiſieme partie DB. Enfin, des points E, H, j'éleve ſur AM, les perpendiculaires EZ, HX : ainſi ces perpendiculaires coupent perpendiculairement les perpendiculaires menées ſur AC, par les raiſons que nous avons déjà dites; & toutes ces perpendiculaires forment entre elles des rectangles.

Or, le rectangle AEOC eſt le quarré de la premiere partie AC; à cauſe de AE = AC. Les deux rectangles EHVO, CORD ſont égaux entre eux, & valent chacun le produit de la partie AC par la partie CD; à cauſe du côté EO égal au côté CO ou AC, & du côté EH égal au côté CD. Le rectangle VORP eſt le quarré de CD à cauſe du côté OR = CD, & du côté OV = EH = CD. Les deux rectangles HMSV, DRZB ſont égaux chacun au produit de la partie AC par la partie DB; à cauſe des côtés égaux HM, DB, & des côtés HV, DR égaux chacun au côté AC ou AE, les rectangles VSTP, RPXZ ſont auſſi égaux entre eux & au produit de la partie CD par la partie DB; à cauſe du côté VP ou CD égal au côté PR = HE = CD & du côté SV ou MH égal au côté RZ ou DB. Enfin le rectangle PTNX eſt le quarré de DB; à cauſe du côté PX ou DB égal au côté PT ou HM.

Donc le quarré de la droite AB, diviſée en trois parties AC, CD,

DB, contient le quarré AEOC de la premiere partie ; plus deux produits HEOV, CORD, de la premiere par la ſeconde ; plus, le quarré OVPR de la ſeconde ; plus, deux rectangles HMSV, DRZB, de la premiere par la troiſieme joints à deux rectangles VSTP, RPXZ de la ſeconde par la troiſieme : ce qui fait enſemble deux rectangles des deux premieres par la troiſieme ; plus le quarré PTNX de la troiſieme, & ainſi des autres. C. Q. F. D.

141. COROLLAIRE I. *Lorſqu'une ligne* AB *eſt diviſée en deux ou pluſieurs parties ; la diagonale de ſon quarré* AMNB *coupe en deux également tous les quarrés des parties de cette ligne.* (fig. 83, 84.)

DÉMONSTRATION. La diagonale AN (*fig.* 83) coupe le quarré AMNB en deux triangles parfaitement égaux (119). Or, ces triangles étant rectangles & iſoſceles ; les deux angles ſur la baſe de chacun d'eux, doivent valoir enſemble un droit ; puiſque les trois angles de tout triangle, valent enſemble deux droits (97) : donc chaque angle ſur la baſe doit valoir enſemble un demi-droit ; & par conſéquent la diagonale AN doit couper l'angle droit MAC du quarré AMNB en deux également. Or, la diagonale AO du quarré EACO coupe auſſi le même angle droit EAD en deux également, par la même raiſon ; donc la diagonale AN tombe ſur la diagonale AO, & paſſe par le point O ; d'où il ſuit qu'elle coupe auſſi le quarré EACO en deux également. Maintenant les angles égaux EOA, AOC, ſont égaux aux angles SON, TON qui leur ſont oppoſés au ſommet (49) : donc la ligne AN coupe auſſi en deux également l'angle droit SOT du quarré SOTN ; & par conſéquent cette diagonale AN tombe ſur la diagonale ON du quarré SOTN, & le diviſe en deux également ; ainſi des autres.

142. COROLLAIRE II. *Si une ligne* AB *eſt diviſée en pluſieurs parties égales ; ſon quarré contient autant de fois le quarré de l'une de ſes parties, qu'il y a d'unités dans le quarré du nombre de parties.* (fig. 85)

DÉMONSTRATION. Suppoſons que la ligne AB ait 3 parties. Je fais ſon quarré : des points de diviſion j'éleve des perpendiculaires ſur AB : je diviſe AM en un même nombre de parties ; & des points de diviſion je mene des perpendiculaires ſur AM. Il eſt viſible par cette conſtruction que j'aurai 9 quarrés égaux au quarré AO de la premiere partie AC : or, 9 eſt le quarré du nombre 3 des parties. Donc, &c ; & ainſi des autres : & la raiſon en eſt que le quarré AMNB n'eſt autre choſe que le produit de la ligne AB = 3 par la ligne AM = 3, lequel produit eſt 9.

143. COROLLAIRE III. De-là, *il ſuit que le quarré d'une ligne*

coupée en deux également, eſt quadruple du quarré de ſa moitié: que le quarré d'une ligne coupée en trois également eſt neuf fois plus grand que le quarré de ſon tiers; &c.

Proposition XXIX.

144. *Si une ligne droite* AB *eſt diviſée en pluſieurs parties égales ou inégales* AC, CD, DB, *le produit ou rectangle de la ligne* AB *par une autre ligne* AM, *eſt égal à la ſomme des produits ou rectangles de chaque partie par la ligne* AM. (fig. 86).

Démonstration. Sur tous les points de diviſion de la ligne AB, j'éleve les perpendiculaires CS, DT; & le rectangle AMNB eſt diviſé en trois autres rectangles AMSC, CSTD, DTNB, dont le premier eſt le produit ou le rectangle de la partie AC par la droite AM; le ſecond eſt le produit ou le rectangle de la ſeconde partie CD par CS = AM; & le troiſieme eſt le produit ou le rectangle de la troiſieme partie DB par DT = AM. Or, ces trois rectangles compoſent le rectangle total: donc, &c. C. Q. F. D.

Proposition XXX.

145. *Si une ligne* AB *eſt diviſée en deux parties inégales* AC, CB; *le rectangle de la ligne* AB *par l'une de ſes parties* AC, *eſt égal au rectangle des deux parties, plus le quarré de cette partie* AC. (*fig.* 87).

Démonstration. J'éleve en A la perpendiculaire AD égal à AC; j'acheve le rectangle ADEB; & du point C j'éleve la perpendiculaire CR ſur AB. Le rectangle ADEB eſt donc le rectangle de la droite AB par ſa partie AC ou AD: le rectangle ADRC eſt le quarré de la partie AC; & le rectangle CREB eſt celui des deux parties BC, CA ou CR: or, il eſt viſible que le rectangle ADEB eſt égal au quarré ADRC, plus le rectangle CREB. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition XXXI.

146. *Si une ligne droite* AB *eſt diviſée en deux parties égales* AC, CB, *& en deux inégales* AD, DB; *le rectangle des deux inégales* AD, DB, *eſt égal au quarré de la moitié* AC *de la ligne, moins le quarré de la partie* DC *interceptée entre les points d'une diviſion* D, C. (*fig.* 88.)

Démonstration. Je fais d'une part le quarré AMNC de la moitié AC; & j'en retranche le quarré DHRC, de la partie DC: ce qui me donne un reſte AMNRHD, qui eſt une eſpece d'équerre, qu'on nomme ordinairement un *gnomon*. De l'autre côté j'éleve en D la

droite DE perpendiculaire ſur AB & égale à AD ; & achevant le rectangle DEFB, le rectangle eſt le même que celui des parties inégales AD, BD. Ainſi il s'agit de faire voir que le gnomon AMNRHD, eſt égal au rectangle DEFB ; & pour cela,

Je prolonge RH en S ; ce qui diviſe le gnomon en deux rectangles SN, SD : je prolonge auſſi NC en P ; ce qui diviſe le rectangle DEFB auſſi en deux rectangles DP, PB. Or, les rectangles SN, PB, ſont égaux : car à cauſe de CN = CA, & de CR = CD, nous aurons NR = AD = DE = CP ; c'eſt-à-dire les deux côtés NR, CP, ſont égaux, de même que les deux autres côtés MN, CB ; à cauſe de MN = AC = CB : & les deux rectangles SD, DP ſont auſſi égaux ; à cauſe de AD = DE, & de DC = DH ; donc, le gnomon eſt égal au rectangle DEFB. Ce qu'il falloit démontrer.

147. COROLLAIRE. *Donc le rectangle des parties inégales, plus le quarré de la partie interceptée* DC, *eſt égal au quarré de la moitié de la ligne.* Par la propoſition précédente, nous avons $AD \times DB = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$: donc en ajoutant $\overline{CD}^2$ de part & d'autre, nous aurons $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$.

PROPOSITION XXXII.

148. *Si à une ligne droite* AB *diviſée en deux parties égales* AC, CB, *on ajoute une autre ligne droite* AD ; *le rectangle de toute la ligne* DB *par l'ajoutée* AD, *eſt égal au quarré de la ligne* DC *compoſée de la moitié* AC *& de l'ajoutée* AD, *moins le quarré de la moitié* AC *de la ligne* AB. (*fig.* 89.)

DÉMONSTRATION. Je fais d'une part le quarré DMNC de la ligne DC, & j'en retranche le quarré AHRC de la ligne AC : ce qui donne un reſte ou gnomon DMNRHA. De l'autre part, j'éleve en D une droite DE, perpendiculaire ſur DB & égale à DA ; & achevant le rectangle DEFB ; ce rectangle eſt le même que celui de DB par DA. Ainſi il eſt queſtion de faire voir que le gnomon DMNRHA eſt égal au rectangle DEFB ; & pour cela,

Je prolonge RH en S ; ce qui diviſe le gnomon en deux rectangles SN, SA : je prolonge auſſi NC en P ; ce qui diviſe le rectangle DEFB en deux autres DP, PB. Or, à cauſe de DC = CN, & de AC = CR, nous avons NR = DA = DE ; & à cauſe du quarré DMNC, nous avons MN = NC : donc les deux rectangles SN, DP, qui ont les côtés NR, MN, égaux chacun à chacun aux côtés DC, DE, ſont égaux. De même nous avons DA = DE = CP, & AH = AC = CB ; donc les deux rectangles SA, PB qui ont les côtés DA, AH égaux

chacun à chacun aux côtés CP, CB, ſont égaux ; & par conſéquent le gnomon eſt égal au rectangle DEFB. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque. Les deux propoſitions précédentes reviennent ſouvent dans la géométrie ; & l'on fera fort bien de ſe les rendre familieres.

Proposition XXXIII.

149. *Si d'un point* O *pris ſur la diagonale* AC *d'un rectangle ou d'un parallélogramme* ABCD, *on mene des droites* RS, TV *paralleles aux côtés* AD, DC; *les parallélogrammes* RDVO, TOSB, *par leſquels la diagonale ne paſſe pas, ſont égaux.* (fig. 90, 91.)

Démonstration. La diagonale diviſe le rectangle ou le parallélogramme en deux triangles ADC, ABC parfaitement égaux (118); & les droites RS, TV, diviſent chacun de ces triangles en deux autres triangles, & un rectangle ou parallélogramme. Or, le rectangle ou parallélogramme AROT, étant auſſi diviſé en deux triangles égaux par ſa diagonale AO; le triangle ARO eſt égal au triangle ATO, & par la même raiſon, dans le rectangle ou parallélogramme OVCS, le triangle OVC eſt égal au triangle OSC. Donc ſi nous retranchons du triangle ADC, les deux triangles ARO, OVC; & du triangle ABC, les deux triangles ATO, OSC; le rectangle ou parallélogramme RDVO, qui reſtera d'une part, ſera égal au rectangle ou parallélogramme TOSB, qui reſtera de l'autre. C. Q. F. D.

CHAPITRE V.

RAISONS, PROPORTIONS, ET PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES DES LIGNES.

150. Tout eſpace compris entre deux paralleles qui ne ſont point bornées par des perpendiculaires ou des obliques, ſe nomme *eſpace parallele.*

Les eſpaces paralleles étant indéfinis & non terminés de part & d'autre ; le plus ou moins de longueur des paralleles n'augmente ni ne diminue leur grandeur, & l'on peut conſidérer ces paralleles comme infiniment prolongées.

Proposition XXXIV.

151. *Si les perpendiculaires* RP, rp, *ou les également inclinées* TS, ts, *compriſes entre deux eſpaces paralleles* ABCD, abcd; *ſont égales ; les eſpaces paralleles ſont égaux : & ſi les eſpaces paralleles*

ſont égaux, les perpendiculaires, ou les également inclinées, ſont égales. (fig. 92.)

DÉMONSTRATION. I°. Je porte l'eſpace ABCD ſur l'eſpace *abcd*, en mettant la droite indéfinie CD ſur l'indéfinie *cd*; de façon que le point P de la perpendiculaire RP, tombe ſur le point *p* de la perpendiculaire *rp*: ces deux perpendiculaires étant égales, tomberont l'une ſur l'autre. Car d'un même point *p*, on ne peut élever deux perpendiculaires ſur une même ligne (51). Ainſi la droite indéfinie AB tombera ſur la droite indéfinie *ab*; à cauſe que par un même point R, on ne peut mener deux différentes paralleles à une même ligne (68): & par conſéquent les deux eſpaces paralleles ſeront parfaitement égaux. On prouvera de la même façon, que ſi deux également inclinées TS, *ts*, ſont égales; les eſpaces paralleles ſont égaux.

II°. Si l'on prétend que les deux eſpaces étant égaux, les perpendiculaires RP, *rp*, ou les inclinées TS, *ts*, ſoient inégales; je mets l'indéfinie CD, ſur l'indéfinie *cd*; enſorte que le point P de la perpendiculaire RP, tombe ſur le point *p* de la perpendiculaire *rp*; ces deux perpendiculaires tomberont l'une ſur l'autre. Mais comme on les ſuppoſe inégales; le point R tombera au-delà de *r*, par exemple, en Q, ſi RP eſt plus grande que *rp*; ou en deçà du point *r*, par exemple, en *q*, ſi RP eſt moindre que *rp*: & dans l'un & l'autre de ces cas, la parallele AB ne tombera point ſur la parallele *ab*; puiſqu'elle paſſera ou par Q ou par *q*; & les deux eſpaces paralleles ne ſeront pas égaux; ce qui eſt contre la ſuppoſition. Donc, ſi les eſpaces paralleles ſont égaux, les perpendiculaires ſont néceſſairement égales: & on prouvera de même que les eſpaces étant égaux, les également inclinées ſont égales. C. Q. F. D.

152. COROLLAIRE. *Ce que nous venons de dire ſeroit encore vrai, ſi les également inclinées* LH, ts, *étoient inclinées en différent ſens.*

Car il n'y auroit qu'à renverſer l'eſpace ABCD ſur l'eſpace *abcd*; c'eſt-à-dire, mettre l'indéfinie AB ſur l'indéfinie *cd*; de façon que la parallele CD tombât du côté de la parallele *ab*, & que le point L de l'inclinée LH tombât ſur le point *s* de l'inclinée *ts*. Car alors ces deux inclinées ſe trouveroient inclinées du même ſens; & l'on démontreroit les mêmes choſes que ci-deſſus.

PROPOSITION XXXV.

153. *Si après avoir mené dans un eſpace parallele* ABCD *une perpendiculaire* EH, *& tant d'autres lignes inégalement inclinées qu'on voudra*, LM, NQ, TV, &c; *on diviſe la perpendiculaire, ou telle*

inclinée qu'on voudra, en deux ou pluſieurs parties égales ou inegales, & que des points de diviſion de cette ligne, on mene des paralleles aux paralleles AB, CD; *je dis que les autres lignes menées entre ces deux paralleles* AB, CD *ſeront diviſées par les paralleles menées entre deux, en même raiſon que la ligne qui aura été premierement diviſée.* (fig. 93, 94.)

DÉMONSTRATION. Suppoſons que l'inclinée LM ait été diviſée en deux parties LP, PM (*fig.* 93), qui ſoient entre elles en tel rapport qu'on voudra; & que du point de diviſion P, on ait mené la droite XPZ paralleſe aux paralleles AB, CD. Je conçois que de tous les points de la ligne LM, ſoient menées des paralleles à AB ou à CD: toutes ces paralleles diviſeront l'eſpace parallele ABCD, en autant d'autres eſpaces paralleles que la ligne LM contiendra de petites parties égales; & comme la ligne LM eſt également inclinée ſur toutes ces paralleles, puiſque les angles du même côté ſont tous égaux, & que par conſéquent toutes ſes parties égales ſont également inclinées dans leurs petits eſpaces paralleles; il s'enſuit que tous ces petits eſpaces ſont égaux entre eux (151).

Or, la perpendiculaire EH & les autres inclinées NQ, &c, ſont diviſées par les petits eſpaces paralleles égaux chacun en un même nombre de parties que la ligne LM; & à cauſe que chacune de ces lignes n'eſt pas plus inclinée dans un petit eſpace que dans un autre, toutes les parties de chacune d'elles ſont égales entre elles (151). Ainſi comme il n'y a pas plus de petits eſpaces de L en P que de E en O, & de P en M que de O en H; il s'enſuit que le nombre de parties égales de LM compriſes dans ſa partie LP, eſt au nombre des parties égales compriſes dans ſa partie PM; comme le nombre de parties égales de la perpendiculaire EH compriſes dans ſa partie EO, eſt au nombre de parties égales compriſes dans OH; c'eſt-à-dire LP. PM :: EO. OH: & partant la perpendiculaire EH eſt diviſée en O, en même raiſon que l'inclinée LM en P.

Et on prouvera de même que les autres inclinées NQ, TV, &c, ſont diviſées par XZ, en même raiſon que la droite LM: & ce ſeroit encore la même choſe ſi la ligne LP avoit été diviſée en un plus grand nombre de parties LP, PS, SM, (*fig.* 94).

154. COROLLAIRE I. *Il ſuit delà que les eſpaces paralleles inégaux, ſont entre eux comme les perpendiculaires ou comme les également inclinées entre ces paralleles; & que les perpendiculaires ou les également inclinées entre les eſpaces paralleles inégaux, ſont entre elles comme les eſpaces.* (fig. 93).

Démonstration. I°. Le nombre des petits eſpaces égaux contenus dans l'eſpace parallele ABXZ, eſt au nombre des petits eſpaces égaux contenus dans l'eſpace XZCD ; comme le nombre de parties égales contenues dans la partie EO de la perpendiculaire EH, eſt au nombre des parties égales contenues dans la partie OH: & partant l'eſpace parallele ABXZ, eſt à l'eſpace XZCD, comme la partie EO de la perpendiculaire eſt à la partie OH, ou comme la partie LP de l'oblique LM, eſt à la partie PM de cette même oblique; c'eſt-à-dire que ces deux eſpaces ABXZ, XZCD ſont entre eux comme leurs perpendiculaires LO, OH, ou comme leur également inclinées LP, PM.

II°. De même, puiſque la perpendiculaire EO contient autant de parties égales que l'eſpace parallele ABXZ contient de petits eſpaces paralleles égaux ; & que la perpendiculaire OH contient autant de ces mêmes parties égales que l'eſpace XZCD contient de mêmes petits eſpaces égaux ; il s'enſuit que la perpendiculaire EO eſt à la perpendiculaire OH, comme l'eſpace parallele ABXZ eſt à l'eſpace XZCD ; & la même choſe doit ſe dire des également inclinées LP, PM.

155. Corollaire II. *De ce que nous avons trouvé* (153), LP. PM :: EO. OH; *nous pouvons dire en compoſant*, LP+PM. PM :: EO + OH. OH; *ou* LM. PM :: EH. OH. (*fig.* 93).

Démonstration. Il eſt clair que le nombre de parties égales contenues dans LM, eſt au nombre de parties égales contenues dans ſa partie PM; comme le nombre de parties égales contenues dans EH, eſt au nombre de parties égales contenues dans OH: puiſque le nombre de parties contenues dans LM, eſt égal au nombre de parties contenues dans EH. Il eſt clair de même que le nombre de parties contenues dans MP, eſt égal au nombre de parties contenues dans HO: & on prouvera de la même façon que LM. PL :: EH. OE.

D'où l'on tire cette regle générale ; que ſi *deux ou pluſieurs lignes* LM, EH, *ſont diviſées chacune en deux parties qui ſoient en proportion ; chaque partie de l'une eſt à toute ſa ligne ; comme la partie ſemblable de l'autre, eſt à toute ſa ligne :* & cette regle s'étend auſſi à deux ou pluſieurs lignes LM, EH (*fig.* 94), qui ſeroient diviſées en un plus grand nombre de parties proportionnelles entre elles : ce qui ſe démontre toujours de la même façon.

156. Corollaire III. Par un raiſonnement ſemblable à celui que nous venons de faire dans le corollaire précédent, on prouvera aiſément que *ſi deux lignes* LM, EH (fig. 93) *ſont diviſées en deux parties*

parties proportionnelles, en ſorte qu'on dit LP, PM : : EO, OH, *on peut faire ſur ces quatre termes tous les changemens dont nous avons parlé dans le premier livre touchant les proportions* (279, 280, &c); & il y aura toujours proportion.

Ainſi on a le plaiſir de voir que les vérités mathématiques ſe prouvent par différens principes, dont les uns ajoutent de la clarté aux autres.

157. COROLLAIRE IV. *Si pluſieurs lignes droites* LM, EH, &c, *compriſes entre deux paralleles* AB, CD, *ſont coupées en deux ou pluſieurs parties proportionnelles entre elles; les lignes droites menées par les points de diviſion de ces lignes, ſont paralleles aux paralleles* AB, CD. (fig. 93, 94).

DÉMONSTRATION. Les droites LM, EH (*fig.* 93) ſont diviſées proportionnellement aux points P, O. Si l'on veut que la droite menée du point O au point P, ne ſoit pas parallele aux droites AB, CD; la parallele menée du point O coupera donc LM, ou en-deſſous de P comme en R, ou en-deſſus comme en S. Suppoſons que cette parallele coupe en R : donc, à cauſe de OR parallele aux paralleles AB, CD; nous aurons EO, OH : : LR, RM (153). Or par la ſuppoſition, nous avons auſſi EO, OH : : LP, PM : ainſi les deux raiſons LR, RM, & LP, PM, étant chacune égale à la raiſon, EO, OH, ſeront égales entre elles : donc nous aurons LR, RM : : LP, PM; ce qui eſt impoſſible. Car l'antécédent LR, eſt plus grand par rapport à ſon conſéquent RM; que l'antécédent LP, par rapport à ſon conſéquent PM.

De même ſi la parallele menée du point O coupoit LM en S; nous aurions EO, OH : : LS, SM (153); & par la ſuppoſition, nous aurions auſſi EO, OH : : LP, MP : donc LS, SM : : LM, MP; ce qui eſt encore impoſſible : puiſque LS eſt moindre par rapport à ſon conſéquent SM, que LP par rapport à ſon conſéquent MP : donc il faut néceſſairement que la parallele menée du point O paſſe par le point M.

Et on prouvera de même que ſi les droites LM, EH (*fig.* 94), ſont diviſées en plus de deux parties proportionnelles entre elles; les droites OP, RS qui joignent leurs points de diviſion ſont paralleles aux paralleles AB, CD.

PROPOSITION XXXVI.

158. *Si les côtés* BA, BC *d'un triangle* ABC, *ſont coupés par une ou pluſieurs lignes* MN, &c, *paralleles à la baſe; ces côtés ſont coupés proportionnellement; & ſi les côtés ſont coupés proportionnellement, les lignes qui les coupent ſont paralleles à la baſe.* (fig. 95).

DÉMONSTRATION. Par le ſommet B, je mene la droite RS parallele à la baſe : ce qui me donne un eſpace parallele RSAC, dans lequel les côtés AB, BC ſont des inclinées. Or ſi les lignes MN, &c, qui coupent ces inclinées, ſont paralleles à la baſe AC ou RS; on démontrera comme ci-deſſus (153), que les inclinées AB, BC, ſont coupées en même raiſon : & ſi les inclinées AB, BC, ſont coupées en même raiſon ; on prouvera auſſi comme ci-deſſus (157), que les droites MN, &c, qui paſſent par leurs points de diviſion, ſont paralleles à AC ou RS. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

159. *Si deux triangles* ABC, abc, *ont les trois angles* A, B, C *égaux aux trois angles* a, b, c, *chacun à chacun; les côtés oppoſés aux mêmes angles ſont proportionnels* (fig. 96).

DÉMONSTRATION. Je mene des angles B, *b*, les droites MN, *mn*, paralleles aux côtés oppoſés AC, *ac* : ce qui me donne deux eſpaces paralleles MNAC, *mnac*, dans leſquels les côtés AB, *ab*, ſont également inclinés, à cauſe de l'angle A égal à l'angle *a*; de même que les côtés BC, *bc*, à cauſe de l'angle B égal à l'angle *b*. Ainſi le côté AB eſt au côté *ab*, comme l'eſpace MNAC, eſt à l'eſpace *mnac* (154); & le côté BC, eſt au côté *bc*, comme le même eſpace parallele MNAC, eſt à l'eſpace parallele *mnac*. Donc la raiſon des côtés AB, *ab*, eſt égale à la raiſon des côtés BC, *bc* : puiſque l'une & l'autre eſt égale à la raiſon des eſpaces ; & partant AB, *ab* : : BC, *bc*.

Je mene de même du ſommet des angles égaux C, *c*, les droites RS, *rs*, paralleles aux côtés oppoſés AB, *ab* : & à cauſe des angles A, B, égaux aux angles *a*, *b*, chacun à chacun, les côtés AC, *ac*, & BC, *bc*, ſont également inclinés dans les eſpaces paralleles ABRS, *abrs*. Ainſi nous avons AC. *ac* : : ABRS. *abrs*; & BC. *bc* : : ABRS. *abrs* (154); & partant AC. *ac* : : BC. *bc*. Mais nous avons trouvé AB. *ab* : : BC. *bc* : donc AC. *ac* : : AB. *ab*; c'eſt-à-dire, les côtés du triangle ABC ſont proportionnels à ceux du triangle *abc*. C. Q. F. D.

160. COROLLAIRE. *Si deux triangles* ABC, abc, *ont des côtés proportionnels; les angles oppoſés aux côtés proportionnels ſont égaux.* (fig. 96.)

DÉMONSTRATION. Je fais en A avec le côté AC, un angle CAX égal à l'angle *a*; & en C, un angle ACX égal à l'angle *c*; & par conſéquent le troiſieme angle AXC du triangle AXC, eſt égal au troiſieme angle *b* du triangle *abc* (97); & ces deux triangles AXC, *abc*, ont les côtés proportionnels (159). Nous avons donc *ac*. *ab*

:: AC . AX. Mais par la ſuppoſition, nous avons auſſi *ac* . *ab* :: AC . AB : donc AC . AX :: AC . AB ; ou en alternant, AC . AC :: AX . AB : & par conſéquent, à cauſe de AC = AC, nous avons le côté AX du triangle AXC, égal au côté AB du triangle ACB.

De même dans les triangles *abc*, AXC ; nous avons *ac* . *cb* :: AC . CX : & par la ſuppoſition, nous avons auſſi *ac* . *cb* :: AC . CB : donc AC . CX :: AC . CB ; & partant à cauſe de AC = AC, le côté CX du triangle ACX eſt égal au côté CB du triangle ABC. Ainſi les deux triangles AXC, ABC, ayant le côté AC commun, & les deux autres côtés égaux aux deux autres côtés, chacun à chacun, ſont parfaitement égaux (100) ; & les trois angles de l'un ſont égaux chacun à chacun aux trois angles de l'autre. Mais les trois angles du triangle AXC ont été faits égaux aux trois angles du triangle *abc* : donc les trois angles du triangle *abc*, ſont égaux aux trois angles du triangle ABC.

PROPOSITION XXXVIII.

161. *Si deux côtés* AB, BC *d'un triangle* ABC, *ſont proportionnels aux côtés* ab, bc, *d'un autre triangle* abc ; *& que l'angle* B *compris par les deux premiers ſoit égal à l'angle* b *compris par les deux autres ; les trois côtés du triangle* ABC, *ſont proportionnels aux trois côtés du triangle* abc. (fig. 97.)

DÉMONSTRATION. Je prends ſur le côté *ab* du plus grand triangle *abc*, une partie *bm* égale au côté AB de l'autre triangle ; & du point *m*, je mene *mn* parallele à la baſe *ac*. Les deux triangles *abc*, *mbn*, ont les trois angles égaux : car l'angle *b* eſt commun ; & à cauſe des paralleles *ac*, *mn*, les angles du même côté *bac*, *bmn*, ſont égaux (71), de même que les angles *bca*, *bnm* : donc ces triangles ont les côtés proportionnels (159) ; & nous avons *ab* . *bc* :: *bm* . *bn*.

Mais par la ſuppoſition, nous avons auſſi *ab* . *bc* :: AB . BC : donc *bm* . *bn* :: AB . BC ; ou en alternant *bm* . AB :: *bn* . BC. Mais *bm* eſt égal à AB par la conſtruction : donc *bn* = BC, & les deux triangles *mbc*, ABC, ſont parfaitement égaux (100) ; à cauſe de l'angle B, égal à l'angle *b*, & des côtés qui comprennent l'angle B, égaux aux côtés qui comprennent l'angle *b*. Ainſi puiſque les triangles *mbn*, *abc*, ont les trois angles égaux chacun à chacun ; les triangles ABC, *abc*, auront auſſi les trois angles égaux chacun à chacun ; & partant leurs côtés ſeront proportionnels (159). C. Q. F. D.

162. DÉFINITION. Deux ou pluſieurs figures ſont dites *ſemblables*, lorſqu'elles ont les angles égaux chacun à chacun, & que les côtés oppoſés aux angles égaux ſont proportionnels.

163. REMARQUE. Dans les triangles, il ſuffit de connoître que les

trois angles ſont égaux aux trois angles chacun à chacun, ou que les côtés ſont proportionnels, pour pouvoir dire qu'ils ſont ſemblables : car l'une de ces conditions entraîne néceſſairement l'autre avec elle (159, 160). Il faut dire la même choſe de tous les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, & qui par conſéquent ſont compoſés d'un même nombre de triangles ſemblables.

Mais à l'égard des autres figures, ce n'eſt pas la même choſe. Tous les rectangles ont les quatre angles droits, & par conſéquent égaux ; & cependant tous les rectangles n'ont pas les côtés proportionnels. Suppoſons par exemple (*fig.* 98), que les deux rectangles ABCD, *abcd*, aient les côtés proportionnels, c'eſt-à-dire qu'on ait AB. AD :: *ab* . *ad*. Je n'ai qu'à diminuer ou augmenter le côté *ab* du rectangle *abcd*, & dès-lors les côtés ne ſeront plus proportionnels. Car ſi je prolonge *ab* en *e*, ce qui donnera le rectangle *aefd* ; nous n'aurons plus AB. AD :: *ae* . *ad* : puiſqu'il s'enſuivroit que *ab* . *ad* :: *ae* . *ad* ; & que par conſéquent *ab* ſeroit égal à *ae*, à cauſe de *ad*=*ad*, ce qui eſt impoſſible.

De même les côtés d'un parallélogramme peuvent être proportionnels aux côtés d'un rectangle ; & cependant les angles du parallélogramme ne ſeront pas égaux aux angles du rectangle, &c : c'eſt pourquoi afin de ne pas équivoquer ſur le terme de figures ſemblables, il faut toujours dire que les angles doivent être égaux chacun à chacun, & que les côtés oppoſés aux angles égaux ſont proportionnels.

PROPOSITION XXXIX.

164. *Les figures ſemblables peuvent toujours ſe diviſer en un même nombre de triangles ſemblables.* (fig. 99.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux pentagones irréguliers ABCDE, *abcde*, ſemblables entre eux. Des angles égaux B, *b*, je mene des droites à tous les angles où j'en puis mener : ce qui diviſe chacun de ces polygones en trois triangles. Or les deux triangles BAE, *bae*, ayant l'angle A égal à l'angle *a*, & les côtés AB, AE proportionnels aux côtés *ab*, *ae*, par la ſuppoſition ; ſont ſemblables entre eux (161) : donc l'angle AEB eſt égal à l'angle *aeb* ; & comme l'angle AED eſt égal à l'angle *aed*, par la ſuppoſition, l'angle BED eſt auſſi égal à l'angle *bed*. Or dans les triangles ſemblables ABE, *abe*, les droites BE, *be*, ſont proportionnelles aux côtés AE, *ae* ; & ceux-ci ſont proportionnels aux côtés ED, *ed* : donc les droites BE, *be*, ſont auſſi proportionnelles aux côtés ED, *ed* ; & par conſéquent, à cauſe de l'angle BED compris par les droites BE, ED, égal à l'angle *bed* compris par les droites *be*, *ed* ; les triangles BED, *bed* ſont auſſi ſemblables ; & continuant le même raiſonnement, on prouvera que les deux autres triangles BCD, *bcd*, ſont ſemblables. Donc les

figures ſemblables peuvent ſe diviſer en un même nombre de triangles ſemblables. C. Q. F. D.

PROPOSITION XL.

165. *Les contours des figures ſemblables ſont entre eux comme leurs côtés homologues, ou comme leurs rayons, ou comme leurs apothêmes, ſi ces figures ont des rayons & des apothêmes, ou comme les lignes ſemblablement poſées; c'eſt-à-dire qui ſont menées ou des angles égaux, ou par des points qui coupent les côtés homologues en même raiſon, & qui ſont des angles égaux tournés du même côté.* (fig. 100.)

DÉMONSTRATION. I°. Soient les deux exagones réguliers ABCDEF, *abcdef*, diviſés l'un & l'autre en leurs ſix triangles égaux & ſemblables. A cauſe de l'égalité des angles, les ſix côtés du premier étant égaux entre eux, de même que les ſix côtés du ſecond; il eſt clair que la raiſon du côté AB au côté *ab*, eſt la même que celle du côté BC au côté *bc*, & ainſi de ſuite: donc les ſix côtés du premier pris enſemble, c'eſt-à-dire, 6AB, contiendront autant de fois les ſix côtés du ſecond pris enſemble ou 6*ab*; que AB contient *ab*. Or les ſix côtés du premier forment ſon contour, & les ſix côtés du ſecond forment le contour du ſecond; donc le contour du premier eſt au contour du ſecond, comme le côté homologue AB, eſt au côté homologue *ab*.

Mais dans les triangles ſemblables AOB, *aob*, nous avons AB. *ab* :: AO. *ao*: donc puiſque les contours ſont entre eux comme les côtés AB, *ab*, ils ſont auſſi comme les rayons AO, *ao*.

II°. Je mene les apothêmes OR, *or*, qui coupent les baſes BA, *ba* des triangles iſoſceles AOB, *aob* en deux également (107): & à cauſe que les baſes BA, *ba*, ſont proportionnelles aux rayons OA, *oa*; leurs moitiés RA, *ra*, ſont auſſi proportionnelles aux mêmes rayons; & partant, à cauſe de l'angle compris RAO égal à l'angle compris *rao*, les triangles RAO, *rao*, ont tous leurs côtés proportionnels (161): donc AO. *ao* :: OR. *or*. Mais les contours ſont entre eux comme les rayons AO, *ao*: donc ils ſont auſſi comme les apothêmes OR, *or*.

III°. Je prends ſur les côtés AF, *af*, les parties AH, *ah* égales, par exemple, chacune au tiers de ces lignes; & des points H, *h*, je mene des droites HS, *hs*, qui ſont des angles égaux avec les lignes AF, *af*, & du même côté: ces lignes HS, *hs*, ſont donc ſemblablement poſées. Or les triangles HSF, *hsf*, ayant les deux angles ſur HF, égaux chacun à chacun aux deux angles ſur *hf*, le troiſieme eſt par conſéquent égal au troiſieme (97); & les deux triangles ſont

ſemblables : donc HF . *hf* :: HS . *hs*. Mais les droites HF , *hf*, étant les deux tiers des côtés AF, *af*, ſont proportionnelles à ces côtés : donc les côtés AF, *af*, ſont entre eux comme les ſemblablement poſés HS, *hs* ; & par conſéquent les contours étant entre eux comme les côtés AF, *af*, ſont auſſi comme les ſemblablement poſés HS, *hs*.

IV°. Puiſque les triangles HSF, *hsf*, ſont ſemblables ; nous avons SF. *sf* :: HF. *hf*. Or HF. *hf* :: AF. *af* ; & AF. *af* :: OF. *of* : donc OF. *of* :: SF. *sf* ; ou en alternant, OF. SF :: *of*. *sf*. Donc en diviſant, nous aurons OF — SF. OF :: *of* — *fs*. *of* ; c'eſt-à-dire, OS. OF :: *os*. *of* ; ou OS. *os* :: OF. *of*.

Maintenant ſi je prolonge les droites HS, *hs*, en T, *t* ; les angles OST, *ost*, ſeront égaux, à cauſe que leurs oppoſés au ſommet ſont égaux ; & comme les angles SOT, *sot*, ſont auſſi égaux ; le troiſieme OTS, ſera égal au troiſieme *ots*, & les deux triangles OST, *ost*, ſeront ſemblables : ce qui donne ST. *st* :: SO. *so*. Or SO. *so* :: OF. *of* ; & les contours ſont entre eux comme les rayons OF, *of* : donc ils ſont auſſi comme les ſemblablement poſées ST, *st*.

V°. Et on prouvera par des ſemblables raiſonnemens que les droites ST, *st*, étant prolongées en V & *u* ; les contours ſeront entre eux, comme les ſemblablement poſées TV, *tu* ; & comme les trois lignes HS, ST, TV, ſont à chacune des trois lignes *hs*, *st*, *tu*, dans la raiſon des contours ; on prouvera auſſi que les trois enſemble HS, ST, TV, c'eſt-à-dire la ligne HV ; ſont aux trois enſemble *hs*, *st*, *tu*, c'eſt-à-dire à la ligne *hu*, ſemblablement poſée, dans la raiſon des contours.

Et les mêmes choſes ſe démontreront dans les figures ſemblables irrégulieres. (*fig* 99), puiſqu'on peut toujours les diviſer en un même nombre de triangles ſemblables (164). C. Q. F. D.

166. DÉFINITION. Les contours ou les circuits des figures ſemblables régulieres ou irrégulieres, ſe nomment *périmetres*.

PROPOSITION XLI.

167. *Si l'on diviſe en deux également l'un des angles* B *d'un triangle* ABC, *par une droite* BE *qui coupe le côté oppoſé* AC ; *les ſegmens* AE, EC *du côté* AC, *ſont entre eux comme les côtés* AB, BC. (fig. 101.)

DÉMONSTRATION. Des angles A, C, je mene des droites RS, MN, paralleles à BE : ce qui me donne deux eſpaces paralleles RSEB, MNEB. Or par la conſtruction, les angles ABE, CBE, étant égaux ; les côtés AB, BC, ſont également inclinés entre ces deux eſpaces : & par conſéquent ces deux côtés ſont entre eux comme leurs eſpaces. De même, à cauſe de l'angle CEX, égal à ſon oppoſé au ſommet

AEB; les ſegmens AE, EC, ſont également inclinés dans leurs eſpaces, & ſont entreux comme ces mêmes eſpaces : donc la raiſon des côtés AB, BC, eſt la même que celle des ſegmens AE, BC; l'une & l'autre étant la même que la raiſon des eſpaces; & partant AE. EC :: AB. BC : ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLII.

168. *Si du ſommet de l'angle droit* ABC *d'un triangle rectangle* ABC, *on abbaiſſe ſur l'hypothénuſe* AC, *une perpendiculaire* BR; *le triangle ſera diviſé en deux autres triangles rectangles* ABR, RBC, *ſemblables entre eux & au triangle* ABC (fig. 102.)

DÉMONSTRATION. Les triangles ABC, ABR, ont l'angle droit ABC, égal à l'angle droit ARB; & l'angle aigu A eſt commun à tous les deux : donc le troiſieme eſt égal au troiſieme (98); & les deux triangles ſont ſemblables (162). Par la même raiſon, les triangles ABC, BRC, qui ont l'angle C commun, & l'angle droit égal à l'angle droit, ſont ſemblables entre eux. D'où il ſuit que les deux triangles ARB, BRC, ſont ſemblables : puiſqu'ils ne peuvent être ſemblables au triangle ABC, ſans avoir chacun les trois angles égaux aux trois angles de ce triangle, & partant égaux entre eux. C. Q. F. D.

169. COROLLAIRE I. *La perpendiculaire* BR, *abbaiſſée du ſommet de l'angle droit ſur l'hypothénuſe* AC, *eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens* AR, RC *de l'hypothenuſe* (fig 102.)

DÉMONSTRATION. Les triangles ABR, BRC, ſont ſemblables (168); & partant les côtés oppoſés aux angles égaux ſont proportionnels. Or à cauſe que les triangles ABR, ABC, ſont auſſi ſemblables (168); & que l'angle aigu A eſt commun à tous les deux, l'autre angle aigu ABR du triangle ABR, doit être égal à l'autre angle aigu ACB : & comme cet angle ACB, appartient au triangle rectangle BRC, ſemblable au triangle ABR; il s'enſuit que l'angle aigu A du triangle ABR, eſt égal à l'angle aigu CBR du triangle CBR. Nous avons donc dans ces deux triangles ABR, BRC, cette proportion : le côté AR du triangle ABR oppoſé à l'angle ABR, eſt au côté RB du même triangle oppoſé à l'angle A; comme le côté RB du triangle RBC oppoſé à l'angle C qui eſt égal à l'angle ABR, eſt au côté RC de ce même triangle oppoſé à l'angle RBC, égal à l'angle A. Ainſi AR. RB :: RB, RC; & par conſéquent RB eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens AR, RC de l'hypothénuſe.

170. COROLLAIRE II. *La perpendiculaire* BR *étant menée du ſommet de l'angle droit ſur l'hypothénuſe ; chaque côté* AB, BC, *du triangle rectangle* ABC, *eſt moyen proportionnel entre l'hypothénuſe & le ſegment de l'hypothénuſe qui ſe trouve de ſon côté.* (fig. 102.)

DÉMONSTRATION. Les triangles ABR, ABC, ſont ſemblables, (168), & nous venons de voir que l'angle ABR eſt égal à l'angle C. Donc les côtés AR, AB du triangle ARB, ſont proportionnels aux côtés AB, AC, du triangle ABC : car il eſt aiſé de voir que ces côtés ſont oppoſés à des angles égaux. Ainſi nous avons AR, AB :: AB, AC ; c'eſt-à-dire le côté AB, eſt moyen proportionnel entre le ſegment AR de l'hypothénuſe qui ſe trouve de ſon côté, & l'hypothénuſe entiere AC.

De même les triangles BRC, ABC, ſont ſemblables (168) ; & l'angle RBC eſt égal à l'angle A : donc les côtés RC, BC, du triangle RBC, ſont proportionnels aux côtés BC, AC, du triangle ABC. Ainſi RC, BC :: BC, AC : le côté BC eſt moyen proportionnel entre le ſegment RC, & l'hypothénuſe AC.

171. COROLLAIRE III. *Dans tout triangle rectangle* ABC, *le quarré de l'hypothénuſe eſt égal aux quarrés des deux autres côtés pris enſemble.* (fig. 103).

DÉMONSTRATION. Du ſommet B de l'angle droit, j'abaiſſe la perpendiculaire BR ſur l'hypothénuſe ; & par le Corollaire précédent, j'ai AR, AB :: AB, AC ; & faiſant le produit des extrêmes, & le quarré de la moyenne ; j'ai $AR \times AC = \overline{AB}^2$. Ainſi élevant en A une perpendiculaire AP = AC, & achevant le rectangle APQR ; ce rectangle eſt égal au quarré BMNA du côté AB. Or, par le même corollaire précédent, j'ai RC. CB :: CB. AC : donc $RC \times AC = \overline{CB}^2$. C'eſt pourquoi élevant en C la perpendiculaire CS = AC, & achevant le rectangle CSQR ; ce rectangle eſt égal au quarré CBTV du côté CB. Donc les deux rectangles APQR, CSQR, pris enſemble, ſont égaux aux deux quarrés BMNA, CBTV. Mais les deux rectangles pris enſemble forment le quarré APSC de l'hypothénuſe AC ; puiſque les côtés AR, RC, pris enſemble font l'hypothénuſe AC, & que AP eſt égal à AC, par la conſtruction : donc le quarré de l'hypothénuſe eſt égal aux quarrés des deux autres côtés pris enſemble.

172. PROBLÊME. *Les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle rectangle étant connus ; connoître la perpendiculaire* BR, *abaiſſée de l'angle droit ſur l'hypothénuſe, & les ſegmens* AR, RC. (*fig.* 103.)

SOLUTION.

Solution. Nous avons $AR \times AC = \overline{AB}^2$ (170.) : diviſant donc de part & d'autre par AC, nous aurons $AR = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$; c'eſt-à-dire, ſi l'on fait le quarré de la valeur du côté AB, & qu'on la diviſe par la valeur de l'hypothénuſe ; le quotient ſera le ſegment AR : & retranchant la valeur de ce ſegment de la valeur de l'hypothénuſe, le reſte ſera l'autre ſegment RC.

Maintenant, puiſque le triangle ARB eſt rectangle, & que le côté AB eſt ſon hypothénuſe ; nous aurons $\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RB}^2$: donc en retranchant $\overline{AR}^2$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{AB}^2 - \overline{AR}^2 = \overline{RB}^2$; c'eſt-à-dire, que ſi du quarré du côté connu AB, on retranche le quarré du ſegment AR, qu'on peut connoître, comme on vient de voir ; le reſte ſera le quarré de la perpendiculaire : & la racine quarrée de ce reſte, ſera la valeur de la perpendiculaire.

Proposition XLIII.

173. *Dans tout triangle* ABC, *le quarré du côté* AC *oppoſé à un angle aigu* B, *eſt égal à la ſomme des quarrés des autres côtés* AB, BC, *moins deux rectangles faits de l'un des côtés* BC, *par ſa partie* BO *coupée du côté de* B *par la perpendiculaire* AO, *menée de l'angle oppoſé* A. (*fig.* 104.)

Démonstration. Je fais le quarré ADEC, du côté AC ; le quarré ABRS, de AB ; le quarré CBTV, de CB ; & le quarré COZX, de CO. Je prolonge OZ en L, & XZ en F. Ainſi comme le quarré de BC contient le quarré de ſa partie OC, plus le quarré de ſa partie BO, plus deux rectangles égaux des deux parties (140) ; ces deux rectangles égaux ſont OBFZ, ZLVX : & ajoutant au premier le quarré FTLZ de la partie BO, & au ſecond un quarré HIVX, égal au même quarré de BO ; les deux rectangles BOTL, ZLIH, ſeront égaux : & ſeront deux produits de BO par BT ou BC. Cela poſé,

Dans le triangle rectangle AOC, nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$. Or le quarré du côté BC ſurpaſſe le quarré $\overline{CO}^2$, de tout le gnomon BTVXZO : & comme dans le triangle rectangle ABO, le quarré du côté AB qui eſt l'hypothénuſe de ce triangle rectangle, eſt égal au quarré $\overline{AO}^2$, plus le quarré $\overline{BO}^2$, & que par conſéquent le quarré $\overline{AB}^2$ ſurpaſſe le quarré $\overline{AO}^2$ de la valeur de $\overline{BO}^2$, c'eſt-à-dire du petit quarré XVIH ; il s'enſuit que les quarrés de BC, AB, ſurpaſſent les quarrés $\overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$, c'eſt-à-dire le quarré $\overline{AC}^2$, de la valeur du gnomon

BTVXZO, plus celle du petit quarré VIHX, & par conſéquent de la valeur des deux rectangles OBTL, ZLIH, ou de deux produits de la partie BO par BT ou BC. Donc $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} - 2BO \times BC$. Ce qu'il falloit démontrer.

174. PROBLÊME. *Connoiſſant les trois côtés d'un triangle, dans lequel la perpendiculaire* AO *menée de l'un des angles* A *ſur le côté oppoſé* BC, *tombe en dedans du triangle; connoître la perpendiculaire, & les ſegmens* BO, OC *du côté* BC. (fig. 104.)

SOLUTION. Puiſque la perpendiculaire AO tombe au-dedans du triangle, les angles ABO, ACO, que les côtés AB, AC font avec le côté BC, ſont aigus : car la perpendiculaire tombe toujours du côté des moindres angles que font les obliques (83). Ainſi le côté AC étant oppoſé à un angle aigu B, nous aurons $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} - 2BO \times BC$; & ajoutant de part & d'autre $2BO \times BC$, puis retranchant $\overline{AC}$, nous aurons $2BO \times BC = \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}$: & diviſant tout par BC, nous aurons $2OB = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}}{BC}$; c'eſt-à-dire, que ſi de la ſomme des quarrés des côtés AB, BC, on retranche le quarré du côté AC, & qu'on diviſe le reſte par le côté BC, le quotient ſera le double du ſegment BO, & la moitié du quotient ſera le ſegment BO. C'eſt pourquoi, ſi du côté BC, on retranche le ſegment BO, le reſte ſera la valeur de l'autre ſegment OC.

Et comme dans le triangle rectangle ABO, nous avons $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{BO}$ (172); & qu'en retranchant $\overline{BO}$ de part & d'autre, nous avons $\overline{AB} - \overline{BO} = \overline{AO}$; il s'enſuit que ſi du quarré du côté connu AB, on retranche le quarré du ſegment BO, qu'on peut connoître, comme on vient de voir; le reſte ſera le quarré de la perpendiculaire AO; & la racine de ce reſte, ſera la valeur de AO.

PROPOSITION XLIV.

175. *Dans tout triangle obtus-angle* ABC; *le quarré du côté* AC *oppoſé à l'angle obtus* ABC, *eſt égal aux quarrés des côtés* AB, BC, *plus deux rectangles du côté* BC, *ſur lequel tombe la perpendiculaire menée de l'angle oppoſé* A *par le prolongement* BO *de ce côté juſqu'à la perpendiculaire.* (fig. 105.)

DÉMONSTRATION. Je fais le quarré ADEC, le quarré AORS de la perpendiculaire AO, le quarré COZX de OC, & le quarré CBTV de CB. Je prolonge les droites BT, VT, en L, F : & comme le

quarré de OC contient le quarré de ſa partie BC, plus le quarré de l'autre partie OB, plus deux rectangles égaux des deux parties (140); ces deux rectangles égaux ſont BOFT, TLXV, & chacun d'eux eſt le produit de OB par BC. Cela poſé,

Le triangle AOC étant rectangle, nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$. Or le quarré de OC vaut le quarré du côté BC, plus tout le gnomon BOZXVT: & comme dans le triangle rectangle AOB, dont AB eſt l'hypothénuſe, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$; & qu'en retranchant $\overline{OB}^2$ de part & d'autre, nous avons $\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$; il s'enſuit que le quarré $\overline{AC}^2$, ou les deux quarrés enſemble $\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$, valent le quarré $\overline{BC}^2$, plus le gnomon BOZXVT, plus le quarré $\overline{AB}^2$, moins le quarré $\overline{OB}^2$; c'eſt-à-dire moins le quarré TFZL. Mais le gnomon BOZXVT, moins le quarré TFZL, n'eſt autre choſe que les deu rectangles BOFT, TLXV qui valent 2 OB × BC: donc $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2OB \times BC$. Ce qu'il falloit démontrer.

176. Problême I. *Les trois côtés d'un triangle obtus-angle* ABC *étant connus; connoître la perpendiculaire menée de l'un des angles aigus* C, *ſur le côté oppoſé* BC, *& le prolongement de ce côté ſur la perpendiculaire.* (fig. 105).

Solution. Nous avons $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2OB \times BC$ (175): retranchant donc de part & d'autre les quarrés $\overline{CB}^2$, $\overline{AB}^2$, nous aurons $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2 = 2OB \times BC$; & diviſant de part & d'autre par CB, nous aurons $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2}{CB} = 2OB$: c'eſt-à-dire que ſi de la valeur du quarré $\overline{AC}^2$, on retranche les valeurs des quarrés $\overline{CB}^2$, $\overline{AB}^2$, & qu'on diviſe le reſte par la valeur du côté BC; le quotient ſera le double du prolongement OB: ainſi la moitié de ce quotient ſera la valeur du prolongement.

Et comme dans le triangle rectangle ABO, nous avons $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$; ſi on retranche de part & d'autre $\overline{OB}^2$, on aura $\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AO}^2$. Ainſi retranchant de la valeur du quarré $\overline{AB}^2$, le quarré du prolongement OB, qu'on peut connoître, comme il vient d'être dit; le reſte ſera le quarré de la perpendiculaire AO, & la racine de ce reſte ſera la valeur de la perpendiculaire.

177. Problême II. *Une droite* AB *étant diviſée en tant de parties*

qu'on voudra, égales ou inégales ; diviſer une autre ligne donnée AD *en même raiſon que la ligne* AB. (fig. 106, 107).

SOLUTION. Je fais à l'extrêmité A de la droite AB, un angle à volonté DAB, dont je fais le côté AD égal à l'autre ligne donnée AD: je joints les extrêmités des côtés AB, AD, par la droite BD; & des points de diviſion, je mene des paralleles à BD, leſquelles coupent la droite AD en même raiſon que AB. Car menant par A une droite RS parallele à BD; les droites AB, AD, compriſes dans l'eſpace parallele RSBD, ſont coupées en même raiſon par les droites MC, &c, paralleles aux paralleles RS, BD (153.)

178. COROLLAIRE. *Si une ligne* AD *eſt coupée en parties proportionnelles aux parties d'une autre ligne* AB; *cette ligne* AD *ne peut pas être coupée du même côté, en d'autres parties qui ſoient en même raiſon.* (106, 107.)

DÉMONSTRATION. Suppoſons que AD (*fig.* 106) ſoit coupée en C, en deux parties proportionnelles aux deux parties AM, MB de la droite AB. Si on veut que cette ligne AD puiſſe être coupée du même côté en deux autres parties qui ſoient encore dans la même raiſon; le point de diviſion ſera ou entre A & C, comme le point H; ou en-delà de C, comme le point T. Or, dans le premier cas, il eſt viſible que la partie AH plus petite que AC, ſera plus petite par rapport à la partie reſtante HD plus grande que CD, que la partie AC par rapport à la partie reſtante CD; & que par conſéquent il ne ſera pas vrai de dire: AH, HD :: AC, CD. De même dans le ſecond cas, la partie AT plus grande que AC, ſera plus grande par rapport à la partie TD moindre que CD, que AC n'eſt grand par rapport à CD; & il ne ſera pas vrai non plus de dire AT, TD :: AC, CD. Donc AD ne peut pas être coupé du même côté en deux autres parties qui ſoient dans la raiſon des parties AC, CD.

Mais on pourroit fort bien diviſer AD de l'autre côté en deux parties qui ſeroient dans la raiſon des parties AC, CD. Car je n'ai qu'à prendre une partie DV égale à AC, & dès-lors l'autre partie AV ſera égale à CD; & nous aurons DV, VA :: AC, CD.

Et on prouvera les mêmes choſes ſi la ligne AD étoit diviſée en un plus grand nombre de parties.

179. PROBLÊME III. *Trouver une troiſieme proportionnelle à deux lignes données* AC, AB. (fig. 108).

SOLUTION. Je fais un angle à volonté DAE : je porte ſur le côté AE, la premiere des lignes données, de A en C : je porte la ſeconde ſur l'autre côté, de A en B; & je joints les points C, B, par la droite

CB. Je porte auſſi ſur le premier côté AE, la ſeconde ligne donnée, de A en E; & du point E, menant la droite ED parallele à CB, & qui coupe le côté AD en D; la droite AD eſt la troiſieme proportionnelle.

Car les triangles ACB, AED, ayant l'angle A commun; les angles ACB, AED égaux, à cauſe qu'ils ſont faits du même côté par les paralleles BC, DE (71), & les angles ABC, ADE égaux auſſi, par la même raiſon, ſont ſemblables. Donc AC, AB :: AE, AD. Mais AB = AE, par la conſtruction : donc AC, AB :: AB, AD; & par conſéquent AD eſt la troiſieme proportionnelle.

180. PROBLÊME IV. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes données* AB, AC, AD (fig. 109).

SOLUTION. Je fais un angle quelconque DAE : je porte ſur le premier côté DA, la premiere des lignes données AB, de A en B; & ſur le ſecond EA, la ſeconde ligne AC de A en C. Je joints les points B, C, par la droite BC; & portant la troiſieme ligne donnée AD ſur le premier côté DA, de A en D; je mene par le point D la droite DE parallele à BC, & qui coupe l'autre côté en E; la droite AE eſt la quatrieme proportionnelle.

Car les triangles ABC, ADE, étant ſemblables, à cauſe des paralleles CB, DE; nous avons AB, AC :: AD, CE.

181. PROBLÊME V. *Les deux premieres lignes d'une progreſſion géométrique de lignes étant données; continuer cette progreſſion tant qu'on voudra.*

SOLUTION. Nommons les deux lignes données *a*, *b*. Je cherche une troiſieme proportionnelle à ces deux lignes, & je la nomme *c* : ainſi *c* eſt le troiſieme terme de la progreſſion. Je cherche une troiſieme proportionnelle aux deux lignes *b*, *c*, & la nommant *d*, elle ſera le quatrieme terme de la progreſſion : car par la conſtruction, nous aurons, *a*. *b* :: *b*. *c*; & *b*. *c* :: *c*. *d*: donc *a*. *b* :: *b*. *c* :: *c*. *d*; ou :: *a*. *b*. *c*. *d*; & continuant de la même façon, on trouvera tant de termes de la progreſſion qu'on voudra.

Quant à la maniere de trouver la ſomme d'une progreſſion géométrique de lignes, elle eſt la même que celle que nous avons enſeignée dans le premier livre, en parlant des progreſſions géométriques.

182. PROBLÊME VI. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* AB, BC (fig. 110).

SOLUTION. Je mets la petite ſur la grande de B en C : je prolonge

la grande du côté de B, en faiſant BH égal à AC. Du point A pris pour centre, & d'un rayon égal à AB, je décris un arc PR: du point H pris pour centre, & d'un rayon égal à HC, je décris un arc ST qui coupe l'arc PR en O; d'où je mene aux points C, B, les droites OC, OB; & chacune de ces droites eſt la moyenne proportionnelle demandée: ce que je prouve ainſi,

Par la conſtruction, nous avons AC = HB: ajoutant donc de part & d'autre la partie CB, nous aurons AB = HC. Ainſi les arcs PR, TS, ayant été décrits avec les rayons égaux AB, HC, qui pris enſemble ſont plus grands que AH; ces deux rayons ſe couperont hors de la ligne AH en un ſeul point O du côté de O (59); & ce point ſera également éloigné des extrêmités A, H de la ligne AH. C'eſt pourquoi ſi du point O on abaiſſoit une perpendiculaire ſur AH; cette perpendiculaire couperoit AH en deux parties égales, à cauſe des obliques égales ou rayons OA, OH (54), c'eſt-à-dire, ſur le milieu Q de la partie CB, à cauſe de AC = BH: ce qui fait que AC + ½ CB = BH + ½ CB. Ainſi les points C, B des obliques OC, OB, étant également éloignés du point Q de la perpendiculaire; ces deux obliques ſont égales (53), & le triangle OCB eſt iſoſcele.

Or, ABO eſt auſſi iſoſcele: puiſque AB eſt égal à AO, & que l'un des angles ABO ſur la baſe BO, eſt égal à l'un des angles OBC ſur la baſe CB du triangle iſoſcele OCB: donc le ſecond angle ſur la baſe du triangle ABO, eſt égal au ſecond angle ſur la baſe du triangle OBC; & par conſéquent le troiſieme angle eſt égal au troiſieme (97); & les deux triangles ABO, OBC, ſont ſemblables. Comparant donc les côtés oppoſés aux mêmes angles, nous trouverons que les deux côtés AB, BO, du triangle ABO, ſont proportionnels aux deux côtés OB, BC, du triangle OBC; c'eſt-à-dire AB, BO :: BO, BC: & par conſéquent BO eſt moyenne proportionnelle entre les deux données AB, BC.

On trouvera dans le chapitre qui traite du cercle, une autre maniere de chercher une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

LIGNES RÉCIPROQUEMENT PROPORTIONNELLES.

183. DÉFINITION. On dit que deux lignes *a*, *b* ſont *réciproques* à deux lignes *c*, *d*; lorſque l'une des deux premieres *a* eſt à l'une des deux dernieres *c*, réciproquement comme l'autre des deux dernieres *d*, eſt à l'autre des deux premieres *b*; ou ce qui revient au même, lorſque le produit des deux premieres eſt égal au produit des deux dernieres; puiſque ſi nous avons *a*. *c* :: *d*. *b*; on aura auſſi *ab* =

cd, en faiſant le produit des extrêmes & des moyens.

On dit auſſi qu'une ligne eſt coupée en deux parties *réciproques* aux parties d'une autre ligne, lorſque le produit des parties de la premiere ligne eſt égal au produit des parties de l'autre ; ou, ce qui revient au même, lorſque l'une des parties de la premiere ligne, eſt à l'une des parties de la ſeconde ligne réciproquement, comme l'autre partie de la ſeconde ligne eſt à l'autre partie de la premiere.

PROPOSITION XLV.

184. *Si deux rectangles* ABCD, abcd, *ſont égaux, ſans avoir ni les baſes* AB, ab, *ni les hauteurs* AD, ad, *égales ; les hauteurs* AD, ad *ſont réciproques aux baſes* AB, ab. (fig. 111.)

DÉMONSTRATION. Le rectangle ABCD eſt égal au produit AD × AB de ſa baſe par ſa hauteur ; & le rectangle *abcd* eſt égal au produit *ad* × *ab* : donc à cauſe de l'égalité des rectangles, nous avons AD × AB = *ad* × *ab* ; & tirant de-là une proportion, comme il a été dit dans le premier livre au ſujet des proportions géométriques, nous aurons AD . *ad* :: *ab* . AB ; c'eſt-à-dire, les hauteurs AD, *ad*, ſont réciproques aux baſes AB, *ab*. Ce qu'il falloit démontrer.

185. COROLLAIRE. *On peut dire auſſi que dans deux rectangles égaux, la hauteur* AD *& la baſe* AB *du premier, ſont réciproques à la hauteur* ad *& à la baſe* ab *du ſecond ; puiſqu'on a* AD × AB = ad × ab, *comme il eſt requis* (183). C'eſt une ſuite évidente & de la définition & de la propoſition précédentes.

PROPOSITION XLVI.

186. *Le plus grand rectangle qu'on puiſſe faire de deux parties qui compoſent une ligne, eſt celui que l'on fait lorſque ces deux parties ſont égales entre elles.* (fig. 112.)

DÉMONSTRATION. Soit la ligne CD diviſée en deux également en O : le rectangle de la partie DO par la partie OC, eſt égal au quarré de la moitié DO. Or, ſi l'on coupe la même ligne en deux inégalement en E ; le rectangle des parties inégales DE, EC, eſt égal au quarré de la moitié DO, moins le quarré de la partie interceptée EO (146) : donc le rectangle des deux parties DE, EC, inégales, eſt moindre que le rectangle des parties DO, OC : & comme cela arrivera toujours en quelque point qu'on veuille couper la droite DC en deux parties inégales ; il s'enſuit que le rectangle des parties égales DO, OC, eſt le plus grand qu'on puiſſe faire de deux parties qui compoſent DC. Ce qu'il falloit démontrer.

187. PROBLÊME VII. *Couper une droite* AB *en deux parties réciproques aux deux parties* DE, EC, *qui compoſent une autre ligne* DC. (fig. 112.)

SOLUTION. Je prends une moyenne proportionnelle entre les deux parties DE, EC de la droite DC : j'éleve ſur l'extrêmité B de la droite BA, une perpendiculaire BH que je fais égale à la moyenne proportionnelle. Du point H pris pour centre, & avec un rayon égal à la moitié ZB de la ligne BA, je décris un arc : il peut arriver ou que cet arc coupe la droite BA en un point S ; ou qu'il la touche en B ſans la couper ; ou qu'il ne la touche ni ne la coupe. Si l'arc coupe la droite AB en S, je porte la partie BS ſur ZB de Z en X ; & les parties BX, XA, de la droite BA, ſont les réciproques demandées. Si l'arc touche ſimplement la droite BA ; les deux réciproques demandées ſeront les deux moitiés ZB, ZA, de la droite BA. Si l'arc ne touche ni ne coupe la droite BA ; le problême eſt impoſſible. Prouvons tous ces cas.

I°. Si l'arc coupe BA en S ; je mene le rayon HS, qui par la conſtruction eſt égal à BZ : le triangle HBS étant rectangle, nous avons $\overline{HB}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{SH}^2$ (171) : donc en retranchant $\overline{BS}^2$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{HB}^2 = \overline{SH}^2 - \overline{BS}^2$. Or, SH = BZ, & BS = ZX : donc $\overline{SH}^2 = \overline{BZ}^2$, & $\overline{BS}^2 = \overline{ZX}^2$; & partant $\overline{HB}^2 = \overline{SH}^2 - \overline{BS}^2 = \overline{BZ}^2 - \overline{ZX}^2$. Mais la ligne AB étant diviſée en deux également en Z, & en deux inégalement en X ; nous avons $BX \times XA = \overline{BZ}^2 - \overline{ZX}^2$ (146) : donc $BX \times XA = \overline{HB}^2$. Or, HB étant moyenne proportionnelle entre les parties DE, EC, de la droite DC ; ſon quarré $\overline{BH}^2$ eſt égal au produit DE × EC des extrêmes : donc BX × XA = DE × EC ; & par conſéquent les parties BX, XA de la droite BA, ſont réciproques aux parties DE, EC de la droite DC. (183.)

II°. Si l'arc touche la ligne BA, il faut qu'il la touche en B ; c'eſt-à-dire que ſon rayon HS ſoit égal à la perpendiculaire HB. Car s'il étoit plus grand ; il eſt clair que lorſque ce rayon en tournant autour de H ſeroit parvenu à la poſition HS, ſon extrêmité S tomberoit au-delà de B, par exemple, en S ; & que par conſéquent l'arc couperoit la ligne AB au lieu de la toucher : donc, puiſque dans ce ſecond cas le rayon eſt égal à la perpendiculaire ; le quarré du rayon eſt auſſi égal au quarré de la perpendiculaire BH. Or, le rayon eſt égal à BZ & le quarré de BZ eſt égal au rectangle BZ × ZA : donc BZ × ZA = $\overline{HB}^2$ = DE × EC ; & par conſéquent les deux moitiés de la ligne AB

AB ſont réciproques aux parties DE, EC de la ligne DC.

III°. Enfin ſi l'arc ne coupe ni ne touche BA, ſon rayon eſt par conſéquent plus petit que HB; & ſon quarré $\overline{BZ}^2$, ou le rectangle BZ × ZA, eſt plus petit que le quarré HB ou que le rectangle DE × EC. Mais le rectangle BZ × ZA eſt le plus grand de tous les rectangles qu'on peut faire en coupant BA en deux parties, & faiſant leur rectangle (186): donc on ne peut pas couper BA en deux parties dont le produit ſoit égal au produit DE × EC; & le problême eſt impoſſible.

188. COROLLAIRE. *Si une ligne* BA *eſt coupée en deux parties* BX, XA, *réciproques aux deux parties* DE, EC; *on ne peut pas la couper en un autre point du même côté par rapport au milieu* Z, *en deux autres parties réciproques à* CE, EC. (*fig.* 113.)

DÉMONSTRATION. Le point auquel on voudroit couper cette ligne, ſeroit, ou entre B & X, comme le point M; ou entre X & le centre Z, comme le point *m*.

Dans le premier cas, nous aurons $BM \times MA = \overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2$; à cauſe de AB coupée en deux également en Z, & en deux inégalement en M: donc, ſi l'on ſuppoſe que les parties BM, MA, ſoient réciproques aux deux DE, EC; nous aurons $BM \times MA$ ou $\overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2 = DE \times EC$. Or, on ſuppoſe auſſi $BX \times XA = DE \times EC$; & $BX \times XA = \overline{BZ}^2 - \overline{XZ}^2$ (146): donc $\overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2 = \overline{BZ}^2 - \overline{XZ}^2$: ce qui eſt impoſſible. Car le quarré $\overline{MZ}^2$, qu'on retranche du quarré de BZ, eſt plus grand que le quarré $\overline{XZ}^2$ qu'on retranche du même quarré de BZ; & par conſéquent les reſtes $\overline{BZ}^2 - \overline{MZ}^2$, & $\overline{BZ}^2 - \overline{XZ}^2$ ne ſauroient être égaux.

On prouvera de même que dans le ſecond cas, le rectangle $Bm \times mA$ n'eſt point égal au rectangle BX × XA, ni par conſéquent au rectangle DE × EC.

Mais ſi l'on prenoit le point de diviſion au-delà de Z; la choſe ne ſeroit plus impoſſible: prenant ſur AZ, une partie AV égale à BX; l'autre partie VB ſeroit égale à XA; & par conſéquent on auroit AV × VB = DE × EC.

LIGNES DIVISÉES EN MOYENNE ET EXTRÊME RAISON.

189. DÉFINITION. Si une ligne droite eſt coupée en deux parties inégales, de façon que la petite ſoit à la grande, comme la grande eſt à toute la ligne; on dit que cette ligne eſt diviſée en *moyenne & extrême raiſon*: la grande ſe nomme la *médiane*.

190. PROBLÊME VIII. *Diviſer une ligne donnée* AB, *en moyenne & extrême raiſon.* (fig. 114.)

SOLUTION. Je fais le quarré ABDE de la ligne donnée; & du milieu C de AB, je mene à l'un des angles oppoſés D, la droite CD. Je prolonge AB en H; & faiſant CH = CD, je porte BH ſur BD, de B en R: & la droite BD, égale à la droite donnée AB, eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon; & la partie BR eſt ſa médiane; ce que je démontre ainſi.

Dans le triangle rectangle CDB, nous avons $\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2$ (171); & à cauſe que la ligne AB eſt diviſée en deux également en C, & que BH lui eſt ajoutée, nous avons $AH \times BH = \overline{CH}^2 - \overline{BC}^2$ (148); ou $AH \times BH + \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2$, en ajoutant $\overline{BC}^2$ de part & d'autre. Or, CH = CD, par la conſtruction: donc $\overline{CH}^2 = \overline{CD}^2$; & par conſéquent $\overline{DB}^2 + \overline{CB}^2 = AH \times BH + \overline{CB}^2$: & retranchant $\overline{CB}^2$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{DB}^2 = AH \times BH$: c'eſt-à-dire qu'en faiſant le rectangle AHMN, de AH par BH, ce rectangle eſt égal au quarré ABDE; donc, retranchant le rectangle commun ABRN, nous aurons le rectangle NRDE égal au quarré BRMH, ou $DR \times DE = \overline{RB}^2$. Mais DE = DB, par la conſtruction: donc $DR \times DB = \overline{RB}^2$; & par conſéquent DR . RB :: RB . DB.

191. COROLLAIRE I. *Une ligne* DB *ou* AB *étant diviſée en moyenne & extrême raiſon; ſi on lui ajoute la médiane* RB *ou* BH, *on aura une ligne entiere* AH *qui ſera encore diviſée en moyenne & extrême raiſon, & dont la médiane ſera la ligne* AB. (fig. 114.)

DÉMONSTRATION. Par la propoſition précédente, le quarré ABCDE eſt égal au rectangle AHMN; c'eſt-à-dire $\overline{AB}^2 = AH \times BH$: donc HB . AB :: AB . AH.

192. COROLLAIRE II. *Une ligne* AH *étant diviſée en moyenne & extrême raiſon; ſi on porte la petite partie* BH *ſur ſa médiane* AB *ou* BD *de* B *en* R; *cette médiane ſera diviſée en* R, *en moyenne & extrême raiſon:* ce qui a été démontré ci-deſſus. (190.)

193. COROLLAIRE III. *Une ligne* AH *étant diviſée en moyenne & extrême raiſon, ſi à ſa petite partie* BH *on ajoute la moitié* CB *de la médiane; le quarré de la ſomme* CH *eſt égal à cinq quarrés de la moitié* CB. (fig. 114.)

DÉMONSTRATION. Par la conſtruction que nous avons faite (190),

la droite CD est égale à CH, & par conséquent $\overline{CD}^2 = \overline{CH}^2$. Or, à cause du triangle rectangle CBD, nous avons $\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2$; & parce que DB est double de CB, nous avons $\overline{DB}^2 = 4\overline{CB}^2$ (143): donc $\overline{CD}^2 = 4\overline{CB}^2 + \overline{CB}^2 = 5\overline{CB}^2$; & par conséquent $\overline{CH}^2 = 5\overline{CB}^2$.

194. Corollaire IV. *Si une ligne* AH *est divisée en moyenne & extrême raison; la petite ligne, la médiane, & la ligne entiere, sont incommensurables entre elles.* (fig. 114.)

Démonstration. I°. Par le corollaire précédent $\overline{CH}^2 = 5\overline{CB}^2$: donc $\overline{CH}^2 . \overline{CB}^2 :: 5 . 1$; & tirant la racine quarrée de tous les termes, CH . CB :: $\sqrt{5}$. 1 : donc en divisant, CH — CB . CB :: $\sqrt{5} - 1$. 1; c'est-à-dire BH . CB :: $\sqrt{5} - 1$. 1: & doublant les conséquens, BH . AB :: $\sqrt{5} - 1$. 2. Mais le terme $\sqrt{5} - 1$ est incommensurable au terme 2; puisqu'on ne peut pas exprimer leur rapport: donc le rapport de la petite ligne BH à la médiane AB, est inexprimable; & ces deux lignes sont incommensurables.

II°. Puisque BH . AB :: $\sqrt{5} - 1$. 2; donc, en composant, nous aurons BH + AB. AB :: $\sqrt{5} - 1 + 2$. 2; ou AH. AB :: $\sqrt{5} + 1$. 2. Mais les deux derniers termes sont incommensurables: donc les deux premiers AH, AB, c'est-à-dire la ligne entiere & la médiane, sont incommensurables.

III°. De même, puisque BH . AB :: $\sqrt{5} - 1$. 2; donc, en composant d'une autre façon, nous aurons BH . BH + AB :: $\sqrt{5} - 1$. $\sqrt{5} - 1 + 2$; ou BH . AH :: $\sqrt{5} - 1$. $\sqrt{5} + 1$. Mais les deux derniers termes sont incommensurables: donc la petite BH & la ligne AH le sont aussi.

195. Corollaire V. *Si deux lignes* AH, BD *sont divisées chacune en moyenne & extrême raison, leurs parties sont proportionelles.* (fig. 114.)

Démonstration. Nous avons vu par le corollaire précédent, que la petite partie BH est à la médiane AB, comme $\sqrt{5} - 1$, est à 2; & cela est à l'égard de toutes les lignes divisées en moyenne & extrême raison: donc dans la ligne BD, nous aurons aussi DR. RB :: $\sqrt{5} - 1$. 2: par conséquent BH . AB :: DR . RB.

196. Problème IX. *Deux lignes droites égales* AB, BC, *étant données; trouver la base qu'il faut leur donner pour construire un triangle isoscele* ABC, *dont chaque angle de la base soit double de l'angle* B *du sommet,* (fig. 115.)

Solution. Je coupe l'une des droites données AB en moyenne & extrême raiſon ; & prenant une droite AC égale à ſa médiane BR, je décris avec AC & les deux droites menées AB, BC, un triangle ABC, qui eſt le triangle demandé.

Pour le prouver, je mene la droite RC ; & à cauſe que AB eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, j'ai AR . RB :: RB . AB (189). Mais RB = AC : donc AR . AC :: AC . AB. Ainſi les deux côtés AR, AC, du triangle ACR, ſont proportionnels aux deux côtés AC, AB, du triangle ABC : & comme l'angle compris A eſt le même dans l'un & dans l'autre ; les deux triangles ACR, ABC, ſont ſemblables (161) ; & par conſéquent le triangle ACR eſt iſoſcele, de même que le triangle ABC : ce qui rend auſſi iſoſcele le triangle RCB ; puiſque AC = CR = RB. Or l'angle ARC externe au triangle RCB, vaut les deux internes oppoſés B, BCR (97), ou le double de l'angle B ; à cauſe que les deux angles B & BCR du triangle iſoſcele RCB ſont égaux ; & l'angle ARC eſt égal à l'angle RAC, puiſque le triangle ACR eſt iſoſcele : donc, dans le triangle iſoſcele ABC, l'angle A ſur la baſe, eſt double de l'angle B au ſommet.

197. Problême X. *Une ligne* AC *étant donnée ; conſtruire ſur cette ligne un triangle iſoſcele, dont chaque angle ſur la baſe ſoit double de l'angle au ſommet.* (fig. 116.)

Solution. Je diviſe la droite AC en moyenne & extrême raiſon en S : j'ajoute la médiane AS à la ligne AC, de A en N ; & avec la droite AC, & deux autres droites AB, BC, égales chacune à la droite CN, je conſtruis un triangle iſoſcele qui eſt le triangle demandé.

Car, puiſque la droite AN eſt égale à la médiane de AC diviſée en moyenne & extrême raiſon ; la droite CN eſt auſſi diviſée en moyenne & extrême raiſon en A (191), & ſa médiane eſt AC. Or, AB = CN, par la conſtruction : donc ſi nous coupons AB en moyenne & extrême raiſon en R, ſa médiane BR ſera égale à la médiane AC. Ainſi nous avons un triangle iſoſcele ABC, dont la baſe AC eſt la médiane de l'un de ſes côtés ; & par conſéquent nous démontrerons comme dans le problême précédent, que chaque angle ſur la baſe, eſt double de l'angle du ſommet.

198. Corollaire I. *Dans tout triangle iſoſcele* ABC (fig. 115, 116), *dont chaque angle de la baſe eſt double de celui du ſommet ; ſi l'on coupe l'un des angles de la baſe en deux également, par une droite* CR *qui coupe le côté oppoſé en* R ; *ce côté ſera coupé en moyenne-*

& extrême raiſon. C'eſt une ſuite évidente de ce qui a été dit ci-deſſus. (196.)

199. COROLLAIRE. II. *Dans tout triangle* ABC, *dont chaque angle de la baſe eſt double de celui du ſommet, l'angle du ſommet eſt de* 36 *dégrés ; & chaque angle ſur la baſe eſt de* 72 *degrés.* (fig. 115, 116.)

DÉMONSTRATION. Je diviſe chaque angle de la baſe en deux également : ainſi les trois angles du triangle valent enſemble cinq angles égaux à celui du ſommet. Or, les trois angles du triangle, valent enſemble deux droits ou 180 degrés (97) : donc les cinq angles égaux valent auſſi 180 degrés ; & par conſéquent chacun d'eux en vaut 36 qui eſt le cinquieme de 180. L'angle du ſommet vaut donc 36, & chaque angle de la baſe vaut 72 : puiſqu'il eſt double de l'angle du ſommet.

PROPOSITION XLVII.

200. *Si pluſieurs paralleles* AB, CD, EH, &c, *ſont coupées par pluſieurs lignes* AH, MN, RS, BE, &c, *qui ſe coupent en un même point ; ces paralleles ſont coupées en même raiſon.* (fig. 117.)

DÉMONSTRATION. I°. Comparons d'abord les paralleles AB, CD, qui ſont du même côté par rapport au point O : les triangles AOM, COT, ſont ſemblables ; à cauſe de l'angle AOM commun, des angles OAM, OCT, faits par les paralleles avec AO, égaux entre eux ; & des angles OMA, OTC, égaux pour la même raiſon : ainſi nous avons AM. CT :: OM. OT. Or les triangles MOR, TOV, étant auſſi ſemblables, donnent MR. TV :: OM. OT : donc AM. CT :: MR. TV. Mais les mêmes triangles MOR, TOV, donnent MR. TV :: OR. OV ; & à cauſe des triangles ſemblables ROB, VOD, nous avons RB. VD :: OR. OV : donc MR. TV :: RB. VD. Ainſi la raiſon des parties AM, CT, des paralleles AB, CD, étant égale à la raiſon des parties MR, TV ; il s'enſuit que les paralleles AB, CD, ſont coupées en même raiſon.

II°. Maintenant, comparons les paralleles AB, EH, qui ſont de différens côtés par rapport au point O. Les triangles AOM, HON, ſont ſemblables ; à cauſe de l'angle AOM, égal à l'angle HON qui lui eſt oppoſé au ſommet ; de l'angle OAM, égal à ſon alterne OHN ; & de l'angle OMA, égal à ſon alterne ONH : donc AM. NH :: MO. NO. Or les triangles MOR, SON, étant ſemblables, par les mêmes raiſons, donnent MR. SN :: MO. NO : donc AM. NH :: MR. SN. Mais les mêmes triangles MOR, SON, donnent auſſi MR. SN :: RO. SO ; & à cauſe des triangles ſemblables ROB, SOE, nous avons

RB. SE :: RO. SO : donc MR. SN :: RB. SE. Ainſi la raiſon des parties AM, HN, des paralleles AB, EH, étant égale à la raiſon des parties MR, SM; & celle-ci égale à celle des parties RB, SE; il eſt clair que les deux paralleles AB, EH, ſont coupées en même raiſon; & ainſi des autres.

201. PROBLÊME XI. *Couper une ligne droite donnée* AB, *en tant de parties égales que l'on voudra.* (fig. 118.)

SOLUTION. I°. Je prends une droite indéfinie NX, ſur laquelle je porte avec une ouverture de compas à diſcrétion, autant de parties égales qu'on en demande pour la ligne AB, par exemple quatre, NR, RS, ST, TX. Je fais ſur XN un triangle équilatéral NVX; & du point V, je mene des droites aux points de diviſion R, S, T. Cela fait, je prends avec le compas la grandeur de la ligne AB, & je la porte ſur les deux côtés VX, VN, prolongés, s'il le faut, de V en H, & de V en L. Je joins les points H, L, par la droite HL; & prolongeant, s'il eſt néceſſaire, les droites VR, VS, VT, juſqu'à ce qu'elles coupent la droite HL; cette ligne HL eſt égale à la droite donnée, & elle eſt diviſée au nombre de parties requis.

Car à cauſe des baſes paralleles XN, HL, les triangles VXN, VHL, ſont ſemblables. Or le triangle VXN eſt équilatéral: donc le triangle VHL l'eſt auſſi; & par conſéquent HL = HV. Mais VH eſt égal à AB, par la conſtruction: donc HL eſt auſſi égal à AB. Or, par la propoſition précédente, les droites XN, HL, paralleles entre les lignes qui partent du même point V, ſont diviſées en même raiſon; & XN a été diviſée en quatre parties égales; donc HL eſt auſſi diviſée en 4 parties égales.

Cette pratique eſt fort ingénieuſe: mais elle a l'inconvénient qu'après avoir diviſé HL en parties égales, il faut porter ces parties ſur la droite AB, ce qui eſt quelquefois embarraſſant, ſur-tout lorſque les parties égales ſont fort petites. C'eſt pourquoi j'aimerois mieux me ſervir de la pratique ſuivante.

II°. Soit donc la ligne AB (119), qu'on propoſe de diviſer en quatre parties égales. Je fais en A un angle à volonté BAX; & du point B, je mene une parallele au côté AX. Je prends une ouverture de compas à diſcrétion, & je la porte quatre fois ſur le côté indéfini AX, de A en M, de M en N, &c. Je porte la même ouverture auſſi quatre fois ſur la parallele indéfinie BZ, de B en S, de S en T, &c. Je joints les points de diviſion des lignes AC, BD, par des droites CB, RS, NT, MV, AD; & ces lignes coupent la droite AS en quatre parties égales.

Car AB étant inclinée entre les paralleles AC, BD; les angles al-

ternes BAC, ABD, ſont égaux. Or les côtés AC, AB, du triangle CAB, ſont égaux chacun à chacun aux côtés BD, BA, du triangle ABD : donc à cauſe des angles compris égaux, ces deux triangles ſont parfaitement égaux (100); & l'angle ABC eſt égal à l'angle BAD. Mais ces angles ſont alternes entre les droites BC, AD : donc ces droites ſont paralleles entre elles (73). Or, les droites AC, BD, inclinées dans l'eſpace parallele BCAD, ſont coupées proportionnellement : donc les lignes RS, NT, MV, qui les coupent, ſont paralleles aux paralleles BC, AD (157) : & par conſéquent les mêmes lignes RS, NT, &c, coupent en même raiſon l'inclinée AB (153), c'eſt-à-dire, en quatre parties égales.

LIGNES COUPÉES HARMONIQUEMENT.

202. DÉFINITION. Si une ligne droite AB eſt coupée en trois parties AC, CD, DB; de ſorte que la premiere AC ſoit à la ſeconde CD, comme toute la ligne AB eſt à la troiſieme DB; cette ligne eſt dite être coupée *harmoniquement, ou en trois parties harmoniquement.* (fig. 120.)

Et il faut obſerver que quand une ligne eſt ainſi coupée, on a auſſi cette proportion : la troiſieme partie DB, eſt à la ſeconde CD, comme la ligne entiere eſt à la premiere AC. Car par la définition, nous avons AC. CD :: AB. DB : donc en faiſant le produit des extrêmes & des moyens, nous aurons AC×DB = CD×AB; d'où l'on tire cette proportion, DB. CD :: AB. AC. Ainſi l'on peut dire que *quand une ligne eſt diviſée harmoniquement en trois parties; chaque extrême, eſt à la partie du milieu, comme la ligne entiere eſt à l'autre extrême.*

203. COROLLAIRE. *Quand une ligne* AB *eſt diviſée harmoniquement; la partie du milieu* CD *eſt toujours moindre que chacune des extrêmes* AC, DB. (*fig.* 120.)

Car puiſque AC. CD :: AB. DB, & que AB eſt plus grand que DB; AC doit être auſſi plus grand que CD. De même, puiſque nous avons DB. CD :: AB. AC, & que AB eſt plus grand que AC; DB doit être auſſi plus grand que CD.

204. PROBLÊME XII. *Diviſer une ligne droite* AB *en trois parties harmoniquement.* (fig. 120.)

SOLUTION. Je prends hors de la ligne AB & de ſes prolongemens, un point quelconque R, d'où je mene aux extrémités A, B, les droites RA, RB. Je coupe l'une & l'autre de ces droites, en un point

quelconque P ; & de ce point, je mene ſur AB, la droite PD parallele à l'autre ligne RA. Je prolonge PD en-delà de D, faiſant DS = PD : du point S, je mene au point R, la droite SR qui coupe la droite AB en C ; & la ligne AB eſt coupée harmoniquement aux points C, D : ce que je prouve ainſi.

A cauſe des paralleles AR, SP, qui font les angles alternes égaux, & de l'angle ACR égal à l'angle SCD qui lui eſt oppoſé au ſommet ; les triangles ACR, SCD, ſont ſemblables : donc AC. CD :: AR. SD. Or les triangles ARB, DPB, étant ſemblables, à cauſe des baſes AR, DP paralleles, donnent AB. DB :: AR. DP ; ou AB. DB :: AR. SD ; puiſque DP = SD, par la conſtruction : donc AC. CD :: AB. DB ; & partant la ligne AB eſt diviſée harmoniquement.

205. COROLLAIRE. I. *Quand on propoſe de diviſer une ligne harmoniquement ſans déterminer aucune de ſes parties ; le problême eſt indéterminé & ſuſceptible d'une infinité de ſolutions.* (fig. 120.)

DÉMONSTRATION. Par le problême précédent, le point R peut être pris où l'on voudra, le point P peut être pris à diſcrétion ſur l'une ou l'autre des lignes RA, RB : or, tout cela peut varier d'une infinité de façons, & donner ſur la ligne AB une infinité de points C, D : Donc, &c.

206. COROLLAIRE II. *Mais ſi la ligne* AB *eſt déterminée, & quelqu'une de ſes parties ; ou ſi deux de ſes parties ſont connues, & que la ligne entiere ſoit inconnue ; tout eſt déterminé, & le problême ne peut avoir qu'une ſolution.* (fig. 120.)

DÉMONSTRATION. I°. Si la ligne AB eſt connue, & l'une ou l'autre de ſes extrêmes auſſi, par exemple, la partie AC ; & qu'il s'agiſſe de trouver le point D, auquel le reſte CB de la ligne doit être coupé ; nous ſavons qu'il faut avoir AC. CD :: AB. DB ; ou en alternant AC. AB :: CD. DB : c'eſt pourquoi il n'eſt queſtion que de couper CB en deux parties CD, DB, proportionnelles à la partie AC, & à la ligne entiere AB. Or, AB ne peut pas être coupée du même côté, en deux autres parties proportionnelles à AC, AB (178) : donc le problême ne peut avoir qu'une ſolution.

II°. Si la ligne AB eſt connue, & qu'on diſe que la partie du milieu eſt égale à une ligne donnée ; nous ſavons que nous devons avoir AC. CD :: AB. DB : ce qui donne AC × DB = CD × AB. Ainſi les deux extrêmes, que nous ne connoiſſons pas en particulier, doivent être réciproques à la ligne entiere AB, & à ſa partie CD (183) dont nous connoiſſons la valeur. C'eſt pourquoi, retranchant

de

de la ligne AB, la valeur de ſa partie, le reſte ſera la ſomme des deux extrêmes AC, DB: & ajoutant à la ligne AB, une droite AM égale à la valeur de la partie du milieu; la ſomme ſera celle de la ligne entiere & de ſa partie CD. Diviſant donc la ſomme des extrêmes AC+DB, en deux parties réciproques aux deux parties de la ſomme MB; ces deux parties ſeront les valeurs des extrêmes: & comme la ligne égale à la ſomme AC+DB, ne peut être coupée de deux façons différentes en deux telles parties réciproques, enſorte que les parties d'une ſeconde diviſion qu'on voudroit faire, fuſſent différentes des deux parties de la premiere diviſion (188); il s'enſuit que le problême n'a qu'une ſolution.

III°. Si les deux parties de ſuite MC, CD, ſont connues, & qu'on demande de trouver toute la ligne; nous ſavons que nous devons avoir AC. CD :: AB. BD : donc en diviſant, nous aurons AC — CD. CD :: AB — DB. DB; c'eſt-à-dire, AC — CD. CD :: AD. DB : & par conſéquent il ne ſera queſtion que de chercher une quatrieme proportionnelle à la différence AC — CD, des lignes connues AC, CD; à la ligne CD; & à la ſomme AD des deux lignes: & comme on ne peut prendre deux quatriemes proportionnelles différentes, à trois grandeurs déterminées, le problême eſt déterminé.

IV°. Enfin, ſi les deux extrêmes AC, BD (*fig.* 121) ſont données, & qu'on demande la partie du milieu; nous ſavons par le cas précédent, que les deux extrêmes doivent être réciproques à la partie du milieu, & à la ligne entiere : c'eſt-à-dire que le produit AC × BD, doit être égal au produit de la partie du milieu par la ligne entiere (183). Ainſi je mene une ligne MR égale à la ſomme des extrêmes : faiſant MN = AC, & NR = BD, & diviſant MR en deux également en O, j'ai MN × NR = $\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$ (146). Il ne s'agit donc plus que d'ajouter à la ligne MR une ligne MV, telle que le rectangle de l'ajoutée MV par la ligne entiere VR, ſoit égal au rectangle MN × NR; & de faire voir enſuite que cette ajoutée eſt la partie du milieu, & qu'il ne peut y en avoir d'autre. Or nous ſavons que nous devons avoir VM × VR = $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2$ (148): donc il faut que nous ayons auſſi $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2 = MN \times NR$; & partant $\overline{VO}^2 - \overline{MO}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$: & ajoutant $\overline{MO}^2$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{VO}^2 = 2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$.

Pour trouver donc ce quarré $\overline{VO}^2$, & par conſéquent ſa racine VO; j'éleve ſur le milieu O de la ligne MR, une perpendiculaire OX, que je fais égale à MO ou OR; & je mene la droite RX : ce

qui donne un triangle rectangle isoscele, dans lequel j'ai $\overline{RX}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OX}^2$ (171); & à cause de OR = OX = MO, j'ai $\overline{RX}^2 = 2\overline{MO}^2$. Du point N pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à RX, je décris un arc qui coupe en Z la perpendiculaire OX prolongée; & menant la droite NZ laquelle est égale par conséquent à RX, j'ai un autre triangle rectangle NZO, qui donne $\overline{ZN}^2$ ou $\overline{RX}^2 = \overline{ZO}^2 + \overline{NO}^2$ (171.)

Mais $\overline{RX}^2 = 2\overline{MO}^2$: donc $2\overline{MO}^2 = \overline{ZO}^2 + \overline{NO}^2$; & retranchant $\overline{NO}^2$ de part & d'autre, j'ai $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{ZO}^2$. Mais $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{VO}^2$, comme on vient de voir : donc $\overline{VO}^2 = \overline{ZO}^2$; & VO = ZO. Ainsi prolongeant OM au-delà de M, & portant ZO de O en V, nous aurons la droite VO, de laquelle retranchant MO, le reste sera la petite partie cherchée. Faisant donc une ligne égale aux trois VM, AC, BD, & dont VM soit la partie du milieu; cette ligne sera la ligne divisée harmoniquement, & qui aura pour extrêmes les deux données AC, BD; & le problême n'a qu'une solution. Car si VM devenoit plus grande ou plus petite; le rectangle de VM, par toute la ligne, seroit plus grand ou plus petit que le rectangle AC × BD ou $2\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$.

207. Corollaire III. Il suit du corollaire précédent que *si deux lignes égales, divisées harmoniquement, ont une des extrêmes égale à une des extrêmes, ou la partie du milieu égale à la partie du milieu; les deux autres parties sont égales chacune à chacune aux deux autres parties : & que si les deux extrêmes d'une ligne sont égales aux deux extrêmes d'une autre; ou une extrême & la partie du milieu, égale à une extrême & à la partie du milieu, les deux lignes sont égales.* Car autrement le problême ne seroit pas déterminé dans tous les cas dont nous avons parlé (206) : ce qui n'est pas possible.

208. Corollaire IV. *Si d'un point* R *pris hors d'une ligne* AB *divisée harmoniquement aux points* C, D, *on mene quatre lignes indéfinies qui passent par les points* A, C, D, B, *de la ligne* AB; *toute ligne* PS, HZ, *&c, qui coupera trois de ces lignes, & qui sera parallele à la quatrieme, sera coupée en deux également entre les lignes qu'elle coupera.* (fig. 122).

Démonstration. Du point D, je mene PS parallele à AR, & qui coupe les trois lignes RZ, RT, RV. Les triangles ARC, DSC, sont semblables; à cause des angles alternes que font les paralleles

AR, PS, & de l'angle ACR égal à l'angle SCD qui lui eſt oppoſé au ſommet: donc AR. SD :: AC. CD. Or les triangles ARB, DPB, étant ſemblables, à cauſe des baſes paralleles AR, DP, donnent AR. DP :: AB. DB; & par la ſuppoſition, nous avons AC. CD :: AB. DB : donc les raiſons AR. SD, & AR, DP, qui ſont égales aux deux précédentes, ſont égales entre elles; & nous avons AR. SD :: AR. DP; c'eſt-à-dire SD = DP, à cauſe des antécédens égaux AR, AR.

Ainſi SP eſt diviſée en deux également entre les trois lignes RZ, RT, RV : mais toutes les lignes HZ, &c, menées entre ces trois lignes parallelement à RA ou à PS, ſont coupées en même raiſon que PS (200) : donc elles ſont coupées en deux également.

Et on prouveroit aiſément la même choſe, ſi la ligne PS (*fig.* 123), avoit été menée du point C entre les trois RX, RZ, RT, parallelement à RV. Car à cauſe des triangles ſemblables CSD, RDB, on auroit RB. CS :: DB. DC; & les triangles ſemblables ARB, APC donneroient RB. PC :: AB. AC. Mais à cauſe que la ligne AB eſt diviſée harmoniquement, on auroit AB, AC :: DB, DC : donc on auroit auſſi RB. PC :: RB. CS; & partant PC = CS. Mais toutes ſes lignes HT, &c, paralleles à AV ou à PS, ſont coupées en même raiſon par les lignes RX, RZ, RT : donc elles ſont auſſi coupées en deux également.

209. Corollaire V. *Si quatre lignes qui partent d'un même point* R, *ſont diſpoſées de façon que toute ligne qui en coupe trois, & qui eſt parallele à la quatrieme, ſoit coupée en deux également entre les trois lignes qui les coupent; je dis que toute ligne qui coupera les quatre lignes à la fois dans quelque poſition que ce ſoit, ſera coupée harmoniquement entre les quatre lignes.* (fig. 122, 123).

Démonstration. D'un point quelconque A de la ligne RX (*fig.* 122), je mene une droite AB entre les quatre lignes RX, RZ, RT, RV : & comme on ſuppoſe que toute ligne HZ, parallele à RX, & compriſe entre les trois autres, eſt diviſée en deux également; je mene du point D, la droite PS parallele à RX; & par conſéquent j'ai SD = DP. Or les triangles ſemblables ARC, SCD, donnent AR. SD :: AC. CD; & à cauſe des triangles ſemblables ARB, DPB, on a AR. PD ou SD :: AB. DB : donc AC. CD :: AB, BD; c'eſt-à-dire AB eſt diviſée harmoniquement.

Et ce ſeroit la même choſe ſi on diſoit que toute ligne PS (*fig.* 123), parallele à RV, & compriſe entre les trois autres, étoit coupée en deux également.

210. COROLLAIRE VI. *Si quatre lignes* RX, RZ, RT, RV, *qui partent d'un même point* R, *ſont tellement diſpoſées que toute ligne* PT *compriſe entre trois, & parallele à la quatrieme, ſoit diviſée en deux également; ou, ce qui revient au même, que toute ligne* AB *compriſe entre les quatre, ſoit coupée harmoniquement; je dis que ces quatre lignes étant prolongées au-delà de* R, *ce qui donnera huit lignes* RX, RZ, RT, RV, RI, RL, RS, RQ, *il arrivera toujours que toute ligne qui coupera quatre de ces huit lignes, ſera diviſée harmoniquement; & que toute ligne compriſe entre trois de ces lignes & parallele à une quatrieme, ſera diviſée en deux également.* (fig. 124.)

DÉMONSTRATION. I°. Il eſt évident que ſi je mene entre les quatre prolongemens des quatre lignes, la droite MF parallele à AB, elle ſera diviſée en même raiſon que AB (200), & par conſéquent harmoniquement: & comme delà il ſuit que toute ligne parallele à l'un de ces prolongemens, & compriſe entre les trois autres, ſera diviſée en deux également (208); il s'enſuit auſſi que toute ligne qui ſera compriſe entre les quatre dans quelque poſition que ce ſoit, ſera coupée harmoniquement (209.)

II°. Puiſque les quatre lignes RX, RZ, RT, RV, coupent AB harmoniquement par la ſuppoſition; & qu'ainſi toute ligne compriſe entre les trois RZ, RT, RV & parallele à RA ou RQ, eſt coupée en deux également; il s'enſuit que les quatre lignes RZ, RT, RV, RQ, ſont diſpoſées de la façon qu'il faut, pour que toute ligne qui ſera compriſe entre les quatre, ſoit coupée harmoniquement (209): & partant toute ligne compriſe entre les trois RT, RV, RQ, & parallele à la quatrieme RZ ou RS, ſera coupée en deux également (208); & on prouvera les mêmes choſes, & de la même façon, à l'égard des quatre lignes RT, RZ, RX, RI.

III°. Puiſque toute ligne qui coupe les trois lignes RT, RV, RQ, & qui eſt parallele à la quatrieme RZ ou RS, eſt coupée en deux également; toute ligne qui coupe les quatre RT, RV, RQ, RS, eſt coupée harmoniquement (209): & par conſéquent toute ligne qui coupera les trois RV, RQ, RS, & qui ſera parallele à la quatrieme RT, ſera coupée en deux également; & les mêmes choſes ſe prouveront à l'égard des quatre lignes RZ, RX, RI, RL.

IV°. Enfin, puiſque toute ligne compriſe entre les trois RV, RQ, RS, & parallele à la quatrieme RT ou RL, eſt coupée en deux également; tout ligne menée entre les quatre RV, RO, RS, RL, doit être coupée harmoniquement (209): d'où il ſuit que toute ligne compriſe entre les trois RQ, RS, RL, & parallele à la quatrieme

RV, eſt coupée en deux également (208); & la même choſe ſe prouvera à l'égard des quatre RX, RI, RL, RS. Donc, &c.

Proposition XLVIII.

211. *Si deux lignes droites, diviſées harmoniquement, ont un point commun, c'eſt-à-dire, ou l'un des deux extrêmes, ou l'un des deux moyens; les lignes qui joindront les autres points de diviſion, ou ſeront paralleles entre elles, ou iront aboutir à un même point.* (fig. 125, 127).

Démonstration. Soient les deux droites AB, AR, diviſées l'une & l'autre harmoniquement, & qui ont le point extrême A commun. Je joints les points du milieu par les droites CE, DH; & ces lignes ſeront ou paralleles entre elles, ou non paralleles.

Si les droites CE, DH, ſont paralleles entre elles (*fig.* 125); je joins les autres points B, R par la droite BR; & je dis que cette droite eſt parallele aux deux autres. Car ſi on veut qu'elle ne le ſoit pas, je mene par le point B une droite parallele aux autres CD, DH; & cette droite coupera la droite AR prolongée, s'il le faut, en un point S different de R. Or, le triangle ASB étant coupé par les droites CE, DH, paralleles au côté BS; ſes autres côtés AB, AS, ſeront coupés en même raiſon (158); & par conſéquent le côté AS ſera diviſé harmoniquement, à cauſe du côté AB diviſé harmoniquement. Ainſi nous aurons deux lignes droites inégales AR, AS, diviſées harmoniquement, & qui auront cependant deux parties communes AE, EH: ce qui eſt impoſſible (207). Donc, &c.

Si les droites CE, DH (*fig.* 127), ne ſont pas paralleles entre elles; ces droites prolongées ſe couperont en quelque point O; & je dis que la droite BR prolongée paſſera par ce point. Car ſi on veut que cela ne ſoit pas, je mene du point O la droite OA, & une autre droite au point B, laquelle par conſéquent coupera AR, prolongée, s'il le faut, en un autre point S. Ainſi, à cauſe que AS ſera compriſe entre quatre lignes droites OA, OC, OD, OB, qui coupent AB harmoniquement; AS ſera auſſi coupée harmoniquement par ces quatre lignes (208): & par conſéquent, nous aurons deux lignes droites différentes AS, AR, coupées harmoniquement, & qui auront cependant deux parties communes AE, EH; ce qui eſt impoſſible (207): donc il eſt impoſſible que la ligne BR prolongée, ne paſſe pas par le point O; où les autres lignes CE, DH prolongées, vont ſe couper.

Et on démontrera de la même façon, que ſi deux lignes droites AB, ER, (*fig.* 126, 128), coupées harmoniquement, ſe coupent

en un des points moyens C; les droites menées par leurs points de diviſion ou ſeront paralleles entre elles (*fig.* 126), ou ſe couperont toutes en un même point O (*fig.* 128). C. Q. F. D.

212. Remarque. Les propriétés de la ligne diviſée harmoniquement, ſont d'une grande utilité pour l'intelligence des ſections coniques, & propres à abréger beaucoup le travail dans l'étude de ces courbes: comme on verra dans la ſuite.

Proposition XLIX.

213. *Si pluſieurs lignes droites ſont en proportion géométrique continue; leurs différences ſont en même raiſon que ces lignes.* (fig. 129.)

Démonstration. Soient les trois lignes AB, AC, AD, en proportion continue géométrique: leurs différences ſeront BC, CD, & il s'agit de faire voir que BC. CD :: AB. AC.

Pour cela, comme le quarré de la moyenne AD, eſt égal au produit ou rectangle des deux extrêmes AB, AC; ſi je fais le quarré AHMC de la moyenne AC, & le rectangle ARSB des extrêmes AB, AD; le quarré AHMC ſera égal au rectangle ARSB: & retranchant de part & d'autre le rectangle commun AHPB, les rectangles reſtans BCMP, PHRS, ſeront encore égaux; & partant leurs côtés ſeront réciproques (184), & nous aurons PM. PS :: PH. PB. Or, à cauſe des paralleles AH, BP, CM, & des paralleles AB, HP; nous avons PM = BC, & HP = AB; & à cauſe de AR ou BS = AD, & de AH ou BP = AC, nous avons PS = CD: mettant donc ces valeurs de PM, PS, PH, & PB, dans la proportion PM, PS, PH, PB; nous aurons BC. CD :: AB. AC. Ce qu'il falloit démontrer.

S'il y avoit plus de trois lignes, on démontreroit encore la même choſe. Car ſuppoſant que quatre lignes a, b, c, d, fuſſent en proportion continue; les différences des trois premieres ſeroient entre elles comme a eſt à b: or les trois dernieres b, c, d, étant auſſi en progreſſion, leurs différences ſeroient comme b eſt à c; & par conſéquent elles ſeroient auſſi comme a eſt à b; & ainſi des autres.

214. Problême XIII. *Trouver tant de moyennes proportionnelles géométriques que l'on voudra entre deux lignes données.*

Explication. I°. On n'eſt pas encore parvenu à réſoudre ce problême dans tous les cas qu'il renferme en n'employant que la géométrie ordinaire, c'eſt-à-dire, la regle & le compas. A la vérité la géométrie compoſée en eſt venue à bout: mais il eſt ſi difficile de bien exécuter ce qu'elle nous enſeigne là-deſſus, qu'on peut dire que cette découverte eſt une belle ſpéculation, dont il ne faut rien attendre dans la pratique. Grand nombre d'Auteurs ſe bornent au cas de *deux*

moyennes proportionnelles géométriques entre deux lignes données, qui eſt le plus néceſſaire dans la géométrie, & nous ont donné différens uſages qui ont tous le défaut d'être extrêmement tâtonneux & peu sûrs : ainſi je crois que le meilleur eſt de ſe ſervir du compas de proportion, comme nous l'enſeignerons plus bas.

II°. Quant aux autres cas de ce problême, on les réſoudra toujours lorſqu'il s'agira de chercher trois moyennes proportionnelles géométriques entre deux lignes données, ou 7, ou 15, ou 31, & ainſi de ſuite en doublant toujours & ajoutant l'unité. Car, par exemple ;

Pour trouver *trois moyennes proportionnelles géométriques* entre deux lignes a, b ; je cherche d'abord une moyenne proportionnelle entre ces lignes, & je la nomme x : ainſi j'ai $a, x :: x, b$. Après quoi, je cherche une moyenne proportionnelle z, entre a & x ; & une autre y, entre x & b ; & j'ai $a, z :: z, x :: x, y :: y, b$: ce que je prouve ainſi. A cauſe de $a, z :: z, x$; le quarré de la premiere a, eſt au quarré de la ſeconde z ; comme la premiere a, eſt à la troiſieme x : c'eſt-à-dire $aa, zz :: a, x$; ainſi qu'il a été dit dans le premier livre (327). De même à cauſe de $x, y :: y, b$, nous avons $xx, yy :: x, b$: mais nous avons fait $a, x, :: x, b$: donc $xx, yy :: a, x$. Or, nous venons de trouver $aa, zz :: a, x$: donc $aa, zz :: xx, yy$, & tirant la racine quarrée de tous les termes, nous aurons $a, z :: x, y$. Mais nous avons $a, z :: z, x$ & $x, y :: y, b$: donc ces quatre raiſons ſont égales, & nous avons $a, z :: z, x :: x, y :: y, b$.

De même ſi l'on demande *ſept moyennes proportionnelles géométriques* entre deux lignes données a, b ; je prends d'abord une moyenne géométrique x, entre a & b, & enſuite trois moyennes entre a & x, & trois moyennes entre x & b, & ainſi des autres : ce qu'on démontrera de la même façon.

215. Problême XIV. *Trouver tant de moyennes proportionnelles arithmétiques que l'on voudra entre deux lignes données* (fig. 130.)

Solution. Autant il eſt impoſſible de réſoudre le problême précédent dans tous ſes cas, autant eſt-il facile de réſoudre celui-ci. Soient par exemple, les lignes AB, AC entre leſquelles on demande de trouver trois moyennes arithmétiques : je coupe la différence BC de ces deux lignes, en autant de parties égales plus une, qu'on demande des moyennes, c'eſt-à-dire en quatre BD, DE, EH, HC. Je donne à la ligne AB, la partie BD ; & la ligne AD eſt la premiere moyenne demandée : j'ajoute à AD, la partie DE ; & la droite AE eſt la ſeconde moyenne : enfin, j'ajoute à la droite AE, la partie EH ; & la droite AH eſt la troiſieme moyenne. Les cinq lignes AB, AD, AE, AH, AC, ſont en progreſſion arithmétique : puiſqu'elles ſe

ſurpaſſent toutes de la même façon ; ou que leur différence eſt toujours la même.

PROPOSITION XLVIII, *bis.*

216. *Si trois lignes ſont en progreſſion arithmétique aſcendante ou deſcendante ; la premiere eſt plus petite par rapport à la ſeconde, que la ſeconde par rapport à la troiſieme ; & le produit des extrêmes eſt moindre que le quarré de la moyenne.* (fig. 131.)

DÉMONSTRATION. I°. Soient les trois lignes AB, AC, AD, en progreſſion arithmétique aſcendante; & dont par conſéquent les différences BC, CD, ſont égales. Je cherche entre les deux extrêmes AB, AD, une moyenne géométrique AX ; & à cauſe que les trois lignes AB, AX, AD, ſont en progreſſion géométrique, leurs différences BX, XD ſont entre elles comme les lignes AB, AX (213): & comme AB eſt plus petit que AX, la différence BX eſt plus petite que la différence XD. Ainſi BD étant coupée en X en deux parties inégales, dont la petite eſt BX ; cette différence BX eſt moindre que la moitié BC de BD, laquelle moitié eſt la différence de la progreſſion arithmétique : & partant la moyenne proportionnelle géométrique AX eſt plus petite que la moyenne arithmétique AC; d'où il ſuit que AB eſt plus petite par rapport à AC, que par rapport à AX. Mais dans la progreſſion géométrique, nous avons AB . AX :: AX . AD : donc AB eſt auſſi plus petite par rapport à AC, que AX par rapport à AD. Mais AC eſt plus grande par rapport à AD, que AX par rapport à la même AD : donc à plus forte raiſon AB eſt plus petite par rapport à AC, que AC, par rapport à AD.

Maintenant ſuppoſons que la progreſſion arithmétique AD, AC, AB, ſoit deſcendante. Je prends la moyenne géométrique AX entre ces deux lignes ; ce qui donne la progreſſion géométrique AD . AX : : AX . AB : & les différences DX, XB, étant entre elles comme les lignes AD, AX (213) ; la différence DX ſera plus grande que la différence XB, à cauſe de AD plus grand que AX. Ainſi DX ſera plus grande que la moitié DC de la ligne DB, laquelle moitié eſt la différence de la progreſſion arithmétique ; donc la moyenne géométrique AX ſera plus petite que la moyenne arithmétique AC ; & par conſéquent AD ſera moins grand par rapport à AC, que par rapport à AX : & comme AD . AX :: AX . AB ; la ligne AD ſera auſſi moins grande par rapport à AC, que AX par rapport à AB. Or, AX eſt moins grand par rapport à AB, que AC par rapport à AB : donc à plus forte raiſon AD eſt moins grande par rapport à AC, que AC par rapport à AB. Ainſi dans l'un & l'autre cas, la premiere ligne de la progreſ-

ſion

ſion arithmétique, eſt moins grande par rapport à la ſeconde, que la ſeconde par rapport à la troiſieme.

II°. Puiſque dans l'un & l'autre cas, la moyenne géométrique AX eſt plus petite que la moyenne arithmétique AC; le quarré de AX eſt auſſi plus petit que le quarré de AC. Or, dans la progreſſion géométrique AB . AX :: AX . AD, ou AD . AX :: AX . AB; nous avons $\overline{AX}^2 = AB \times AD$: donc $AB \times AD$ eſt plus petit que le quarré $\overline{AC}^2$. Ainſi dans la progreſſion arithmétique AB, AC, AD, ou AD, AC, AB; le produit des extrêmes eſt moindre que le quarré de la moyenne. C. Q. F. D.

CHAPITRE IV.

DES PROPRIÉTÉS DU CERCLE.

217. DÉFINITIONS. UNE ligne AB (*fig.* 132), menée d'une point à un autre de la circonférence du cercle, & qui ne paſſe pas le centre, ſe nomme *corde*. Nous avons démontré (60) que la circonférence ne peut couper qu'en deux points une corde qu'on prolongeroit même de part & d'autre. La partie ACB du cercle que la corde coupe, ſe nomme *petit ſegment*; & l'autre partie AEB, ſe nomme *grand ſegment*.

218. Toute ligne RS (*fig.* 132), qui touche une circonférence ſans la couper, ſe nomme *tangente*; & toute ligne HM (*fig.* 133), qui part d'un point extérieur H, & qui coupe la circonférence en deux points N, M, ſe nomme *ſécante*.

219. Si d'un point B, où une droite RS (*fig.* 132) touche le cercle, on mene une corde AB, l'angle ABR, tourné du côté du petit ſegment, ſe nomme *angle du petit ſegment*; & l'angle ABS, tourné du côté du grand ſegment, ſe nomme *angle du grand ſegment*.

220. L'angle AOC (*fig.* 133), formé par deux rayons AO, CO, ſe nomme *angle au centre*; & l'angle NMA fait par deux cordes NM, MA, ſe nomme *angle à la circonférence*.

221. La portion de cercle AOC, compriſe entre deux rayons, ſe nomme *ſecteur de cercle*.

222. Si des extrêmités d'une corde AB (*fig.* 134), on mene deux droites à un point quelconque C de l'arc du petit ſegment; l'angle ACB, fait en C, ſe nomme *angle dans le petit ſegment*: & ſi des mêmes extrêmités A, B, on mene deux droites à un point quel-

conque D de l'arc du grand ſegment; l'angle ADC, fait en D, ſe nomme *angle dans le grand ſegment.*

223. Deux circonférences de cercle qui ont le même centre, ſe nomment *circonférences concentriques*; & ſi deux circonférences de cercle, dont l'une eſt dans le cercle de l'autre, n'ont pas le même centre, elles ſe nomment *excentriques.*

PROPOSITION XLIX, *bis.*

224. *Si une droite* OS *qui paſſe par le centre* O, *coupe une corde* AB *en deux également, elle lui eſt perpendiculaire; & ſi elle eſt perpendiculaire ſur la corde* AB, *elle la coupe en deux également. Dans l'un & l'autre cas, l'arc* ASB *que la corde ſoutient, eſt coupé en deux également: enfin, ſi l'arc* ASB *eſt coupé en deux également par une droite* OS *qui paſſe par le centre; cette droite* OS *eſt perpendiculaire ſur la corde, & la coupe en deux également.* (fig. 135.)

DÉMONSTRATION. I°. Je mene aux extrêmités de la corde les rayons OA, OB qui ſont deux obliques égales, menées du même point O ſur la droite AB; ainſi la perpendiculaire qu'on meneroit du point O ſur la même ligne AB, couperoit la droite AB au point R qui la diviſe en deux également (54). Mais par la ſuppoſition, la droite OS qui paſſe par le même point O, paſſe auſſi par le point R; puiſqu'elle diviſe AB en deux également: donc la droite AS n'eſt pas differente de la perpendiculaire qu'on meneroit du point O; car l'une & l'autre auroient deux points communs O, R.

II°. Si l'on ſuppoſe que OS eſt perpendiculaire ſur AB; il eſt clair qu'elle doit diviſer AB en deux également: à cauſe des obliques égales OA, OB. (54.)

III°. Dans l'un & l'autre cas, les deux triangles OAR, OBR, ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, ſont parfaitement égaux (100): donc les angles AOS, BOS, ſont égaux. Par conſéquent les arcs AS, SB, qui meſurent ces angles, ſont égaux; & l'arc AB eſt diviſé en deux également par la droite OS.

IV°. Enfin, ſi l'arc AB eſt diviſé en deux également en S, par la droite SO qui paſſe par le centre; cette droite paſſe par les mêmes points O, S, par leſquels paſſeroit la perpendiculaire OR, ou la droite qui partant du centre O, viendroit diviſer AB en deux également: donc SO eſt la même que l'une ou l'autre de ces lignes; & par conſéquent elle eſt perpendiculaire ſur AB, & la coupe en deux également. C. Q. F. D.

225. COROLLAIRE I. *Si une ligne* SO *qui paſſe par le centre, di-*

viſe un arc AB *en deux également; cette ligne prolongée au-delà du centre en* H, *diviſera auſſi l'arc oppoſé* AHB *en deux également.* (fig. 135.)

DÉMONSTRATION. La ligne SO, prolongée en H, eſt diametre, & coupe la circonférence en deux parties égales SAH, SBH: retranchant donc d'une part l'arc SA, & de l'autre l'arc SR, égal à SA; le reſte AH ſera égal au reſte BH.

226. COROLLAIRE II. *Toute ligne* SH *qui diviſe une corde* AB *en deux également, & qui lui eſt perpendiculaire, paſſe par le centre* O. (fig. 135.)

DÉMONSTRATION. Si on veut que cela ne ſoit pas, je mene par le point R une droite au centre, & cette droite ſera perpendiculaire ſur AB; à cauſe qu'elle la diviſe en deux également (224): donc ſur un même point R, on pourroit élever deux perpendiculaires ſur AB; ce qui eſt impoſſible.

227. PROBLÊME I. *Trouver le centre d'un cercle.* (fig. 135.)

SOLUTION. Je mene une corde AB, que je diviſe en deux également en R; j'éleve en R la perpendiculaire HS, que je prolonge de part & d'autre juſqu'à la circonférence; & diviſant HS en deux également en O, ce point eſt le centre demandé: ce qui eſt évident par la propoſition précédente & par les corollaires.

228. PROBLÊME II. *Faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés* A, B, C, *qui ne ſont pas en ligne droite.* (fig. 136.)

SOLUTION. Je joints les points A, B, par la droite AB; & les points A, C, par la droite AC: je coupe chacune de ces droites en deux également aux points M, N; & ſur ces points j'éleve des perpendiculaires indéfinies MR, NS. Du point O, où ces perpendiculaires ſe coupent, pris pour centre, & d'une ouverture de compas égale à la diſtance OA du point O au point A; je décris une circonférence, qui paſſe par les deux autres points B, C: ce que je prouve ainſi.

Si les droites AB, AC, étoient en ligne droite; les perpendiculaires MR, NS ſeroient paralleles, & ne ſe couperoient pas (68): mais comme ces droites AB, AC, s'inclinent l'une ſur l'autre; les perpendiculaires doivent auſſi s'approcher entre elles du côté de l'angle BAC, & par conſéquent elles doivent ſe couper en un point O. Cela poſé,

Puiſque la perpendiculaire MR paſſe par le point M également éloigné des extrêmités A, B, de la droite AB; le point O de cette perpendiculaire doit être auſſi également éloigné des mêmes extrêmités A, B (56): par la même raiſon le point O de la perpendiculaire NS, doit être également diſtant des extrêmités A, C, de la droite AC: donc ce point O eſt également éloigné des trois points A, B, C; & par conſéquent la circonférence qui a pour centre le point O, & qui paſſe par le point A, doit paſſer par les deux autres B, C.

229. COROLLAIRE III. *On ne peut faire paſſer deux différentes circonférences de cercles, par trois points données* A, B, C. (fig. 136.)

DÉMONSTRATION. Si cela ſe pouvoit, les droites AB, AC, ſeroient des cordes de l'un & de l'autre cercle; & par conſéquent le centre de la ſeconde circonférence qu'on voudroit faire paſſer par ces trois points, devroit ſe trouver ſur la perpendiculaire MR, qui coupe la corde AB en deux également (226). Par la même raiſon, il devroit ſe trouver auſſi ſur la perpendiculaire NS qui coupe la corde AC en deux également, & de plus ce centre devroit être différent du centre O de la premiere circonférence: car autrement ces deux circonférences ne ſeroient pas différentes, puiſqu'elles auroient le même centre & le même rayon. Mais il n'eſt pas poſſible de trouver un point différent de O, qui ſoit ſur l'une & l'autre perpendiculaire; puiſqu'elles ne ſe coupent qu'en un point (35): donc il n'eſt pas poſſible de faire paſſer une autre circonférence par les trois points A, B, C.

230. COROLLAIRE IV. *Donc deux circonférences de cercle ne peuvent ſe couper en trois points.* Si cela ſe pouvoit, on pourroit auſſi faire paſſer deux circonférences par trois points donnés.

231. COROLLAIRE V. *On peut toujours faire paſſer une circonférence par les trois ſommets des angles d'un triangle.*

DÉMONSTRATION. Les trois ſommets des angles d'un triangle, ne ſont jamais en ligne droite. Mais par trois points qui ne ſont pas en ligne droite, on peut faire paſſer une circonférence (228). Donc, &c.

PROPOSITION L.

232. *De toutes les lignes qu'on peut mener à la circonférence d'un cercle, d'un point* A *pris entre le centre & la circonférence, la plus grande eſt la droite* AB *qui paſſe par le centre; la plus petite eſt la droite* AC *qui eſt le prolongement de la droite* AB; *& les autres* AM,

AN, &c, *vont en diminuant à meſure qu'elles s'éloignent de la plus grande* AB. (fig. 137.)

DÉMONSTRATION. I°. Du centre O je mene la droite OM : dans le triangle AOM, les deux côtés AO, OM, pris enſemble, ſont plus grands que le côté AM. Or OM eſt égal à OB, l'une & l'autre étant rayon du même cercle : donc AO + OM = AO + OB ou AB ; & par conſéquent la droite AB, qui paſſe par le centre, eſt plus grande que la droite AM qui n'y paſſe pas : & on prouvera de la même façon que AB eſt plus grand que AN ; & ainſi des autres.

II°. Je mene le rayon ON : les triangles AOM, AON ont le côté AO commun, & le côté OM eſt égal au côté ON. Mais l'angle compris AOM dans le premier, eſt plus grand que l'angle compris AON dans le ſecond ; donc la baſe AM du premier, eſt plus grande que la baſe AN du ſecond (108) : c'eſt-à-dire, la droite AM plus proche de la plus grande AB, eſt plus grande que la droite AN qui en eſt plus éloignée ; & ainſi des autres.

III°. Dans le triangle AON, les deux côtés AO, AN, pris enſemble, ſont plus grands que le côté AN. Mais ON = OC : donc AO + AN eſt plus grand que OC ou OA + AC. Ainſi retranchant OA de part & d'autre, nous aurons AN plus grand que AC : c'eſt-à-dire, le prolongement AC de la plus grande AB, eſt plus petit que AN, & ainſi des autres. C. Q. F. D.

233. COROLLAIRE I. *On peut toujours mener du point* A *à la circonférence, deux lignes égales, mais jamais trois ; & la ligne qui joint les extrémités des égales, eſt coupée en deux également, par la plus grande* AB *qui lui eſt perpendiculaire.* (fig. 137.)

DÉMONSTRATION. I°. Je prends l'arc BS, égal à l'arc BM ; & du point S je mene les droites SA, SO : l'angle SOB eſt donc égal à l'angle MOB ; puiſque les arcs BS, BM, qui meſurent ces angles, ſont égaux ; & à cauſe que l'angle SOB, & ſon angle de ſuite SOA, valent deux droits (49), de même que l'angle MOB & ſon angle de ſuite MOA : les angles SOA, MOA, ſont égaux. Par conſéquent les triangles SOA, MOA, qui ont le côté AO commun, le côté OS égal au côté OM, & l'angle compris égal à l'angle compris, ſont parfaitement égaux (100) : donc la droite AS eſt égale à la droite AM, & ainſi des autres.

II°. Il eſt viſible qu'on ne peut trouver trois lignes menées du point A à la circonférence, qui ſoient égales entre elles. Car il faudroit qu'il y en eût deux qui fuſſent d'un même côté par rapport à la plus grande AB ; & ces deux-là ſeroient inégales, puiſqu'elles ſeroient à diſtances inégales de la plus grande.

les triangles SOA, ROA, ſont parfaitement égaux; à cauſe du côté SO égal au côté RO, du côté AO commun, & de l'angle SOA égal à l'angle ROA (100) : donc le côté AS eſt égal au côté AR; c'eſt-à-dire, les parties extérieures AS, AR, des ſécantes également éloignées de la ſécante AB qui paſſe par le centre, ſont égales; & ainſi des autres.

II°. On ne peut mener de partie extérieure du point A, qui ne ſoit plus proche ou plus éloignée de la partie AC, que les deux égales AS, AR; & qui par conſéquent ne ſoit plus petite ou plus grande que chacune de ces deux : donc on ne peut trouver trois parties extérieures égales.

III°. La ligne AB qui paſſe par le centre, coupe l'arc SR en deux également : donc elle coupe auſſi en deux également & perpendiculairement la corde SR (224), qui joint les extrêmités des égales AS, AC. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque. Puiſque de toutes les parties extérieures des ſécantes, qu'on peut mener d'un point extérieur A, la plus petite eſt la partie extérieure AC de la ſécante AB qui paſſe le centre; il s'enſuit que *la diſtance d'un point extérieur* A *à une circonférence de cercle, eſt la partie* AC *d'une droite* AB *menée du point* A *au centre :* comme la choſe eſt évidente. (*Fig.* 139.)

Proposition LIII.

239. *Si une ligne droite* PQ *touche une circonférence, elle ne la touche qu'en un point* Q. (fig. 140.)

Démonstration. Si on veut qu'elle la touche en un autre point H; je mene la droite HQ qui ſera le prolongement de PQ : puiſqu'on ſuppoſe que la même droite PQ coupe la circonférence en Q & H. Je mene auſſi les rayons QO, HO; & à cauſe que le triangle HOQ eſt iſoſcele, la perpendiculaire menée du point O ſur la baſe HQ, paſſera par le milieu L de cette baſe (107). Or cette perpendiculaire ſera plus courte que les obliques OH, OQ (53) : donc ſon extrêmité L, où elle coupe la droite HQ, ſera dans le cercle, c'eſt-à-dire entre le centre & la circonférence : & par conſéquent la droite HQ ne ſera point tangente; puiſqu'elle aura un point L dans le cercle. C. Q. F. D.

Proposition LIV.

240. *Si une ligne* MN *touche un cercle, & que du point d'attouchement* A *on mene un rayon* AO; *ce rayon eſt perpendiculaire ſur la tangente.* (fig. 140.)

Démonstration

DÉMONSTRATION. Puiſque la tangente ne peut toucher la circonférence qu'au point A ; tous ſes autres points ſont hors de la circonférence, & plus éloignés du centre que le point A. Ainſi les lignes menées de ces points au centre, ſont toutes plus longues que AO : & par conſéquent AO étant la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point O ſur MN, eſt perpendiculaire ſur MN (53). C. Q. F. D.

241. COROLLAIRE. *Il ne peut y avoir qu'une ſeule tangente qui touche un cercle à un point* Q (fig. 140.)

DÉMONSTRATION. La droite PQ touche le cercle en Q : ſi on veut qu'une autre droite QH le touche au même point Q, je mene le rayon QO qui ſera perpendiculaire ſur PQ (240), & par conſéquent oblique ſur QH (57) : donc la perpendiculaire qu'on meneroit du point O ſur HQ, ſeroit plus courte que l'oblique QO, & par conſéquent cette perpendiculaire couperoit HQ en dedans du cercle : donc HQ ne ſauroit être tangente.

242. PROBLÊME. *D'un point donné* A *ſur la circonférence d'un cercle ; mener une tangente.* (fig. 140.)

SOLUTION. Je mene le rayon AO ; & ſur ſon extrêmité A, une perpendiculaire MN, qui eſt la tangente demandée (240). Car OA étant la plus courte qu'on puiſſe mener du point O, ſur tous les points de MN ; tous les points de MN, à l'exception du point A, ſont hors de la circonférence, & partant MN, eſt tangente.

PROPOSITION LV.

243. *Deux cercles qui ſe touchent, ne ſe touchent qu'en un point.* (fig. 141.)

DÉMONSTRATION. I°. Si les centres O, H, des deux cercles RMS, RTS, ne ſont pas tous les deux dans un même cercle, & qu'on prétende que ces deux cercles ſe touchent aux points R, S, ſans ſe couper ; je mene les rayons OR, OS, HR, HS, & la droite RS. Les rayons OR, OS, étant égaux ; le point O eſt également éloigné des extrêmités R, S de la ligne RS ; & par la même raiſon, le point H eſt auſſi également éloigné des extrêmités R, S. Menant donc la ligne droite OH par les deux centres OH ; cette ligne eſt perpendiculaire ſur RS (58), & la coupe en deux également. Ainſi les deux rayons OR, HR, étant enſemble plus grands que la droite OH aux extrêmités de laquelle ils tournent ; leurs circonférences ſe coupent en R, S, (59) ; & par conſéquent elles ne ſe touchent pas comme on le prétendoit.

II° Si les centres O, H, des deux cercles ſont dans un même cercle RMS (*fig.* 142), & qu'on prétende que les deux circonférences ſe touchent en deux points R, S, je mene du centre O du petit cercle, les rayons OR, OS : & comme ce centre O eſt entre le centre H du grand & ſa circonférence, les droites égales OR, OS, ne ſont pas la plus courte ligne qu'on peut mener du point O à la circonférence RMS; car cette plus courte ligne OP doit paſſer entre les égales OR, OS, & ſe trouver à égale diſtance de l'une & de l'autre (233) : donc le point P de la circonférence RMS du grand cercle, eſt plus proche du centre O du petit cercle, que la circonférence RTS de ce petit cercle ; & par conſéquent la circonférence RTS coupe la circonférence RMS, & ces deux circonférences ne ſe touchent pas comme on le prétendoit. C. Q. F. D.

PROPOSITION LVI.

244. *Lorſque la poſition de deux cercles eſt telle que les deux centres ne ſe trouvent pas tous les deux dans l'un des deux cercles, s'il arrive que la ligne* OH (fig 143) *qui joint les deux centres, ſoit plus grande que la ſomme des rayons* OR, HS ; *les deux cercles ne ſe coupent ni ne ſe touchent. Si cette droite* OH (fig. 144) *eſt égale à la ſomme des rayons* OR, RH ; *les deux cercles ſe touchent ſans ſe couper. Si la droite* OH (fig. 145) *eſt moindre que la ſomme des rayons* OR, HS ; *les cercles ſe coupent.*

DÉMONSTRATION. Dans le premier cas (*fig.* 143), j'éleve en R & S les perpendiculaires MT, NV, leſquelles ſont paralleles entre elles (68), & par conſéquent ne ſe coupent pas. Or, MT eſt tangente du cercle RCD (242) ; & NV eſt tangente du cercle SEL ; ainſi ces deux cercles étant tout entiers hors des paralleles MT, NV, ne peuvent ni ſe toucher ni ſe couper.

Dans le ſecond cas (*fig.* 144), j'éleve en R la perpendiculaire MN, laquelle eſt tangente de l'un & de l'autre cercle : puiſqu'elle eſt perpendiculaire ſur le rayon OR, de même que ſur le rayon HR. Ainſi les deux circonférences étant toutes entieres, l'une à gauche & l'autre à droite de MN, ſe touchent en R & ne ſe coupent pas.

Dans le troiſieme cas (*fig.* 145), les deux rayons OR, HS étant enſemble plus grands que la droite OH aux extrêmités de laquelle ils tournent ; les deux circonférences doivent ſe couper (59). C. Q. F. D.

245. COROLLAIRE. *Si deux cercles* RCD, REF, *ſe touchent extérieurement ; la ligne* OH *qui joint les deux centres, paſſe par le point d'attouchement* R. (*fig.* 144.)

DÉMONSTRATION. La ligne OH ne peut pas être plus grande que

la ſomme des rayons; car autrement les deux cercles ne ſe couperoient ni ne ſe toucheroient (244) : elle ne peut être non plus, moindre que la ſomme des rayons; car autrement les cercles ſe couperoient (244) : donc il faut que OH ſoit égal à la ſomme des rayons. Prenant donc ſur OH, la partie OR égale au rayon du premier cercle; le reſte RH ſera le rayon du ſecond. Ainſi élevant en R la perpendiculaire MN, qui ſera tangente des deux cercles; ces deux cercles ſe couperont en R; & partant OH paſſera par le point R.

Proposition LVII

246. *Lorſque la poſition de deux cercles eſt telle que les deux centres ſe trouvent tous les deux dans l'un des cercles; s'il arrive que la ligne* HO (fig. 146), *qui joint les centres* H, O, *ſoit moindre que la différence des rayons* HS, OC; *les deux circonférences ne ſe touchent ni ne ſe coupent. Si la droite* HO (fig. 147), *eſt égale à la différence des rayons* HS, OS; *les deux circonférences ſe touchent ſans ſe couper. Si la ligne* HO (fig. 148), *eſt plus grande que la différence des rayons* HS, OR; *les deux circonférences ſe coupent.*

Démonstration. Dans le premier cas (*fig.* 146), je retranche du rayon HS la partie OH; & à cauſe que OH eſt moindre que la différence du rayon HS au rayon OC, il s'enſuit que le reſte OS eſt plus grand que le rayon OC. Ainſi le point S de la circonférence SEL, eſt en dehors de la circonférence RCD du rayon CO. Or à cauſe que le point O eſt entre le centre H du grand cercle & ſa circonférence SEL, & que la ligne SO prolongée paſſe par le centre H; la ligne SO eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point O à la circonférence SEL (232). Donc toutes les lignes qu'on pourroit mener du point O à la circonférence SEL, ſeroient, à plus forte raiſon, plus grandes que le rayon OS; & par conſéquent tous les points de la circonférence SEL, où ces lignes iroient aboutir, ſont hors de la circonférence RCD, & les deux circonférences ne peuvent ni ſe couper ni ſe toucher.

Dans le ſecond cas (*fig.* 147), je retranche du rayon HS la droite OH; & le reſte OS eſt égal au rayon du petit cercle : puiſque par la ſuppoſition, la droite OH eſt la différence de ces deux rayons. Donc les deux circonférences paſſent par le point S. Or, à cauſe que le point O eſt entre la circonférence SEL du grand cercle & ſon centre H, & que la droite SO prolongée paſſe par le centre H; cette droite SO eſt la plus courte qu'on puiſſe mener du point O à la circonférence SEL (232) : donc toutes les lignes qu'ou voudroit mener d'un point O à la circonférence SEL étant plus grandes que le rayon SO du

petit cercle, doivent ſortir hors de la circonférence SCD du petit; & partant les deux circonférences n'ayant de commun que le point S, ſe touchent en ce point, & ne ſe coupent pas.

Dans le troiſieme cas (*fig.* 148), je retranche du rayon HS, la droite OH; & comme cette droite eſt plus grande que la différence des rayons HS, OR; le reſte OS eſt plus petit que le rayon OR. Ainſi la circonférence SEL du grand cercle, paſſe entre le centre O, & la circonférence RCD du petit cercle. Or, comme nous ſuppoſons que le rayon HS du grand cercle eſt plus grand que le rayon QR du petit, & que le centre H du grand eſt en-deçà du centre O du petit par rapport aux points S, R; il eſt clair que ſi l'on prolonge les rayons SH, RO, en V & X, le rayon HV du grand cercle ira aboutir à un point V de ſa circonférence plus éloigné du centre O du petit, que le point X de la circonférence du petit, où ira aboutir le rayon OX du petit. Ainſi la circonférence SEL, ayant un point S en dedans du petit cercle, & un point V en dehors; ces deux circonférences doivent néceſſairement ſe couper. C. Q. F. D.

247. Corollaire. *Si deux cercles* SEL, SCD *ſe touchent intérieurement; la droite* HS *menée par les deux centres, paſſe par le point d'attouchement* S. (fig. 147.)

Démonstration. La droite HO, menée d'un centre à l'autre, ne peut pas être moindre que la différence de deux rayons: car ſi cela étoit, les deux cercles ne ſe toucheroient ni ne ſe couperoient (246); ce qui eſt contre la ſuppoſition. La même droite HO ne peut pas non plus être plus grande que la différence des deux rayons: car autrement les deux cercles ſe couperoient (246); ce qui eſt encore contre la ſuppoſition. Donc cette droite HO doit être égale à la différence des deux rayons: donc en prolongeant HO en S, juſqu'à la circonférence du grand cercle, & retranchant du rayon HS du grand cercle la droite HO; le reſte OS doit être le rayon du petit cercle; & par conſéquent les deux circonférences paſſent par le point S de la droite HS.

248. Problême. *Trouver la plus grande & la moindre diſtance de deux circonférences excentriques* SEL, RCD, *qui ne ſe coupent ni ne ſe touchent.* (fig. 149, 150.)

Solution. Je mene par les deux centres H, O, une droite SV qui ſe termine de part & d'autre à la circonférence du grand cercle; & la partie SR de ce diametre, compriſe entre les deux circonférences du côté du centre O du petit cercle, eſt la moindre diſtance des deux

circonférences ; & la partie TV, compriſe entre les deux circonférences du côté du centre H du grand cercle, eſt la plus grande diſtance : ce que je prouve ainſi.

Du centre O du petit cercle, je mene à tous les points de la grande circonférence des droites ON, OE, &c. Les points S, N, E, V, de la grande circonférence étant tous extérieurs au petit cercle ; leurs diſtances à la circonférence du petit cercle, ſont ſur les droites SO, NO, EQ, &c, menées de ces points par le centre O (238) : ainſi ces diſtances ſont les droites SR, NP, EQ, &c. Or, à cauſe que le point O eſt entre le centre H du grand cercle & ſa circonférence SNEL, la droite OS eſt la plus petite qu'on puiſſe mener du point O à la circonférence SNEL ; & les autres ON, OE, &c, vont en augmentant juſqu'à la derniere OV, qui eſt la plus grande (232). Donc ſi des lignes OS, ON, OE, OV, qui vont en augmentant, nous retranchons les droites OR, OP, OQ, OT, qui ſont toutes égales, à cauſe qu'elles ſont toutes rayons du petit cercle ; les reſtes, SR, NP, EQ, TV, iront encore en augmentant ; & par conſéquent SR ſera la plus petite diſtance, & TV la plus grande.

Il eſt viſible qu'on trouveroit la même choſe du côté de la demi-circonférence SLV.

Les figures 149 & 150 diffèrent en ce que dans la premiere, les deux centres O, H, ſont compris tous les deux dans le petit cercle ; & dans la ſeconde au contraire, les deux centres O, H, n'y ſont pas compris tous les deux : mais la démonſtration eſt la même pour l'un & l'autre cas.

PROPOSITION LVIII.

249. *La plus grande de toutes les cordes d'un cercle, eſt le diametre ; & les autres ſont d'autant plus petites, qu'elles ſont plus éloignées du centre* O, (fig. 151.)

DÉMONSTRATION. I°. Du centre O, je mene aux extrêmités de la corde CD, les rayons CO, OD : & dans le triangle COD, nous avons CO + OD plus grand que CD (95). Or, le diametre AB eſt égal aux deux rayons CO, OD, pris enſemble : donc le diametre eſt plus grand que la corde CD ; & ainſi des autres.

II°. Soient les deux cordes CD, HR, dont la ſeconde HR eſt plus éloignée du centre O que la corde CD. Je mene les rayons OC, OD, OH, OR ; & du centre O, les perpendiculaires ON, OM, ſur les cordes, leſquelles par conſéquent ſont diviſées chacune en deux parties égales (224). Or, dans le triangle rectangle NOC, j'ai $\overline{CO} =$

du ſegment, vaut la moitié de l'arc AHC de ce ſegment.

L'angle MAC du grand ſegment, & l'angle BAC du petit, valent enſemble deux droits (49), ou la moitié de la circonférence; c'eſt-à-dire la moitié de l'arc AHC du petit ſegment, plus la moitié de l'arc ANC du grand. Or l'angle BAC vaut la moitié de l'arc ACH: donc l'angle MAC du grand ſegment vaut la moitié de l'arc ANC de ce ſegment. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXI.

254. *Tout angle* ABC *dont le ſegment* B *eſt entre le centre & la circonférence, vaut la moitié de l'arc* AC *que ſes côtés, embraſſent, plus la moitié de l'arc* DE *qu'embraſſent ſes côtés prolongés au-delà du ſommet.* (fig. 154.)

DÉMONSTRATION. Je mene la droite EC: l'angle ABC, externe au triangle BCE, vaut les deux internes oppoſés BEC, BCE (97). Or, BEC ou AEC, ayant ſon ſommet E à la circonférence, vaut la moitié de l'arc AC (252); & par la même raiſon BCE ou DCE vaut la moitié de l'arc DE: donc l'angle ABC vaut la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc DE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXII.

255. *Tout angle* ABE, *dont le ſommet* B *eſt hors du cercle, vaut la moitié de l'arc* AC, *que ſes côtés embraſſent, moins la moitié de l'arc* DE, *qu'ils coupent.* (fig. 155.)

DÉMONSTRATION. Je mene la droite AE: l'angle AEC, extérieur au triangle ABE, vaut les deux internes oppoſés ABE, BAE (97): donc l'angle ABE ou ABC vaut l'angle AEC moins l'angle BAE. Mais l'angle à la circonférence AEC vaut la moitié de l'arc AC (252); & l'angle à la circonférence BAE ou DAE vaut la moitié de l'arc DE; donc l'angle ABC, vaut la moitié de l'arc AC, moins la moitié de l'arc DE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXIII.

256. *Tout angle* ABC *fait par une corde* AB *& par le prolongement* BC *d'une autre corde* EB, *vaut la moitié des deux arcs* BA, BE *ſoutenus par les cordes.* (fig. 156.)

DÉMONSTRATION. Par le point B, je mene la tangente MN qui coupe l'angle ABC en deux autres NBA, NBC. Or, l'angle NBA étant l'angle du ſegment BA, vaut la moitié de l'arc BA (253); & l'angle NBC étant égal à ſon oppoſé au ſommet MBE qui eſt l'angle du ſegment BE, vaut la moitié de l'arc BE: donc l'angle ABC vaut la moitié de l'arc BA, plus la moitié de l'arc BE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION

PROPOSITION LXIV.

257. *Tout angle* ABC *d'un ſegment eſt égal à l'angle* BRA *dans le ſegment oppoſé, c'eſt-à-dire dont le ſommet* R *eſt à la circonférence du ſegment oppoſé, & dont les côtés embraſſent l'arc* BSA *du petit ſegment.* (fig. 157.)

DÉMONSTRATION. L'angle ABC du ſegment BSA, vaut la moitié de l'arc BSA de ce ſegment (253) : or, l'angle BRA dans le ſegment oppoſé étant à la circonférence, vaut auſſi la moitié de l'arc BSA qu'il embraſſe : donc, &c. C. Q. F. D.

258. PROBLÊME I. *Couper dans un cercle, un ſegment capable de contenir un angle égal à un angle donné* MTN. (fig. 157.)

SOLUTION. D'un point quelconque B du cercle, je mene une tangente BC ; & je fais avec cette tangente au point B un angle CBA égal à l'angle donné MTN. Tout angle qui aura ſon ſommet à la circonférence du ſegment BRA, & qui embraſſera la corde BA, ſera égal à l'angle CBA du ſegment oppoſé (257) ; & par conſéquent égal à l'angle MTN.

259. PROBLÊME II. *Inſcrire dans un cercle un triangle* BAC, *ſemblable à un triangle donné* MTN ; *c'eſt-à-dire, faire que le triangle* BAC *ait les ſommets de ſes trois angles à la circonférence, & qu'il ſoit ſemblable à* MTN. (fig. 158.)

SOLUTION. A un point quelconque A de la circonférence, je mene une tangente Rs : je fais avec cette tangente au point A, d'un côté l'angle CAS égal à l'angle M, & de l'autre l'angle BAR égal à l'angle N ; & joignant les points B, C, où les côtés de ces angles coupent la circonférence par la droite BC ; le triangle ABC eſt ſemblable au triangle donné MTN.

Car l'angle ABC dans le ſegment ABC, eſt égal à l'angle SAC du ſegment oppoſé (257), & par conſéqent égal auſſi à l'angle M : de même l'angle ACB dans le ſegment ACB eſt égal à l'angle RAB du ſegment oppoſé, & partant égal à l'angle N : donc le troiſieme angle BAC, eſt égal au troiſieme T (98) ; & les deux triangles MTN, ABC ſont ſemblables.

260. PROBLÊME III. *Une droite* AB *étant donnée ; trouver le cercle dans lequel cette ligne étant miſe pour corde, coupe un ſegment capable de contenir un angle égal à un angle donné* T. (fig. 159.)

SOLUTION. A l'extrêmité A de la droite AB, je fais un angle CAB égal à l'angle donné T : du point A j'éleve ſur le côté CA une perpendiculaire indéfinie AR : du milieu S de la droite AB, j'éleve

la perpendiculaire SO qui coupe AR en O ; & de ce point O pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à la diſtance du point O au point A, je décris le cercle demandé ABR.

Car à cauſe que la perpendiculaire SO coupe AB en deux également ; le point O de cette perpendiculaire eſt également éloigné des extrêmités A, B, de la droite AB (56) : donc la circonference décrite avec le rayon OA paſſe par l'autre extrêmité B, & la droite AB eſt corde de ce cercle. Or AC étant perpendiculaire ſur OA, eſt tangente (242) : donc l'angle CAB eſt l'angle du petit ſegment ; & cet angle eſt égal à tout angle ARB qui ſeroit dans le grand ſegment ARB (257). Mais l'angle CAB eſt égal à l'angle donné T, par la conſtruction : donc le ſegment ARC, coupé par la droite AB, eſt capable de contenir un angle ARC égal à l'angle donné T.

261. PROBLÊME IV. *Inſcrire un cercle dans un triangle donné* ABC ; *c'eſt-à-dire, décrire un cercle qui touche les trois côtés du triangle.* (fig. 160.)

SOLUTION. Je diviſe les angles A, C, chacun en deux également par les droites AO, CO : du point O, où elles ſe coupent, j'abaiſſe ſur les trois côtés les perpendiculaires OT, OR, OS : de ce même point O pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à l'une des perpendiculaires OT, je décris un cercle TRS qui eſt le cercle demandé : ce que je prouve ainſi.

Les triangles rectangles AOT, AOR, ont l'hypothénuſe AO commune ; l'angle droit égal à l'angle droit ; & l'angle OAT égal à l'angle OAT par la conſtruction : donc le troiſieme angle eſt égal au troiſieme (98) ; & par conſéquent les deux triangles ſont parfaitement égaux (100) : ainſi la perpendiculaire OT eſt égale à la perpendiculaire OR. Par les mêmes raiſons, les triangles rectangles COT, COS, ſont parfaitement égaux ; & la perpendiculaire OS eſt égale à la perpendiculaire OT, & par conſéquent à la perpendiculaire OR. Ainſi la circonférence décrite avec le rayon OT, paſſe par les extrêmités R, S, des deux autres. Or les trois côtés du triangle ABC étant perpendiculaires ſur les rayons OT, OR, OS, ſont tangentes du cercle (242) : d'où il ſuit que le cercle eſt inſcrit comme on le demandoit.

262. PROBLÊME V. *Autour d'un cercle, circonſcrire un triangle* ABC *ſemblable à un triangle donné* mnr ; *c'eſt-à-dire décrire un triangle* ABC, *ſemblable au triangle* mnr, *& dont les trois côtés touchent le cercle.* (fig. 161.)

SOLUTION. Je prolonge de part & d'autre le côté *mr*, du triangle

mnr. Du centre O du cercle, je mene un rayon OH; & je fais en O, avec ce rayon, un angle TOH égal à l'angle extérieur *nmp*; & de l'autre côté, un angle VOH égal à l'autre angle extérieur *nrq*. Aux points T, H, V, j'éleve des perpendiculaires AB, AC, BC, qui en s'entre-coupant, forment le triangle demandé ABC: ce que je prouve ainſi.

Si les deux lignes TO, OH, étoient en ligne droite; les perpendiculaires BA, CA, ſur ces lignes, ſeroient paralleles (68): donc puiſque ces deux lignes s'inclinent entre elles, les perpendiculaires s'inclinent auſſi & doivent ſe couper en A: & on démontrera de même que les perpendiculaires BC, AC, ſur les droites OV, OH, qui ſont un angle, doivent ſe couper en C. Cela poſé,

Le quadrilatere ATOH étant compoſé de deux triangles ATO, AHO, ſes quatre angles valent enſemble quatre angles droits (97). Or, les deux ATO, AHO, ſont droits par la conſtruction: donc les deux autres TOH, TAH, valent deux droits. Mais l'angle *nmp*, & ſon angle de ſuite *nmr*, valent auſſi deux droits (49): donc les deux enſemble TOH, TAH, ſont égaux aux deux enſemble *nmp*, *nmr*: & retranchant d'une part l'angle TOH, & de l'autre l'angle *nmp*, égal à l'angle TOH, par la conſtruction; il reſte l'angle TAH, égal à l'angle *nmr*.

Par un ſemblable raiſonnement, on trouvera que dans le quadrilatere VOHC, l'angle VCH, eſt égal à l'angle *nrm*. Or, les angles *nmr*, *nrm*, du triangle *nrm*, valent enſemble moins de deux droits; puiſque les trois angles de ce triangle n'en valent que deux: donc les angles TAH, VCH, qui ſont égaux chacun à chacun aux angles *nmr*, *nrm*, valent enſemble moins de deux droits; & par conſéquent les côtés BA, BC, de ces angles, ne ſont pas paralleles (72), & doivent ſe couper en un point B. Ainſi le triangle ABC, ayant les deux angles ſur la baſe AC égaux aux deux angles ſur la baſe *mr* du triangle *nmr*; le troiſieme eſt égal au troiſieme (98); & les deux triangles ſont ſemblables: & il eſt viſible que le triangle ABC eſt circonſcrit; puiſque ſes côtés touchent le cercle. (242.)

PROPOSITION LXV.

263. *Si deux cordes* AB, CD, *ſont paralleles; les arcs* AC, BD, *compris entre ces deux cordes, ſont égaux.* (fig. 162.)

DÉMONSTRATION. Je mene du centre O, un diametre RS, perpendiculaire ſur l'une des cordes AB; & ce diametre eſt auſſi perpendiculaire ſur l'autre corde CD (68): donc il coupe les cordes & leur arc en deux également (224); & comme il coupe auſſi la cir-

conférence en deux également, l'arc SBDR eſt égal à l'arc SACR : & retranchant d'une part l'arc SB & l'arc DR, & de l'autre l'arc SA & l'arc CR, égaux chacun à chacun aux deux précédens ; il reſte l'arc BD égal à l'arc AC. Ce qu'il falloit démontrer.

264. COROLLAIRE I. *Si deux cordes paralleles* AB, CD *ſont égales ; les cordes* AC, DD, *des arcs interceptés, ſont auſſi paralleles & égales.* (fig. 162.)

DÉMONSTRATION. A cauſe de l'égalité des cordes AB, CD ; les arcs AB, CD, ſont égaux (251) : & parce que ces cordes ſont paralleles, les arcs compris AC, BD ſont égaux (263). Or, ces quatre arcs valent enſemble la circonférence entiere : donc les deux AB, BD, valent enſemble la demi-circonférence, de même que les deux DC, CA ; & partant l'angle à la circonférence ACD, qui embraſſe les deux premiers AB, BD, vaut la moitié de la demi-circonférence (252) ; c'eſt-à-dire un angle droit. Par la même raiſon, l'angle ABD eſt auſſi droit : donc les cordes AC, BD, étant perpendiculaires chacune ſur l'une des paralleles, ſont auſſi perpendiculaires ſur l'autre (68) ; & par conſéquent elles ſont paralleles & égales.

265. COROLLAIRE II. *Si aux extrêmités* A, C, *d'une corde* AC, *on éleve deux perpendiculaires indéfinies ; ces perpendiculaires couperont le cercle aux points* B, D ; *& leurs parties* BA, DC, *compriſes dans le cercle, ſeront deux cordes paralleles & égales* (fig. 163.)

DÉMONSTRATION. Du centre O, je mene OH perpendiculaire ſur AC, & ROS parallele à AC. Les trois lignes AB, HO, CD, perpendiculaires ſur AC, ſont paralleles entre elles (68) : & partant les lignes RS, AC, paralleles entre ces trois lignes, ſont égales & également inclinées (77) ; c'eſt-à-dire, RS égale à AC eſt perpendiculaire ſur les trois ; & de plus, elle eſt diviſée en deux également en O, par la droite OH qui diviſe la corde AC en deux également (153, 224) ; Or la corde AC étant plus petite que le diametre (249) ; ſa moitié AH eſt moindre que le rayon : donc RO ou OS, égale à AH, eſt moindre que le rayon ; & partant les droites AB, CD, qui paſſent par les extrêmités R, S, des droites RO, OS, ſont dans le cercle, & doivent le couper en B & D ; & comme les diſtances OR, OS du centre à ces lignes, ſont égales, il s'enſuit que AB, CD, ſont deux cordes paralleles & égales.

266. COROLLAIRE III. *Si l'on coupe deux cordes* AB, CD, *paralleles & égales, par un diametre* POX *qui leur ſoit oblique ; les parties inégales* BT, TA, *que ce diametre coupe ſur l'une* AB, *ſont égales*

chacune à chacune aux parties CV, VD, *qu'il coupe ſur l'autre* CD. (*fig.* 163.)

Demonstration. Du centre O, je mene la droite RS perpendiculaire ſur les cordes AB, CD, & qui par conſéquent les coupe chacune en deux parties égales (224). Ainſi à cauſe de AB = CD, nous avons BR ou RA = DS ou SC, & OR = OS (250). Les triangles rectangles ROT, SOV, étant ſemblables, à cauſe de l'angle droit ORT égal à l'angle droit OSV, de l'angle ROT égal à l'angle SOV qui lui eſt oppoſé au ſommet, & du troiſieme angle égal par conſéquent au troiſieme, donnent OR. OS :: TR, VS. Mais OR = OS : donc TR = VS; & ajoutant à TR la moitié BR de la corde AB, & à VS la moitié SC de la corde CD, nous aurons BT = CV : donc à cauſe de AB = DC, nous aurons auſſi AB — BT = CD — CV, ou AT = VD.

267. Problême. *D'un point extérieur mener une tangente à un cercle.* (164.)

Solution. Du point R, je mene au centre O la droite RO, que je diviſe en deux également en T : du point T pris pour centre, & avec une ouverture de compas égale à TR ou TO, je décris un cercle qui coupe le cercle donné ABCD en deux points A, C (244) : du point R, je mene aux points A, C les droites RA, RC, qui ſont l'une & l'autre tangentes du cercle.

Car menant le rayon OC, l'angle RCO à la circonférence du cercle RCOA, vaut la moitié de l'arc ou demi-circonférence OAR qu'il embraſſe (252); & par conſéquent il eſt droit : donc la droite RC, perpendiculaire ſur l'extrêmité du rayon OC, eſt tangente du cercle ABCD au point C (242); & on prouvera de même que AR eſt tangente en A.

268. Corollaire. I. *D'un point extérieur* R, *on ne peut mener que deux tangentes.* (fig. 164.)

Demonstration. Toute autre ligne qu'on meneroit entre les tangentes RC, RA, couperoit néceſſairement ou le rayon OC, ou le rayon OA, en un point plus près du centre O, & paſſeroit dans le cercle : & ſi on la menoit au-delà des tangentes, il eſt clair qu'elle ne pourroit ni couper ni toucher le cercle.

269. Corollaire II. *Les deux tangentes* AC, RA, *qu'on peut mener d'un même point extérieur* R, *ſont égales entre elles.* (fig. 164.)

Demonstration. Les triangles rectangles ROC, ROA, ont l'hy-

pothénuſe RO commune, & le côté OC égal au côté OA : donc ils ſont parfaitement égaux (102), & le côté RA eſt égal au côté RC.

270. COROLLAIRE III. *Si l'on joint par une droite* CA *les points d'attouchement* C, A, *de deux tangentes égales, menées d'un même point extérieur* R ; *cette droite* CA *ſera coupée en deux également & perpendiculairement par la ſécante* ROD, *menée du même point* R *par le centre* O. (*fig.* 164.)

DEMONSTRATION. Les tangentes RC, RA, étant égales ; le point R de la ſecante RD, eſt également éloigné des extrêmités A, C de la droite CA : & à cauſe des rayons égaux CO, AO, le point O de la ſécante eſt auſſi également éloigné des mêmes extrêmités A, C : donc la droite ROD eſt perpendiculaire ſur CA (58), & la coupe en deux également.

D'où il ſuit que la ſécante RD qui paſſe par le centre, & la tangente RC menée du même point R, étant données ; on peut trouver le point A, où l'autre tangente touche le cercle, en menant du point C, une ligne droite CA qui ſoit perpendiculaire ſur la ſécante.

PROPOSITION LXVI.

271. *Une ſécante* RD, *& une tangente* RC, *étant menées d'un même point extérieur* R ; *le rectangle* RA×RD *de la partie extérieure par la ſécante entiere, eſt égal au quarré de la tangente* RC. (*fig.* 165.)

DÉMONSTRATION. Je mene les droites AC, CD. Les triangles RAC, RDC, ont l'angle R commun ; l'angle RCA du ſegment AC, égal à l'angle RDC dans le ſegment oppoſé (257) : donc le troiſieme angle eſt égal au troiſieme, & les deux triangles ſont ſemblables. Comparant donc les côtés oppoſés aux angles égaux, nous aurons RA. RC : : RC. RD : ainſi faiſant le produit des extrêmes & le quarré de la moyenne, nous aurons RA×RD=$\overline{RC}$. Ce qu'il falloit démontrer.

272. COROLLAIRE I. *Si du même point on mene au cercle tant de ſécantes qu'on voudra ; tous les rectangles des ſécantes, par leurs parties extérieures, ſeront égaux.* Ces rectangles ſeront égaux chacun au quarré de la tangente : donc, &c.

273. COROLLAIRE II. *La partie extérieure d'une ſécante & la ſécante, ſont réciproques à la partie extérieure d'une autre ſécante & à cette ſeconde ſécante.* Le rectangle de la premiere par ſa partie extérieure, eſt égal au rectangle de la ſeconde par ſa partie extérieure : donc, &c. (185.)

274. COROLLAIRE III. *Si après avoir mené deux ſécantes d'un*

même point R, *on joint les points où elles coupent le cercle par les droites* CS, MT (fig. 166), *ou par les droites*, CT, MS (fig. 167); *on aura dans la figure* 166 *deux triangles* CRS, MRT, *dont les baſes feront avec les côtés, des angles égaux chacun à chacun, mais d'un ſens oppoſé: c'eſt-à-dire, l'angle fait par la baſe* CS *avec le côté* RS, *eſt égal à l'angle fait par la baſe* TM *avec le côté* RM; *& l'angle fait avec le côté* RC *par la baſe* CS, *eſt égal à l'angle fait par la baſe* MT *avec l'autre côté* RT: *& les mêmes choſes arriveront dans la figure* 167.

DÉMONSTRATION. Dans la figure 166, l'angle R eſt commun aux deux triangles RCS, RMT; & l'angle RSC fait par la corde CS & le prolongement RS de la corde ST, vaut la moitié des arcs CS, ST, ou de l'arc CT (256), de même que l'angle à la circonférence CMT (252): donc le troiſieme angle de l'un eſt égal au troiſieme angle de l'autre; c'eſt-à-dire l'angle RCS eſt égal à l'angle RTM.

Dans la figure 167, les deux triangles RCT, RSM, ont l'angle commun R, l'angle RTC à la circonférence égal à l'angle RMS auſſi à la circonférence, & qui embraſſe le même arc CS (252): donc le troiſieme RCT eſt égal au troiſieme RSM.

Il faut obſerver ici que ſi du point C (*fig.* 165), où une tangente RC touche un cercle, on mene deux droites CA, CD, aux points A, D, où une ſécante RD qui part du même point R, coupe le cercle: on aura auſſi deux triangles RAC, RDC, dont les baſes AC, CD, feront avec les côtés des angles égaux chacun à chacun, mais d'un ſens différent. Car l'angle R eſt commun; l'angle RCA étant angle du ſegment CA, vaut la moitié de l'arc CA (253), de même que l'angle ADC ou RDC qui eſt à la circonférence (252): donc le troiſieme RAC eſt égal au troiſieme RCD.

275. *REMARQUE.* Lorſqu'un angle eſt coupé par deux baſes qui font avec les côtés, des angles égaux chacun à chacun, mais d'un ſens oppoſé; ces baſes ſont dites *antiparalleles*, par quelques Auteurs. Elles peuvent avoir trois différentes diſpoſitions: car dans la figure 166, les baſes CS, MT, ne ſe coupent point entre les côtés de l'angle MRT: dans la figure 167, les baſes CT, SM, ſe coupent entre les côtés MR, RT; & dans la figure 165, les baſes CA, CD, partent d'un même point du côté RC.

Dans les diſpoſitions des figures 166, 167; le rectangle de la partie RC par le côté entier RM, eſt égal au rectangle de la partie RS par le côté entier RT: car comparant les côtés homologues des triangles ſemblables RCS, RMT, de la figure 166, ou des triangles ſem-

blables RCT, RSM de la figure 167; on aura RS. RC :: RM. RT; donc RS×RT = RC×RM.

Dans la diſpoſition de la figure 165; le rectangle de la partie RA par le côté entier RD, eſt égal au quarré de l'autre côté RC: car la comparaiſon des côtés homologues des triangles ſemblables RAC, RCD, donne RA. RC :: RC. RD; & partant RA × RD = $\overline{RC}^2$. On ſe ſert des baſes antiparalleles, pour réſoudre les problêmes ſuivans.

276. PROBLÊME I. *Couper deux lignes inégales données* RM, RT, *chacune en deux parties; de façon que le produit de la ligne* RM *par l'une de ſes parties, ſoit égal au produit de la ligne* RT *par l'une de ces parties.* (fig. 168.)

SOLUTION. Je fais un angle quelconque, dont les lignes RM, RT ſoient les côtés: je mene la ligne MT; & au ſommet T du plus grand des deux angles RTM, je fais avec RT, un angle RTH égal à l'angle RMT. D'un point quelconque S pris ſur RT, je mene une droite SC parallele à TH, & qui coupe RM en C. Les lignes RM, RT, ſont coupées en C & S; comme on le demandoit: ce que je prouve ainſi.

A cauſe que les côtés RM, RT, du triangle MRT, ſont inégaux; l'angle RTM, oppoſé au plus grand côté RM, eſt plus grand que l'angle RMT, oppoſé à l'autre côté RT. Ainſi on peut toujours retrancher de l'angle RTM, un angle RTH égal à l'angle RMT par une droite TH qui coupera RM entre ſes extrêmités R, M; & à plus forte raiſon la droite SC, parallele à TH, coupera la même RM entre R & M. Cela poſé,

Les angles CSR, HTR, faits par les paralleles CS, HT, du même côté avec la droite RT, ſont égaux (71). Or, par la conſtruction, l'angle RTH eſt égal à l'angle RMT: donc l'angle CSR du triangle RCS, eſt égal à l'angle MRT du triangle RMT. Mais ces deux triangles ont auſſi l'angle R commun: donc le troiſieme angle RCS eſt égal au troiſieme angle RTM; & par conſéquent les baſes CS, MT, étant antiparalleles, nous avons RC × RM = RS × RT (275), ou RC, RM, réciproques à RS, RT.

Ce problême eſt indéterminé & ſuſceptible d'une infinité de ſolutions. Car il eſt libre de mener la parallele SC, de tel point S qu'on voudra de la droite RT: ce qui par conſéquent peut faire que les lignes RM, RT, ſoient diviſées d'une infinité de façons différentes, chacune en deux parties.

277. PROBLÊME II. *Une ligne* RM *étant diviſée en deux parties inégales*

inégales RC, CM ; *trouver une autre ligne auſſi diviſée en deux parties inégales, de façon que le rectangle de la partie* RC *par la toute* RM, *ſoit égale au rectangle de l'une des parties de la ligne demandée par toute cette ligne.* (fig. 169.)

SOLUTION. Je décris ſur la partie CM de la ligne RC, un triangle iſoſcele quelconque COM : c'eſt-à-dire, des points C, M, pris pour centres, & avec une ouverture de compas telle que je veux, pourvu qu'elle ſoit plus grande que la moitié de CM, je décris deux arcs qui ſe coupent en un ſeul point O du même côté (59). Du point O pris pour centre, & avec le rayon OC ou OM, je décris un cercle ; & toutes les ſécantes RX, RT, &c, menées du point R au cercle, réſoudront le problême : car le rectangle de chacune d'elles par ſa partie extérieure, ſera toujours égal au rectangle RC × RM. (271.)

Ce problême eſt indéterminé, non-ſeulement parce qu'on peut mener une infinité de ſécantes au cercle du rayon OC ; mais parce que ce rayon OC pouvant être de telle grandeur qu'on voudra, pourvu qu'il ſoit plus grand que la moitié de CM, on peut décrire une infinité de cercles différens, dans leſquels RM ſera toujours ſécante, & dans leſquels auſſi on pourra mener du point R une infinité de ſécantes, qui toutes ſatisferont à la queſtion.

278. PROBLÊME III. *Deux lignes inégales* RM, RT *étant données, & dont l'une* RM *eſt diviſée en deux parties* RC, CM, *couper l'autre* RT *en deux parties, de façon que le rectangle de l'une de ſes parties par la toute* RT *ſoit égal au rectangle de la partie* RC *par la toute* RM. (fig. 168.)

SOLUTION. Je fais un angle quelconque à volonté, dont les côtés RM, RT, ſoient égaux aux deux lignes données : je mene la baſe MT ; & au point C je fais avec RC, un angle égal à l'angle RTM. Si le côté CS de cet angle, coupe RT en un point S entre ſes extrêmités R, T ; le problême eſt réſolu. Mais ſi ce côté paſſe par l'extrêmité T de RT, ou qu'il coupe RT prolongé au-delà de T en X ; le problême eſt impoſſible : ce que je prouve ainſi.

Si le point S eſt entre R & T ; les triangles RCS, RMT, ayant l'angle R commun, & l'angle RCS égal à l'angle RTM, par la conſtruction ; le troiſieme angle RSC eſt égal au troiſieme RMT : & les baſes SC, TM, étant anti-paralleles, nous avons RC. RS :: RT. RM : donc RC × RM = RS × RT.

Si l'angle RCT eſt égal à l'angle RTM, les deux triangles RCT, RTM, auront leurs baſes TC, TM, anti-paralleles ; & partant RC × RM = $\overline{RT}$. Or comme toute partie de RT, eſt moindre que RT ;

& que par conſéquent le rectangle de RT par l'une de ces parties, ſera toujours moindre que RT × RT ou $\overline{RT}$; il eſt clair qu'on ne peut pas diviſer RT comme on le demande.

Enfin ſi l'angle RCX eſt égal à l'angle RTM; les triangles RCX, RTM, auront les baſes anti-paralleles : & partant RC × RM = RT × RX. Or, à cauſe de RX plus grand que RT, nous aurons RT × RX plus grand que RT × RT ou $\overline{RT}$; & par conſéquent le problême eſt encore impoſſible.

Au reſte, dans le cas où le problême eſt poſſible, il n'y a qu'une ſeule ſolution : c'eſt-à-dire, la partie RS de la droite RT, ne peut être ni plus grande ni moindre. Car le produit de RT par une partie plus grande que RS, ſera plus grand que le produit RT × RS = RC × RM; & le produit de RT par une partie moindre que RS, ſera plus petit que RT × RS = RC × RM. Ce problême a été réſolu d'une autre façon ci-deſſus (187).

PROPOSITION LXVII.

279. *Si deux cordes* AB, CD, *d'un même cercle ſe coupent; elles ſe coupent en parties réciproques : c'eſt-à-dire le rectangle* AH × HB *des parties* AH & HB *de l'une, eſt égal au rectangle* DH × HC *des parties de l'autre.* (fig. 171.)

DÉMONSTRATION. Je joints les extrémités des cordes, par les droites AD, CB. Les triangles AHD, CHB, ont l'angle AHD, égal à l'angle CHB qui lui eſt oppoſé au ſommet; & l'angle à la circonférence DAH ou DAB, égal à l'angle à la circonférence BCH ou BCD (252): donc le troiſieme angle eſt égal au troiſieme; & les deux triangles ſont ſemblables. Ainſi comparant les côtés homologues, nous aurons AH . HD :: HC . HB; & par conſéquent nous aurons auſſi AH × HB = HD × HC. Ce qu'il falloit démontrer.

280. PROBLÊME. *Trouver à deux lignes* AH, HB, *deux autres lignes qui leur ſoient réciproques.* (fig. 171.)

SOLUTION. Je décris un cercle avec un rayon à volonté, égal ou plus grand que la moitié des deux lignes AH, AB, dont je fais une ſeule ligne droite AB. Je prends avec le compas la grandeur de la ligne AB, & je la porte ſur la circonférence du cercle de A en B : du point H, je mene une corde CHD comme je veux, & les deux parties CH, HD, de cette corde, ſont les lignes demandées. Ce que je prouve ainſi.

A cauſe que le rayon du cercle eſt ou égal ou plus grand que la moitié de la ſomme AB des droites AH, HB; cette ſomme AB ourra toujours être contenue dans la circonférence, & ſera ou dia-

metre ou corde : & comme les deux cordes AB, CD, ſe couperont; nous aurons AH × HB = DH × HC (279). Donc, &c.

Ce problême eſt ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, non-ſeulement à cauſe qu'on peut mener du point H une infinité de cordes au cercle, leſquelles ſatisferont toutes à la queſtion; mais encore parce qu'on peut décrire une infinité de cercles différens, dans leſquels AB peut être contenue, & dans leſquels on pourra mener du point H une infinité de différentes cordes.

Mais ſi on donnoit les deux droites AH, HB, & la ſomme DC des deux autres; ou ce qui revient au même, ſi on donnoit la droite AB, & la droite DC, & qu'on propoſât de couper DC en parties réciproques aux parties AH, HB de AB; le problême ſeroit abſolument déterminé, comme nous l'avons fait voir ci-deſſus (187, 278), où nous en avons donné la ſolution.

PROPOSITION LXVIII.

281. *Deux cordes* AB, CD *d'un même cercle ne peuvent pas ſe couper toutes les deux en deux parties égales.* (fig. 171.)

DÉMONSTRATION. Si cela étoit, la droite menée du centre O au point H, ſeroit perpendiculaire ſur la corde AB; puiſqu'elle ſeroit coupée en deux également (224); & par la même raiſon elle ſeroit perpendiculaire ſur la corde CD : donc une même ligne OH ſeroit perpendiculaire ſur deux lignes AB, CD, qui ſe coupent : ce qui eſt impoſſible (57.)

PROPOSITION LXIX.

282. *Dans tout quadrilatere, formé par quatre cordes d'un même cercle; ſi l'on mene les deux diagonales, la ſomme des rectangles des côtés oppoſés, eſt égale au rectangle des deux diagonales.*

DÉMONSTRATION. Cette propoſition contient pluſieurs cas, que nous allons démontrer en particulier.

En premier lieu, ſi les quatre cordes forment un quarré ABCD (*fig.* 174); l'angle à la circonférence ABC étant droit, embraſſe la demi-circonférence, & par conſéquent la diagonale AC eſt un diametre. Par la même raiſon la diagonale DB eſt auſſi un diametre; & ces deux diagonales égales ſe coupent au centre O, & diviſent le quarré en quatre triangles rectangles iſoſceles & égaux. Or, le triangle rectangle DOC étant ſemblable au triangle rectangle ABC, à cauſe que celui-ci eſt auſſi iſoſcele ; nous avons DO . DC : : AB . AC : donc DO × AC = DC × AB. De même les triangles ſemblables BOC, DAC, donnent BO . BC : : DA . AC : donc BO × AC =

BC × DA ; & ajoutant les membres de cette équation aux membres de la précédente, chacun à chacun, nous aurons DO × AC + BO × AC = DC × AB + BC × DA. Mais DO × AC + BO × AC eſt la même choſe que DO + BO, ou DB multiplié par AC : donc DB × AC = DC × AB + BC × DA.

En ſecond lieu, ſi les quatre cordes forment un rectangle ABCD (*fig.* 173); la corde BC ſera donc plus grande que la corde AB; car autrement la figure ſeroit un quarré; & l'arc BC ſera plus grand que l'arc AB : donc l'angle à la circonférence BDC ſera plus grand que l'angle à la circonférence BDA. Je fais en D, avec la corde DC, un angle CDE égal à l'angle BDA; & ajoutant de part & d'autre le petit angle EDB, j'ai l'angle CDB égal à l'angle EDA. Les triangles ADE, BDC, ſont ſemblables, à cauſe de l'angle à la circonférence DAC égal à l'angle à la circonférence DBC, puiſqu'ils embraſſent le même arc DC, & de l'angle ADE égal à l'angle BDC, par la conſtruction. Donc AE . AD :: BC . BD; & partant AE × BD = AD × BC. De même les triangles EDC, BAD, ſont ſemblables; à cauſe de l'angle EDC égal à l'angle BDA, par la conſtruction, & de l'angle à la circonférence DCE ou DCA égal à l'angle à la circonférence ABD : car ces angles embraſſent le même arc AD. Donc EC . DC :: AB . BD; ce qui donne EC × BD = DC × AB : & ajoutant les membres de cette équation à ceux de la précédente, nous aurons AE × BD + EC × BD = AD × BC + DC × AB; c'eſt-à-dire, AC × BD = AD × BC + DC × AB.

En troiſieme lieu, les quatre cordes ne peuvent pas former un parallélogramme. Car les deux grands arcs ſoutenus par les deux grands côtés paralleles, ſeroient égaux; & les deux petits arcs ſoutenus par les deux petits côtés paralleles, ſeroient auſſi égaux : & comme ces quatre arcs compoſeroient la circonférence, la ſomme d'un grand & d'un petit vaudroit la demi-circonférence; & par conſéquent l'angle à la circonférence, fait par un grand côté & un petit, embraſſeroit la demi-circonférence & ſeroit droit : ce qui eſt contre la ſuppoſition.

En quatrieme lieu, ſi les cordes forment un trapézoïde ABCD (*fig.* 175), il n'arrivera jamais que les quatre angles ſoient diviſés en deux également par les diagonales. Car ſi les angles DAC, CAB, étoient égaux; les arcs CD, CB, ſeroient égaux entre eux, & à l'arc DA égal à l'arc CB, à cauſe des paralleles CD, BA (263) : & ſi outre cela les angles CDB, BDA, étoient égaux; l'arc CB ſeroit égal à l'arc BA, & par conſéquent les quatre arcs ſeroient égaux, & la figure ſeroit un quarré. Cela poſé, ſuppoſons que l'angle BDA

ſoit plus grand que l'angle CDB : je fais en D avec le côté AD, un angle ADE égal à l'angle CDB ; & ajoutant de part & d'autre le petit angle EDB, j'ai l'angle CDE égal à l'angle ADB. Ainſi les triangles ADE, CDB, ſemblables, à cauſe de l'angle ADE égal à l'angle CDB, & de l'angle EAD égal à l'angle CBD, donnent AE . AD :: BC . BD : d'où l'on tire AE × BD = AD × BC. Or, les triangles CDE, DBA, ſemblables à cauſe de l'angle CDE égal à l'angle BDA, & de l'angle ECD égal à l'angle DBA, donnent CE . CD :: BA . BD : d'où je tire CE × BD = CD × BA ; & partant nous aurons comme ci-deſſus, AE × BD + CE × BD = AD × BC + CD × BA ; c'eſt-à-dire, AC × BD = AD × BC + CD × BA.

Enfin, ſi quatre cordes forment un trapeze ABCD (*fig.* 172), on démontrera encore plus aiſément que dans le cas précédent, que les quatre angles ne peuvent pas être diviſés par les diagonales chacun en deux également : & par conſéquent faiſant la même conſtruction, on trouvera encore AC × BD = AD × BC + CD × BA. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXX.

283. *Si d'un point quelconque* R *d'une circonférence, on abaiſſe une perpendiculaire* RM *ſur un diametre* AB ; *le quarré de cette perpendiculaire eſt égal au rectangle des parties* AM, MB, *du diametre qu'elle coupe.* (fig. 176.)

DÉMONSTRATION. Des extrêmités A, B, du diametre AB, je mene les cordes AR, BR. L'angle à la circonférence ARB vaut la moitié de la demi-circonférence qu'il embraſſe (252) ; & par conſéquent eſt droit : donc le triangle ARB eſt rectangle. Or, la droite RM eſt menée perpendiculairement du ſommet R de l'angle droit ſur l'hypothénuſe : donc cette perpendiculaire eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens AM, MB de l'hypothénuſe (169). Ainſi nous avons AM . MR :: MR . MB ; ce qui donne AM × MB = $\overline{MR}$. Ce qu'il falloit démontrer.

284. COROLLAIRE. I. *Le quarré de la même perpendiculaire* RM, *eſt égal au quarré du rayon* OA *moins le quarré de la partie* OM *interceptée entre le centre* O *& le point* M. (fig. 176.)

DÉMONSTRATION. Le diametre AB étant diviſé en deux également en O, & en deux inégalement en M ; nous avons AM × MB = $\overline{AO}$ — $\overline{MO}$ (146) : or, AM × MB = $\overline{MR}$ (283) : donc $\overline{MR}$ = $\overline{AO}$ — $\overline{MO}$.

285. COROLLAIRE II. *La corde* AR *eſt moyenne proportionnelle entre le ſegment* AM *du diametre & le diametre ; & l'autre corde* RB *eſt moyenne proportionnelle entre le ſegment* BM, *& le diametre.* Le triangle ARC eſt rectangle ; & la droite RM eſt menée du ſommet de l'angle droit ſur l'hypothénuſe AB : Donc, &c. (170.)

COROLLAIRE III. *On peut donc au moyen de ceci trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, de deux façons différentes de celle que nous avons enſeignée ci-deſſus* (182.)

DÉMONSTRATION. Par exemple, ſi l'on demande une moyenne proportionnelle entre les deux lignes AM, MB; je les ajoute l'une à l'autre en ligne droite : je coupe la ſomme AB en deux également en O (*Fig.* 176) : du point O, pris pour centre, & avec le rayon OA ou OB, je décris un demi-cercle ARB ; & élevant en M la perpendiculaire MR, cette perpendiculaire eſt la moyenne proportionnelle demandée (283.)

Que ſi l'on demande une moyenne proportionnelle entre AB & ſa partie AM ; je décris un demi-cercle ARB ſur la grande AB priſe pour diametre : du point M, j'éleve la perpendiculaire MR ; & la corde AR eſt la moyenne demandée (285.)

PROPOSITION LXXI.

286. *Les circonférences de cercles concentriques* ABC, efh, *ſont paralleles.* (fig. 177.)

DÉMONSTRATION. De tous les points de la circonférence *efh*, je conçois des lignes menées au centre O, & prolongées juſqu'à la circonférence ABC. Les diſtances des points *e*, *f* &c, de la circonférence *efh* à la circonférence ABC, ſeront donc les droites A*e*, B*f* (234). Or, ces droites ſont égales : puiſqu'elles ſont les différences des rayons égaux AO, BO, &c, aux rayons égaux *e*O, *f*O du petit cercle. Donc tous les points de la petite circonférence ſont également éloignés de la grande, & partant ces deux circonférences ſont paralleles.

PROPOSITION LXXII.

287. *Tous les cercles ſont ſemblables entre eux.* (fig. 177.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux cercles ABC, EFH. Je les rends concentriques : c'eſt-à-dire, du centre O du grand, & avec un rayon O*e*, égal au rayon OE, je décris une circonférence *efh* ; & le cercle *efh* eſt par conſéquent le même que le cercle EFH. Ainſi

il s'agit de faire voir que les deux cercles concentriques ABC, *efh*, ſont ſemblables entre eux.

Je conçois que la circonférence ABC ſoit diviſée en une infinité de petits arcs égaux, tels que AB : & menant des points de diviſion A, B, &c, des rayons au centre; ces rayons coupent la circonférence *efh* en un même nombre de petits arcs tous égaux entre eux, tels que *ef*. Je mene les cordes des arcs dans l'un & l'autre cercle; & à cauſe de l'égalité des arcs, les cordes du premier cercle ſont toutes égales entre elles, de même que les cordes du ſecond : ce qui fait que dans le grand cercle tous les petits triangles iſoſceles AOB, &c, faits par les rayons & les cordes, ſont tous égaux entre eux (100); de même que les petits triangles *eOf*, &c, faits par les rayons & les cordes du petit; & que chaque triangle AOB du grand, eſt ſemblable à chaque triangle *eOf* du petit, à cauſe de l'angle commun O, & des baſes paralleles AB, *ef*.

Ainſi nous avons dans les deux cercles, deux polygones réguliers d'un même nombre infini de côtés, & partant ſemblables entre eux. Mais à cauſe de l'infinie petiteſſe des arcs AB, &c, du grand cercle; les cordes de ces arcs en ſont infiniment proches, & ſe confondent avec eux, de façon que l'on peut prendre les cordes pour les arcs; & il en eſt de même à l'égard du petit cercle : donc nous pouvons prendre les polygones pour les cercles mêmes. Or, dans les polygones ſemblables, les circuits ſont entre eux comme les rayons (165): donc les circonférences ABC, *efh*, qui ſont ici les mêmes que les circuits des polygones, ſont entre elles comme les rayons AO, *eo*; & par conſéquent les cercles ſont ſemblables, & ainſi des autres. C. Q. F. D.

288. COROLLAIRE. I. *Si l'on mene des tangentes* MN, RS, *à deux ou pluſieurs cercles inégaux; les points d'attouchement* A, e, *ſont proportionnels aux circonférences ou aux rayons.* (fig. 177.)

DÉMONSTRATION. Les côtés des polygones ſemblables d'un nombre infini de côtés, qui compoſent les deux cercles, ſont infiniment petits : donc chacun de ces côtés ou chaque arc eſt un point de ſa circonférence. Or, les côtés des polygones ſemblables ſont entre eux comme leurs circuits ou comme leurs rayons : donc les points A, *e*, des circonférences, ſont auſſi entre eux comme leurs rayons.

REMARQUE. On ne pourroit concevoir ceci, ſi l'on diſoit comme Euclide, que les lignes n'ont point de largeur : mais dès-lors que nous leur en donnons une, quelque petite qu'elle ſoit; on s'apperçoit que les points de lignes menées de tous les points de la grande

circonférence au centre, anticipent ſur les points des lignes voiſines de plus en plus à meſure qu'elles approchent du centre : & que par conſéquent, eu égard à ces anticipations, les points dans leſquels une petite circonférence eſt coupée, ſeront plus petits.

289. COROLLAIRE II. *Les ſegmens dont les arcs comprennent un même nombre de dégrés de leurs circonférences, ſont ſemblables entr'eux ; & il faut dire la même choſe des ſecteurs.* (fig. 178.)

DÉMONSTRATION. Soient les ſegmens ABC, *abc*, dont le centre commun eſt au point O. Il eſt clair que les arcs ABC, *abc* ſeront entre eux comme leurs circonférences ou comme leurs rayons (287) : puiſqu'ils contiennent un même nombre de dégrés de leurs circonférences. Or, les triangles ACO, *ac*O, ayant l'angle O commun, & les baſes paralleles, ſont ſemblables ; & donnent AC, *ac* :: AO, *a*O : donc les cordes AC, *ac* ſont entre elles comme les arcs ABC, *abc*, & par conſéquent les lignes qui comprennent les ſegmens ſont proportionnelles. Il ne reſte donc plus qu'à faire voir que les angles faits par ces lignes, c'eſt-à-dire les angles mixtilignes faits par les cordes avec les arcs, ſont égaux. Et pour cela :

Concevons que l'arc ABC ſoit diviſé en une infinité de petits arcs tous égaux ; & que des points de diviſion ſoient menés au centre, des rayons qui diviſeront l'arc *abc* en un même nombre d'arcs égaux, qui vaudront chacun autant par rapport à leurs circonférences, que chaque petit arc de l'arc ABC par rapport à la ſienne. Concevons encore que des points A, *a*, ſoient menées des droites AH, AR, AB, &c, *ah*, *ar*, *ab*, &c. Tous les angles que ces lignes feront entre elles, & qui auront leurs ſommets aux circonférences aux points A, *a*, ſeront égaux : puiſqu'ils embraſſent des arcs de même valeur. Ainſi, tous les angles CAH, HAR, &c, compris dans le ſegment ABC, ſeront égaux à tous les angles *cah*, *har*, &c, compris dans le ſegment *abc*. Mais tous les angles CAH, HAR, &c, compoſent enſemble l'angle mixtiligne CAB ; & tous les angles *cah*, *har*, &c, compoſent l'angle mixtiligne *cab* : donc l'angle mixtiligne CAB, eſt égal à l'angle mixtiligne *cab* ; & on prouvera la même choſe des autres angles mixtilignes ACB, *acb* : d'où il ſuit que les ſegmens ABC, *abc*, ayant les côtés proportionnels & les angles égaux, ſont ſemblables.

Dans les triangles ſemblables AOC, *a*O*c*, l'angle OAC eſt égal à l'angle O*ac* : ajoutant donc l'angle OAC à l'angle mixtiligne CAB, & l'angle O*ac* à l'angle mixtiligne *cab* ; l'angle mixtiligne OAB du ſecteur OAC, ſera égal à l'angle mixtigne O*ab* du ſecteur O*ac* ;

O*ac*; & par la même raiſon l'autre angle OCB mixtiligne eſt égal à l'angle mixtiligne O*cb*. Or, les arcs & les rayons de ces ſecteurs, ſont proportionnels : Donc ces ſecteurs ſont ſemblables.

290. COROLLAIRE IV. *Si on mene deux tangentes* MN, mn, *à deux cercles inégaux ; les angles mixtilignes* NAB, nab, *faits par les tangentes & les circonférences, ſont égaux.* (fig. 179.)

DÉMONSTRATION. Je mene des points d'attouchement A, *a*, les diametres AB, *ab*. Les angles BAN, *ban*, ſont droits (240), & partant égaux. Or, les demi-cercles ATB, *atb*, étant des ſegmens ſemblables (289); les angles mixtilignes BAT, *bat*, ſont égaux : donc retranchant de l'angle BAN, l'angle BAT; & de l'angle *ban*, l'angle *bat*; il reſte l'angle NAT, égal à l'angle *nat*.

291. COROLLAIRE V. *Si pluſieurs cercles inégaux touchent une même ligne* MN *en un point* A; *tous les angles mixtilignes faits par cette tangente avec les circonférences, ſont égaux entre eux.* (fig. 180.)

DÉMONSTRATION. Puiſque les cercles touchent la même ligne MN au point A; la même perpendiculaire AS, élevée ſur le point A, paſſera par tous les centres (242), & coupera tous les cercles en deux parties égales. Ainſi on démontrera la même choſe que dans le corollaire précédent.

REMARQUE. Ceci ſeroit impoſſible ſi les cercles touchoient la droite MN dans une égale partie. Mais comme les points des plus grands cercles, ſont plus grands que les points des petits; il arrive que les circonférences des grands cercles, n'abandonnent pas ſi vîte la droite MN, que les petites; & que par conſéquent les angles mixtilignes qu'elles font avec la tangente, ſont un peu à côté les uns des autres. Ce qu'il eſt aiſé de concevoir par la ſeule inſpection de la figure 181, qui repréſente pluſieurs polygones réguliers ſemblables mais inégaux, qui touchent une même droite.

Et il ne faut pas dire qu'il s'enſuivra de-là qu'un cercle peut toucher une ligne droite en plus d'un point. Car quoiqu'un plus grand cercle touche une ligne droite en une partie plus grande, que ne fait un petit cercle; cependant ce grand cercle ne touche que par un de ſes points, de même que le petit ne touche que par un des ſiens.

On peut encore expliquer ceci de cette façon. Concevons que pluſieurs polygones réguliers ſemblables, mais inégaux, aient tous un même angle commun A (*fig.* 182); & qu'à l'extrêmité de la ligne AB, qui diviſe cet angle en deux également, & qui paſſe par leurs

centres, on éleve une perpendiculaire MN : il eſt viſible que cette perpendiculaire touchera tous les polygones, & que les angles qu'elle fera avec eux feront tous égaux. Or, cela arrivera à l'égard de tous les polygones ſemblables, quelque grand ou petit que ſoit leur nombre de côtés : donc cela doit arriver auſſi à l'égard des cercles.

Et cette ſeconde explication réſout facilement une difficulté qu'on pourroit former. Car puiſque tous les angles mixtilignes intérieurs des demi-cercles, qui touchent en A la droite MN (*fig.* 180), ſont égaux ; il s'enſuit néceſſairement, dira-t-on, que les angles curvilignes que les circonférences font en A, doivent être nuls, & cela eſt vrai : car on voit dans la figure 182, que les circuits des polygones ne font point d'angles entre eux au point A, quoiqu'ils en faſſent après, à cauſe que les côtés de l'angle fait en A, changent enſuite de direction ; & il en eſt de même à l'égard des cercles.

L'angle mixtiligne fait par la tangente & les circonférences, eſt nul au point A (*fig.* 180). Car tous les petits côtés par leſquels les cercles touchent la droite MN, tombent les uns ſur les autres au point A, & ne font enſuite d'angles que parce qu'ils viennent à changer de direction : la figure 181, fait voir cela clairement. D'ailleurs, on peut confirmer cette vérité par le raiſonnement ſuivant. Entre la perpendiculaire AS & la tangente MN, on ne peut mener de ligne droite du point A qui ne coupe toutes les circonférences : car autrement du même point A, on pourroit mener deux tangentes ; ce qui eſt impoſſible (241). Or, on peut pourtant faire au point A avec AN, une infinité d'angles de plus petits en plus petits à l'infini, juſqu'à faire évanouir totalement l'angle ; & il eſt clair que le plus petit de ces angles, ſeroit encore plus grand que l'angle mixtiligne ; puiſqu'il couperoit les circonférences : donc l'angle mixtiligne en A doit être plus petit que tout ce qu'il y a de plus petit, & par conſéquent il doit être nul.

PROPRIÉTÉS DU CERCLE, UTILES POUR L'INTELLIGENCE DES SECTIONS CONIQUES.

PROPOSITION LXXIII.

292. *Deux tangentes* AB, AC, *étant menées d'un même point extérieur* A, *avec la ſécante* AD *qui paſſe par le centre* O, *& la droite* CB *qui joint les points d'attouchement, je dis qu'on aura toujours* OR. OS :: OS. OA : *c'eſt-à-dire, la diſtance du centre* O *au point* R, *où la droite* CB *coupe la ſécante* AD, *eſt au rayon ; comme le rayon eſt à la diſtance* OA *du centre* O *au point extérieur* A. (fig. 183.)

DÉMONSTRATION. Du centre O au point d'attouchement, je mene le rayon OB. L'angle OBA étant droit (240), le triangle OBA eſt rectangle ; & à cauſe que BC coupe la ſécante AD perpendiculairement (270), la droite BR eſt une perpendiculaire menée du ſommet A de l'angle droit ſur l'hypothénuſe AO : donc le côté OB du triangle rectangle OBA, eſt moyen proportionnel entre le petit ſegment RO, & l'hypothénuſe entiere (170); & par conſéquent nous avons OR . OB :: OB . OA. Mais le rayon OB eſt égal au rayon OS : donc OR . OS :: OS . OA. Ce qu'il falloit démontrer.

293. REMARQUE. Comme la perpendiculaire menée du point d'attouchement ſur la ſécante AD qui paſſe par le centre, paſſe par l'autre point d'attouchement C de l'autre tangente ; dans la ſuite, je ne mettrai qu'une tangente dans les figures : & au lieu de dire, *deux tangentes étant menées avec la ſécante, &c, & la ligne qui joint les points d'attouchement*, je dirai pour abréger, *la tangente* AB, *la ſécante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BR *étant données*, &c.

PROPOSITION LXXIV.

294. *La tangente* AB, *la ſécante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BR *étant données, on aura toujours* AS . AR :: AO . AD. (*fig.* 183.)

DÉMONSTRATION. Je mene le rayon OB : & à cauſe que dans le triangle rectangle OBA, la droite BR menée de l'angle droit, eſt perpendiculaire ſur l'hypothénuſe AO ; le côté AB eſt moyen proportionnel entre le ſegment AR de l'hypothénuſe, & l'hypothénuſe entiere AO. Ainſi AR . AB :: AB . AO : ce qui donne $\overline{AB} = AR \times AO$. Mais par la propriété de la ſécante, nous avons $\overline{AB} = AS \times AD$ (271) : donc $AS \times AD = AR \times AO$; ce qui donne AS . AR :: AO . AD. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXXV.

295. *Suppoſant toujours la tangente* AB, *la ſécante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BR *données ; je dis*,

I°. *Que ſi aux extrémités* S, D *& au centre* O *du diametre, on éleve trois perpendiculaires* SH, OM, DN *qui ſe terminent ſur la tangente* AB *prolongée aux points* H, M, N, *les quatre lignes* SH, RB, OM, DN *ſont en proportion.*

II°. *Que le rectangle des deux perpendiculaires ou tangentes* SH, DN *eſt égal au quarré du rayon.* (fig. 184.)

DÉMONSTRATION. I°. Les quatre lignes SH, RB, OM, DN, étant perpendiculaires sur la sécante AD, sont paralleles entre elles: & par conséquent les triangles ASH, ARB, AOM, ADN, qui ont l'angle A commun & les bases paralleles, sont semblables entre eux, & leurs bases sont entre elles comme leurs côtés AS, AR, AO, AD. Mais par la proposition précédente, nous avons AS . AR :: AO . AD : donc SH . RB :: OM . DN.

II°. Du point B, j'abaisse BP, perpendiculaire sur MO que je prolonge de l'autre côté en V. La droite MV est une sécante qui passe par le centre : la droite MB est une tangente menée du même point M ; & la droite BP est une perpendiculaire menée du point d'attouchement : donc nous avons OP . OE :: OE . OM. Mais à cause des paralleles, nous avons OP = RB : donc RB . OE :: OE . OM ; & partant RB × OM = $\overline{OE}^2$. Mais nous venons de trouver SH . RB :: OM . DN ; ce qui donne RB × OM = SH × DN : donc SH × DN = $\overline{OE}^2$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION. LXXVI.

296. *Supposant encore la tangente* AB, *la sécante* AD *qui passe par le centre, & la perpendiculaire* BR *données ; je dis que la sécante* AD *& toutes les autres sécantes qu'on peut mener du même point* A, *sont toutes divisées harmoniquement en trois parties, par la circonférence & la droite* BR : *c'est-à-dire que dans chaque sécante, la partie extérieure est à sa petite partie intérieure, comme la sécante entiere est à l'autre partie intérieure.* (fig. 185, 186.)

DÉMONSTRATION. I°. Des extrémités S, D du diametre, je mene des tangentes SH, DN (*fig.* 186), qui se terminent sur la tangente AB prolongée en N. Ainsi, à cause que ces tangentes sont paralleles entre elles, puisqu'elles sont perpendiculaires sur le diametre ; les triangles ASH, ADN, sont semblables, & donnent AH . SH :: AN . DN. Mais les tangentes SH, HB, étant menées d'un même point, sont égales ; de même que les tangentes DN, BN : mettant donc dans la proportion que nous venons de trouver, la droite HB au lieu de son égale SH, & la droite BN au lieu de son égale DN, nous aurons AH . HB :: AN . BN. Or, à cause des paralleles SH, RB, DN ; la droite AD est divisée par ces paralleles en même raison que la droite AD : donc AS . SR :: AD . RD.

II°. Maintenant, prenons une sécante AV (*fig.* 185), qui ne passe pas par le centre. Cette sécante sera coupée en quelque point L, par la perpendiculaire BRH ; & il s'agit de prouver que AP . PL :: AV . LV ; & que par conséquent AV est coupée en trois parties

harmoniquement. Pour cela je décris ſur la partie intérieure VP, priſe pour diametre, un cercle VTPQ: du point L, je mene une corde TQ, perpendiculaire ſur ce diametre; & du point T, je mene au point A la droite TA. Si je fais voir que TA eſt tangente du cercle TPQV; il eſt clair que la droite AV étant une ſécante qui paſſe par le centre de ce cercle, & la droite TL étant une perpendiculaire menée du point d'attouchement T, nous aurons, comme nous venons de voir dans le premier cas, AP . PL :: AV . LV: venons donc à la démonſtration.

Dans le triangle rectangle ALR, nous avons $\overline{AL} = \overline{AR} + \overline{LR}$ (71); & le triangle rectangle ATL, donne $\overline{AT} = \overline{AL} + \overline{TL}$. Mettant donc dans cette derniere équation la valeur de $\overline{AL}$, nous aurons $\overline{AT} = \overline{AR} + \overline{LR} + \overline{TL}$. Or, à cauſe que TL eſt perpendiculaire ſur le diametre VP, nous avons $\overline{TL} = VL \times LP$ (283); & parce que VP, HB, ſont deux cordes du grand cercle SBD & qui ſe coupent en L, nous avons $VL \times LP = HL \times LB$ (275): donc $\overline{TL} = HL \times LB$; & mettant cette valeur de $\overline{TL}$ dans $\overline{AT} = \overline{AR} + \overline{LR} + \overline{TL}$, nous aurons $\overline{AT} = \overline{AR} + \overline{LR} + HL \times LB$. Mais à cauſe que la ligne HB eſt diviſée en deux également en R, & en deux inégalement en L; nous avons $HL \times LB + \overline{LR} = \overline{HR}$ ou $\overline{RB}$: donc $\overline{AT} = \overline{AR} + \overline{RB}$.

Or, dans le triangle ARB, nous avons $\overline{AB} = \overline{AR} + \overline{RB}$: donc $\overline{AT} = \overline{AB}$; & comme par la propriété de la tangente AB & des ſécantes, nous avons $AP \times AV = \overline{AB}$, nous aurons auſſi $AP \times AV = \overline{AT}$: c'eſt-à-dire que dans le cercle VTPQ, le rectangle de la partie extérieure AP de la ſécante AV, par cette ſécante, eſt égal au quarré de la droite AT menée du même point A à la circonférence de ce cercle. Mais dans ce même cercle, le rectangle $AP \times AV$ eſt égal au quarré de la tangente menée du point A du côté du point T: donc le quarré de cette tangente eſt égal au quarré $\overline{AT}$; & partant la tangente & la droite AT ſont égales. Or, du même point A on ne peut mener à la circonférence VTPQ du même côté, deux différentes lignes qui ſoient égales (235, 237): donc AT eſt la tangente qu'on meneroit du point A à la circonférence VTPQ. Ce qu'il falloit démontrer.

297. Corollaire. *Si deux ou pluſieurs ſécantes* AV, AD, *me-*

nees d'un même point A, *ſont coupées harmoniquement par la circonférence, & par une droite* BH *perpendiculaire ſur la ſécante qui paſſe par le centre ; la tangente menée à l'une ou l'autre des extrêmités de la corde* BH, *paſſera par le point* A. (fig. 187.)

Démonstration. Si l'on prétend que la tangente menée du point B, ne paſſe pas par le point A; je mene de ce point A une tangente qui touchera par conſéquent le cercle en un point P différent du point B; à cauſe que deux tangentes ne peuvent toucher le cercle en un même point (241): du point P, je mene PQ perpendiculaire ſur la ſécante AD, qui paſſe par le centre & qui coupe la ſécante AV en N. Ainſi par la propoſition précédente, la ſécante AV ſera coupée harmoniquement par la circonférence & par la droite PQ; & ſes trois parties ſeront AF, FN, NV.

Mais par la ſuppoſition, la même ſécante AV eſt coupée harmoniquement par la circonférence & la droite BH : & ſes trois parties ſont AF, FL, LV; & la premiere AF de ces trois-ci, eſt la même que la premiere AF des trois précédentes : donc les deux dernieres FL, LV, doivent être égales aux deux dernieres FN, NV chacune à chacune (206); & partant FL doit être égal à FN; & le point d'attouchement P doit tomber ſur le point d'attouchement B.

Proposition LXXVII.

298. *Poſant encore que* AB, *la ſécante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BRH, *ſoient données; ſi d'un point quelconque* M *pris ſur la circonférence, on mene une corde* MN *qui paſſe par le point* R *où la perpendiculaire* BR *coupe la ſécante* AD; *& qu'après avoir mené des extrêmités* M, N, *de cette corde, deux cordes* MT, NV, *paralleles à* BR, *on mene les droites* VM, NT *par les extrémités des cordes : je dis que les droites* VM, NT, *prolongées au-delà du cercle, ſeront deux ſécantes égales qui paſſeront par le point* A, *& qui ſeront diviſées harmoniquement par la circonférence & la perpendiculaire* BH. (fig. 188.)

Démonstration. I°. A cauſe des cordes paralleles MT, VN; les arcs compris MV, TV, ſont égaux (263): & ajoutant à chacun d'eux l'arc MT, les deux arcs VMT, MTN, ſont égaux; & les angles à la circonférence MVN, TNV, qui embraſſent ces arcs, ſont auſſi égaux. Or, à cauſe que la corde MN ne paſſe pas par le centre O du cercle, & qu'elle coupe par conſéquent la circonférence en deux parties inégales; l'arc MTN du petit ſegment, vaut moins qu'une demi-circonférence; & l'angle MVN, qui en vaut la moitié, eſt

aigu, de même que son égal TNV. Ainsi, puisque les deux lignes MV, TN, font sur la droite VN les angles internes opposés, moindres ensemble que deux droits; ces lignes ne sont pas paralleles (72); & venant à être prolongées du côté de A, elles doivent former avec la base VN, un triangle isoscele dont le sommet sera sur quelque point de la perpendiculaire AQ qui coupe la base VN en deux également (107.)

II°. Maintenant, comme nous ne savons pas encore si le point où les droites MV, NT, prolongées, coupent la perpendiculaire AQ, est le même que le point A; nommons ce point = x quelque part où il soit. Le triangle MNV étant coupé par la droite BH, parallele à sa base, donne MR. RN :: ML. LV (158); & dans les triangles semblables MaR, NQR, nous avons MR. RN. Ma. NQ ou VQ: donc ML. LV :: Ma. VQ.

Mais les triangles semblables xMA, xVQ, donnent Ma. VQ :: xM. xV: donc xM. xV :: ML. LV; ou xM. ML :: xV. LV: & partant la droite xV est divisée harmoniquement par la circonférence & la droite BH. Et il est visible qu'à cause des paralleles MT, HB, VN, l'autre côté xN du triangle isoscele MxN, est aussi divisé harmoniquement par la circonférence & la droite HB. Ainsi les deux lignes Vx, Nx, étant deux sécantes qui partent d'un même point x, & qui sont divisées harmoniquement par la circonférence & la droite HB, perpendiculaire sur la sécante AD qui passe par le centre; la tangente menée du point B, doit passer par le point x (297): & ce point n'est pas différent du point A; puisque la tangente BA qui coupe AD en A, ne peut la couper en un autre point. C. Q. F. D.

299. COROLLAIRE I. *Si dans le trapézoïde* MTNV *fait par les quatre cordes* MT, TN, VN, MV, *on mene l'autre diagonale* VT; *cette diagonale passera aussi par le point* R. (fig. 188.)

DÉMONSTRATION. Les angles MNV, TVN, étant égaux, à cause des arcs égaux MV, TN; les deux diagonales en se coupant, font un triangle isoscele, dont le sommet doit être sur la perpendiculaire AR qui coupe la base VN en deux également: or la diagonale MN passe par le point R de cette perpendiculaire, & ne la coupe qu'en ce point: donc la diagonale VT doit passer par le même point.

300. COROLLAIRE II. *Si d'un même point* A (fig. 188) *d'où partent la tangente* AB, *la sécante* AD, &c, *on mene deux sécantes égales* AV, AN, *& qu'on joigne par des diagonales* MN, VT, *les*

quatre points où elles coupent la circonférence ; ces deux diagonales ſe couperont au point R *de la perpendiculaire* BH. (fig. 188.)

Démonstration. I°. Les ſécantes AV, AN, donnent AV×AM = AN×AT. Mais par la ſuppoſition, AV = AN : donc; ſi d'une part l'on diviſe par AV; & de l'autre, par AN; nous aurons AM = AT. D'où il ſuit que les droites VN, MT, menées par les extrêmités des ſécantes AV, AN, & de leurs parties extérieures, ſont perpendiculaires ſur AD (236, 238), & par conſéquent paralleles à BH.

Ainſi les arcs VM, TN, compris entre les paralleles MT, VN, étant égaux (163); les angles à la circonférence MNV, TVN, qui s'appuient ſur ces arcs, ſont auſſi égaux. C'eſt pourquoi le triangle que les diagonales MN, TV, forment du côté de VN en ſe coupant, eſt iſoſcele; & ſon ſommet doit être ſur la perpendiculaire AD, qui coupe la baſe VN en deux également (107.)

II°. Or, comme nous ne ſavons pas encore ſi le point où ces deux diagonales ſe coupent ſur AD, eſt le point R; nommons ce point ζ, quelque part où il ſoit. Les triangles ſemblables MAζ, NQζ, donnent Mζ. ζN :: M*a*. NQ ou QV; & à cauſe des triangles ſemblables MA*a*, VAQ, nous aurons M*a*. QV :: MA. VA: donc Mζ. ζN :: MA. VA.

Or, à cauſe que la ſécante AV eſt coupée harmoniquement par la circonférence & la droite BH; nous avons MA. ML :: AV. LV; ou MA. VA :: ML. LV : donc Mζ. ζN :: ML, LV. Ainſi dans le triangle MNV, les côtés MV, MN, étant coupés proportionnellement aux points L, ζ; la droite Lζ, menée par ces deux points, eſt parallele à la baſe VN (158.). Mais LR ou HB eſt auſſi parallele à la baſe VN; & du point L'on ne peut mener qu'une ſeule parallele à une même ligne VN : donc la parallele LR & la parallele Lζ ne ſont qu'une ſeule & même ligne; & le point ζ eſt le même que le point R.

301. Corollaire III. Donc, *ſi deux ſécantes égales* AV, AN, *ſont menées d'un même point; & qu'après avoir mené les diagonales* MN, TV, *on mene par le point* R *où elles ſe coupent, une droite* HB *parallele à la droite* VT *qui paſſe par les extrêmités des ſécantes ; les points* H, B, *de la droite* HB, *ſeront les points d'attouchement des deux tangentes égales qu'on peut mener du point* A. Car on prouvera comme ci-devant, que les deux ſécantes AV, AN, ſont coupées harmoniquement par le cercle & la droite HB, &c. (*fig.* 188.)

Proposition LXXVIII.

302. *Suppoſant toujours la tangente* AB, *la ſécante* AD *qui paſſe par*

par le centre, & la perpendiculaire BRH *données; ſi du point* A *on mene une droite indéfinie* XZ, *parallele à la perpendiculaire* BRH, *& que d'un point quelconque* C *pris ſur cette parallele, on mene une ſécante* CN *qui paſſe par le point* R; *cette droite* CN *ſera coupée harmoniquement par la circonférence & la droite* BH. (fig. 189.)

DÉMONSTRATION. Des points M, N, je mene les droites MT, NV, paralleles; & par les points M, V, N, T, les droites VA, NA, qui ſeront deux ſécantes égales qui paſſeront par le point A, & qui ſeront diviſées harmoniquement par la circonférence & la perpendiculaire HB (298), ou, ce qui revient au même, par les droites MT, HB. Ainſi dans l'eſpace parallele XZVN, la ſécante AV étant diviſée harmoniquement par les droites MT, HB, paralleles aux paralleles XZ, VN; la droite CN, compriſe dans ce même eſpace, doit être coupée en même raiſon par les mêmes paralleles MT, HB (153): & par conſéquent nous avons CM. MR :: CN. RN. Ce qu'il falloit démontrer.

303. COROLLAIRE. *Si d'un point quelconque* C *de la droite* XZ *parallele à* BR, *on mene deux tangentes* CP, CQ, *& la droite* PQ *qui joint leurs points d'attouchement; cette droite* PQ *paſſe par le point* R. (fig. 190.)

DÉMONSTRATION. Menant la ſécante CN qui paſſe par le point R; cette droite eſt coupée harmoniquement en M, R, N (302); & ſes trois parties ſont CM, MR, RN. Or, ſi on veut que la droite PQ ne paſſe pas par le même point R; cette droite coupera donc la ſécante CN en un autre point quelconque x : & comme PQ eſt la même que la perpendiculaire qu'on meneroit du point d'attouchement P ſur la ſécante qui partant du point C, paſſeroit par le centre (293); la droite ſeroit auſſi diviſée harmoniquement aux points C, x, N; & ſes trois parties ſeroient CM, Mx, xN. Mais la premiere partie CM de ces trois, eſt la même que la premiere partie CM des trois précédentes : donc les deux autres Mx, xN, doivent être égales chacune à chacune aux deux autres MR, RN; & par conſéquent le point R & le point x ne peuvent être différens, & la droite PQ doit paſſer par le point R.

REMARQUE. On peut prouver avec la même facilité, l'inverſe de cette propoſition : c'eſt-à-dire que *ſi par le point* R *on mene une corde quelconque* QP, *& que de ſes extrémités* P, Q, *on mene deux tangentes* QC, PC; *ces tangentes ſe couperont en un point* C *de la ligne* XZ. (fig. 190.)

Car ſi elles ſe coupoient en un point *a*, en deçà ou en delà de RZ; la ſécante *a*N, menée du point *a* par le point R, ſeroit coupée harmoniquement par la circonférence & la droite PQ qui joint les points d'attouchement P, Q; & ſes trois parties ſeroient *a*M, MR, RN. Or, comme cette même ſécante *a*N couperoit XZ en quelque point C, & que la ligne CN ſeroit auſſi coupée en trois parties harmoniquement CM, MR, RN; nous aurions deux lignes *a*N, CN, coupées toutes les deux harmoniquement, & qui auroient deux parties MR, RN communes, & dont cependant les deux troiſiemes *a*M, CM, ne ſeroient pas égales: ce qui eſt impoſſible (207). Donc, afin que *a*N ſoit diviſée harmoniquement, enſorte que MR, RN, ſoient deux de ſes parties; il faut néceſſairement que *a*M ſoit égal à CM, & que les points *a*, C, ne ſoient qu'un même point de la ligne XZ.

PROPOSITION LXXIX.

304. *Suppoſant encore la tangente* AB, *la ſécante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BRH, *données; ſi l'on mene deux ſécantes inégales* AV, AN, *& qu'on joigne leurs points de diviſion par des droites* TM, EL, NV; *ces droites étant prolongées ſe couperont en un même point ſur la perpendiculaire* BH *prolongée de part & d'autre.* (fig. 191.)

DÉMONSTRATION. Les lignes TM, EL, NV, ne ſont pas paralleles entre elles: car les deux TM, NV, ſeroient perpendiculaires ſur la droite AD qui paſſe par le centre; à cauſe que EL eſt perpendiculaire ſur AD. D'ou il ſuivroit que TM, NV, ſeroient diviſées chacune également par AD, de même que leurs arcs; & que par conſéquent les ſécantes AV, AN, ſeroient égales (236): ce qui eſt contre la ſuppoſition. Cela poſé,

Puiſque les ſécantes AN, AV, ſont diviſées harmoniquement par la circonférence & la droite BH, & qu'elles ont un point commun A; les droites TM, EL, NV, qui joignent leurs autres points de diviſion, ſont paralleles entre elles, ou doivent ſe couper toutes en un même point lorſqu'on viendra à les prolonger (211). Or nous venons de voir qu'elles ne ſont pas paralleles: donc elles ſe coupent en un même point. Mais cela ne peut ſe faire, à moins que les deux lignes TM, NV, prolongées, ne coupent en un même point la ligne EL prolongée: donc, &c. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXXX.

305. *Poſant toujours que la tangente* AB, *la ſécante* AD *qui paſſe*

par le centre, & la perpendiculaire BH, *ſoient données ; ſi l'on prolonge* BH *de part & d'autre, & que d'un point quelconque* I *de ſes prolongemens, on mene deux tangentes* IM, IV ; *la ligne* VM *qui joint les points d'attouchement étant prolongée, paſſera par le point* A. (fig. 192.)

DÉMONSTRATION. Je mene du point A, une autre ſécante APQ : du point I par le point P, où cette ſécante coupe le cercle, je mene la droite IPT qui eſt auſſi une ſécante : enfin du point A, par le point T, je mene une ſécante ATN. Les deux ſécantes AQ, AN, ſont diviſées harmoniquement par le cercle & par la droite BH : & comme elles ont un point commun A, & que les deux lignes TP, BH, qui joignent quatre de leurs points de diviſion, ſe coupent en un point I ; la ligne droite NQ qui joint leurs extrêmités N, Q, doit paſſer par le même point I. Cela poſé,

Les ſécantes IT, IN, ſont coupées harmoniquement par le cercle & par la droite MV qui joint les points d'attouchement des tangentes IM, IV qui partent du même point I (316) ; & les droites PQ, NT qui paſſent par quatre de leurs points, ſe coupent au point A : donc la droite VM qui paſſe par les points V, M, paſſe auſſi par le point A. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE. On peut prouver très-facilement l'inverſe de cette propoſition : c'eſt-à-dire que *ſi des points* M, V, *de la partie intérieure* MV *d'une ſécante* VA *qui paſſe par le point* A, *on mene deux tangentes, ces tangentes ſe couperont ſur la perpendiculaire* BH *prolongée.* (fig. 192.)

Car, ſuppoſons pour un moment que le point I, où les tangentes VI, MI, ſe coupent, ne ſoit point ſur le prolongement de BH : je mene par ce point I, une ſécante IPT qui coupe le cercle en P & T, & qui eſt coupée harmoniquement par la circonférence & par la droite VM qui joint les points d'attouchement V, M. Du point A, par les points P & T, je mene deux autres ſécantes AQ, AN ; & par l'extrêmité N de la derniere AN, je mene la droite NI. Les deux ſécantes IT, IN, ſont coupées harmoniquement par le cercle & la droite VMA qui joint les points d'attouchement V, M, des tangentes IM, IV menées du même point I : & comme les droites VMA, NTA, qui joignent quatre points de diviſion de ces deux ſécantes IT, IN, paſſent par le point A ; la ligne QP qui joint les points Q, P, paſſe auſſi par le même point A. (211.)

Ainſi les droites APQ, ATN étant deux ſécantes qui partent du point A, ſont diviſées harmoniquement par la circonférence & la

droite BR; & à cauſe que les lignes TP, NQ qui joignent quatre de leurs points, paſſent par le point I; la ligne BH, qui joint deux autres de leurs points, doit paſſer auſſi par le point I. Par conſéquent le point I, où les deux tangentes MI, VI, ſe coupent, ne peut pas être hors de la droite BH prolongée, comme on le ſuppoſeroit.

PROPOSITION LXXXI.

306. *Suppoſant encore la tangente* AB, *la ſécante* AD *qui paſſe par le centre, & la perpendiculaire* BH *données; ſi d'un point quelconque* M *de la partie extérieure* AS *de la ſécante prolongée ſi l'on veut au-delà du point* A, *on mene une droite* MP *parallele à la tangente* AB, *& qui ſe termine ſur la droite* BH *prolongée s'il le faut au-delà du point* B; *le quarré de cette droite* PM, *ſera toujours plus grand que le rectangle de la ſécante* MD *qu'elle coupe par ſa partie extérieure* MS. (fig. 193, 194.)

DÉMONSTRATION. Du point B, je mene aux extrêmités du diametre SD, les droites BS, BD; & du point P, les droites PV, PN paralleles à BS, BD: je prolonge AB, en Z; & MP en X.

Les triangles ſemblables ABD, MPN, donnent AB. AD :: MP. MN; & à cauſe des triangles ſemblables ABS, MPV, nous avons AB. AS :: MP. MV. Multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons $\overline{AB}^2$. AD × AS :: $\overline{MP}^2$. MN × MV. Mais $\overline{AB}^2$ = AD × AS (271): donc $\overline{MP}^2$ = MN × MV. Ainſi il ne s'agit plus que de faire voir que MN × MV eſt plus grand que MD × MS.

I°. Dans la figure 193, l'angle du ſegment ABS vaut la moitié de l'arc BS (253); & l'angle à la circonférence SBH vaut la moitié de l'arc BH (252) égal à l'arc SB; à cauſe du diametre SD perpendiculaire ſur la corde (224): donc ces deux angles ſont égaux. Or l'angle ABQ eſt égal à ſon alterne BQP: donc les angles QBP, BQP ſont égaux; & dans le triangle iſoſcele BQP, nous avons BP = QP. De même l'angle du ſegment ZBD eſt égal à l'angle à la circonférence HBD; & à cauſe que l'angle ZBD eſt égal à ſon alterne BXP, le triangle BXP eſt iſoſcele, & donne BP = XP: donc XP = QP.

Ainſi les trois lignes MQ, MP, MX, étant en progreſſion arithmétique, à cauſe que leurs différences XP, QP ſont égales; la premiere eſt plus petite par rapport à la ſeconde, que la ſeconde par rapport à la troiſieme (216); c'eſt-à-dire, MQ, MP < MP, MX. Mais les triangles ſemblables MQS, MPV, donnent MQ. MP :: MS. MV; & dans les triangles ſemblables MPN, MXD, nous avons MP.

MX :: MN. MD. Mettant donc dans MQ, MP < MP, MX, la raiſon MS, MV, au lieu de ſon égale MQ, MP; & la raiſon MN, MD, au lieu de ſon égale MP, MX; nous aurons MS, MV < MN, MD.

Or, ſi ces quatre termes étoient en proportion, le produit des extrêmes ſeroit égal au produit des moyens : donc puiſque MS, eſt plus petit qu'il ne faut pour faire qu'il y ait proportion; le produit MS × MD des extrêmes, eſt plus petit que le produit MN × MV des moyens, c'eſt-à-dire, plus petit que le quarré de MP.

II°. Dans la figure 194, menant les droites BS, BD, PV, PN, comme ci-devant; nous trouverons par les mêmes raiſonnemens, $\overline{PM}$ = MV × MN : & il ne s'agira plus que de prouver que MV × VN eſt plus grand que MS × MD : ce qu'on fera en prolongeant SB en X, & DB en Q. Car les angles *a*BD, HBD, étant égaux, comme on vient de voir; leurs oppoſés aux ſommets QBA, QBP, ſont auſſi égaux : & à cauſe que QBA eſt égal à ſon alterne BQP, le triangle BQP eſt iſoſcele, & donne PB = PQ. De même les angles ABS, SBH étant égaux, leurs oppoſés au ſommet *a*BX, XBP le ſont auſſi; & à cauſe de l'angle *a*BX égal à ſon alterne BXP, le triangle BXP eſt iſoſcele, & donne PB=PX : donc PQ = PX, & les trois lignes MQ, MP, MX, ſont en progreſſion arithmétique : ce qui donne MQ, MP < MP, MX; & le reſte de la démonſtration s'achevera comme auparavant. C. Q. F. D.

CHAPITRE VII.

DE L'INSCRIPTION DES POLYGONES RÉGULIERS DANS UN CERCLE, ET DE LEUR CIRCONSCRIPTION AUTOUR DU CERCLE.

307. UN polygone régulier eſt *inſcrit* dans un cercle, lorſque tous ſes angles ſont à la circonférence de ce cercle; & il eſt *circonſcrit*, lorſque tous ſes côtés touchent la circonférence.

308. PROBLÊME I. *Inſcrire un triangle équilatéral dans un cercle* (fig. 195.)

SOLUTION. Je mene un diametre BD, dont je coupe la moitié OD en deux également en R. Par le point R, je mene une corde AC, perpendiculaire ſur le diametre; & des extrêmités A, C, de cette corde, je mene à l'extrêmité la plus éloignée du diametre, les droites AB, CB: ce qui donne le triangle équilatéral ABC demandé.

Pour le prouver, je mene la corde DC. L'angle à la circonférence BCD étant droit (252); le triangle BCD eſt rectangle: & à cauſe de la perpendiculaire CR, nous avons RD. DC:: DC. DB (170). Or, RD = $\frac{1}{4}$ DB, par la conſtruction: donc $\frac{1}{4}$ DB. DC :: DC. DB; d'où l'on tire $\frac{1}{4}\overline{DB}$ = DC: & tirant la racine quarrée, nous aurons $\frac{1}{2}$ DB = DC; c'eſt-à dire, DC eſt double de RD. Mais les triangles ſemblables DRC, BRC, donnent DR. DC:: RC. BC. Donc BC eſt double de RC, de même que CD eſt double de RD. Or, AC eſt auſſi double de RC (224): donc BC = AC. Mais BC = BA, à cauſe de BD, perpendiculaire ſur le milieu de AC (56): donc les trois côtés AB, BC, AC, du triangle ABC, ſont égaux.

309. COROLLAIRE I. *Le côté de l'exagone inſcrit dans un cercle, eſt égal au rayon.* (fig. 195.)

DÉMONSTRATION. L'arc ADC eſt coupé en deux également par le diametre BD, perpendiculaire ſur le côté AC du triangle équilatéral ABC inſcrit au cercle. Ainſi l'arc DC eſt la ſixieme partie de la circonférence; & la corde DC de cet arc eſt le côté de l'exagone qui ſeroit inſcrit au cercle. Or, nous venons de trouver DC = $\frac{1}{2}$ DB = OD. Donc, &c.

310. COROLLAIRE II. *Autour d'un cercle donné* ABC, *circonſcrire un triangle équilatéral.* (fig. 196.)

SOLUTION. Je mene le diametre RM que je prolonge de part & d'autre, faiſant RM = RO, & AN = AO. Du point O, & avec le rayon ON, je décris un cercle NQMP: du point A, je mene la corde PQ, perpendiculaire ſur MN; & des points P, Q, je mene les droites PM, QM, qui forment avec PQ, le triangle demandé.

Car à cauſe de OA = NA, on démontrera comme ci-deſſus (308), que le triangle PQM eſt équilatéral & inſcrit au cercle PNQM. Ainſi les cordes PQ, QM, MP, étant égales; les perpendiculaires OA, OB, OC, menées du centre O ſur ces cordes, ſeront égales. Or, la perpendiculaire OA eſt le rayon du cercle donné ABC: donc la circonférence de ce cercle paſſe par les autres points A, B, C.

311. PROBLÊME II. *Inſcrire un quarré dans un cercle, & le circonſcrire autour du cercle.* (fig. 197.)

SOLUTION. I°. Je mene deux diametres AC, BD, qui ſe coupent à angles droits; & je joints leurs extrêmités par les droites AB, BC, CD, DA, qui forment le quarré inſcrit demandé. Car ces quatre droites ſoutenant des arcs égaux, ſont égales; & les angles ABC,

BCD, &c, ſont chacun droits : à cauſe qu'ils embraſſent chacun une demi-circonférence.

II°. Par les extrêmités A, B, C, D, des deux diametres; je mene des tangentes, qui en s'entrecoupant, forment un quarré HMNR circonſcrit au cercle. Car les droites HM, RN, étant perpendiculaires ſur BD, ſont paralleles à AC; & à cauſe qu'elles ſont compriſes entre les droites HR, MN, perpendiculaires ſur AC, elles ſont égales à AC. Par la même raiſon, les droites HR, MN, ſont paralleles & égales à BD. Ainſi les quatre côtés HM, MN, &c, de la figure HMNR, étant égaux entre eux, & les angles qu'ils forment étant droits; cette figure eſt un quarré.

312. PROBLÊME III. *Inſcrire un exagone dans un cercle, & le circonſcrire autour d'un cercle.* (fig. 198.)

SOLUTION. I°. Je porte le rayon OA ſur la circonférence, de A en B, de B en C, &c; & joignant les points de diviſion par les droites AB, BC, &c, j'ai l'exagone inſcrit ABCDEF : ce qui eſt évident, après ce qui a été dit ci-deſſus. (309.)

II°. A tous les ſommets A, B, C, &c, des angles de l'exagone inſcrit; je mene des tangentes au cercle, & ces tangentes en s'entrecoupant, forment l'exagone circonſcrit GHLMNR. Car les cordes AB, AF, de même que leurs arcs, étant égales; les angles de ſegment HAB, HBA, GAF, GFA, ſont tous égaux entre eux : d'où il ſuit que les triangles iſoſceles FGA, AHB, ſont parfaitement égaux; & par la même raiſon, les autres triangles iſoſceles BLC, CMD, DNE, ERF, ſont égaux entre eux, & aux deux précédens FGA, AHB. Ainſi les côtés de la figure circonſcrite étant compoſés chacun de deux côtés égaux de ces triangles iſoſceles, ſont égaux entre eux, de même que les angles qu'ils forment : & partant la figure eſt un exagone circonſcrit.

313. REMARQUE. Lorſqu'un polygone eſt inſcrit dans un cercle, on peut toujours circonſcrire à ce même cercle, un polygone ſemblable, de la façon que nous venons de faire pour l'exagone. C'eſt pourquoi je n'en parlerai plus.

PROPOSITION LXXXII.

314. *Le quarré du pentagone inſcrit dans un cercle, eſt égal à la ſomme des quarrés du côté de l'exagone & du côté du décagone inſcrits dans le même cercle.* (fig. 199.)

DÉMONSTRATION. Soit AB le côté du pentagone. Je diviſe ſon arc en deux également en C; & les cordes AC, CB, ſont égales

chacune au côté du décagone. Je mene les rayons AO, BO, chacun deſquels eſt égal au côté de l'exagone. Du centre O, je mene ſur AC, la perpendiculaire OR qui diviſe l'arc AC & ſa corde en deux également (224). Ainſi menant SC, le triangle ASC eſt iſoſcele, & ſemblable au triangle iſoſcele ACB; à cauſe de l'angle CAB commun : donc AS. AC :: AC. AB; d'où je tire $AS \times AB = \overline{AC}$.

L'angle SOB embraſſe les trois quarts de l'arc du pentagone, & vaut par conſéquent 54 dégrés : car l'arc du pentagone en vaut 72. Or, l'angle ABO étant l'un des angles ſur la baſe du pentagone, vaut auſſi 54 dégrés : donc le triangle SOB eſt iſoſcele, & ſemblable au triangle OAB; à cauſe de l'angle commun SBO. Ainſi SB. BO :: BO. AB : d'où je tire $SB \times AB = \overline{BO}$: & ajoutant chaque membre de cette équation à chaque membre de la précédente $AS \times AB = \overline{AC}$, j'ai $AS \times AB + SB \times AB = \overline{AC} + \overline{BO}$. Or, $AS \times AB + SB \times AB = AB \times \overline{AS + SB}$; & $AS + SB = AB$: donc $AB \times AB$ ou $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BO}$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION LXXXIII.

315. *Le côté* AB *du décagone inſcrit dans un cercle, eſt égal à la médiane* OR *du rayon* OB *diviſé en moyenne & extrême raiſon.* (fig. 200.)

DÉMONSTRATION. Dans le décagone, l'arc AB eſt la dixieme partie de la circonférence, & vaut par conſéquent 36 degrés : donc des extrêmités A, B, menant les rayons AO, BO; l'angle AOB vaut 36 dégrés; & les deux autres angles OAB, OBA, du triangle iſoſcele OBA, valent chacun 72 degrés, & ſont doubles de l'angle AOB du ſommet. Or, dans tout triangle iſoſcele dont chaque angle de la baſe eſt double de l'angle du ſommet, la baſe AB eſt égale à la médiane du côté OB diviſé en moyenne & extrême raiſon (196). Donc, &c. C. Q. F. D.

316. PROBLÊME I. *Dans un cercle donné, inſcrire un décagone* (fig. 201.)

SOLUTION. Je mene un diametre AB : du centre O j'éleve le rayon OC, perpendiculaire ſur AB : je coupe le rayon AO en deux également en R : du point R pris pour centre, & d'un rayon égal à la diſtance RC, je décris l'arc CH qui coupe le rayon OB en H; & la droite OH eſt le côté du décagone. Ainſi en portant ce côté dix fois ſur la circonférence, j'aurai le décagone.

Car

Car par la conſtruction, ſi je portois OH ſur le rayon CO, de O en S ; ce rayon ſeroit coupé en S en moyenne & extrême raiſon, & la droite SO ſeroit ſa médiane (190) : donc SO ou OH étant la médiane du rayon coupé en moyenne & extrême raiſon, doit être le côté du décagone. (315.)

317. Corollaire. *Toute ligne* AH, *compoſée du côté* AO *de l'exagone, & du côté* OH *du décagone, eſt coupée en moyenne & extrême raiſon en* O. (*fig.* 201.)

Démonstration. Si je portois OH ſur AO, le rayon AO ſeroit coupé en moyenne & extrême raiſon ; & OH ſeroit ſa médiane : donc ſi à ce rayon AO, j'ajoute ſa médiane; la ligne entiere AH eſt encore coupée en moyenne & extrême raiſon (191.)

318. Problême II. *Dans un cercle donné, inſcrire un pentagone.* (fig. 201.)

Solution. Je fais la même conſtruction que j'ai faite dans le problême précédent pour le décagone ; & du point C au point H, je mene la droite CH qui eſt le côté du pentagone demandé.

Car le triangle rectangle COH donne $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OH}^2$ (171). Mais CO eſt le côté de l'exagone, & OH eſt le côté du décagone : donc CH doit être le côté du pentagone. (314.)

319. Problême III. *Dans un cercle donné, inſcrire un pentadécagone, c'eſt-à-dire une figure de* 15 *côtés.* (fig. 202.)

Solution. J'inſcris d'abord un pentagone ABCDE : enſuite j'inſcris dans le même cercle un triangle équilatéral LDH, dont le ſommet D de l'un des angles ſoit le même que le ſommet D de l'un des angles du pentagone; & la corde AL eſt le côté du pentadécagone demandé : ce que je démontre ainſi.

Du point D, je mene le diametre DM qui coupe le cercle & les deux polygones, chacun en deux également. Ainſi le côté AB du pentagone, & le côté LH du triangle, étant coupés chacun en deux également par DM, ſont perpendiculaires ſur DM, & paralleles entre eux : donc AL = BH (263). Or, l'arc AB du pentagone étant de 72 dégrés ; ſa moitié AM eſt de 36 : de même l'arc LMH du triangle étant de 120 degrés, ſa moitié LM eſt de 60 : retranchant donc de l'arc LM, l'arc AM; le reſte AL ſera de 24 dégrés. Ainſi diviſant la valeur 360 de la circonférence entiere par 24 ; le quotient 15 fera voir que l'arc AL eſt contenu 15 fois dans la circonférence. Donc, &c.

320. *Remarque.* Si l'on coupe en deux parties égales les arcs

des polygones qu'on vient de trouver, on aura des polygones qui auront un nombre de côtés double. Par exemple, le quarré donnera l'octogone; l'octogone donnera le polygone de 16 côtés; celui-ci donnera le polygone de 32 côtés, & ainſi des autres.

Mais quant aux polygones de 7 côtés, de 9, de 11, &c; il faut néceſſairement avoir recours à la géométrie compoſée, & ce que cette géométrie nous enſeigne, n'eſt gueres facile à mettre en pratique. A la vérité quelques Auteurs nous donnent des Méthodes faciles, qui ne ſont que des approximations; & d'autres nous apprennent à conſtruire des courbes nommées *quadratrices*, par le moyen deſquelles, il ſemble qu'on peut aiſément inſcrire tel polygone que l'on voudra. Cependant, ſi l'on y prend garde de près, tout cela n'avance de rien : les approximations ſont toujours imparfaites, & les quadratrices ne pouvant être décrites que par pluſieurs points, ſont toujours peu exactes; à cauſe qu'il n'eſt pas poſſible de trouver abſolument tous leurs points.

Ainſi, ce que je vois de plus ſûr dans ces occaſions, c'eſt de tâtonner juſqu'à ce qu'on ait trouvé exactement le polygone qu'on demande; ou de ſe ſervir du compas de proportion, ainſi que nous l'enſeignerons dans la ſuite : ce qui vaut encore mieux.

CHAPITRE VIII.

DE LA TRIGONOMÉTRIE, DE LA LONGIMÉTRIE, ET DU NIVELLEMENT.

321. LA *Trigonométrie* eſt la ſcience qui apprend à connoître tous les côtés & les angles d'un triangle, par la connoiſſance de quelques-unes de ces choſes.

322. Il faut obſerver que parmi les choſes connues, il doit y avoir tout au moins un côté : car j'ai démontré (101) que deux ou pluſieurs triangles peuvent avoir les angles égaux chacun à chacun, ſans avoir les côtés égaux.

323. Un angle aigu ABC étant donné (*fig.* 203), ſon angle de ſuite ABE, ſe nomme *complément* à deux droits de l'angle ABC : & l'angle DBA, qui manque à l'angle ABC pour valoir un droit, ſe nomme *complément* à l'angle ABC. Il faut prendre garde de ne pas confondre ces deux ſortes de complémens. (*)

(*) Pour éviter l'équivoque, les modernes géometres nomment *complément d'un angle*

324. Le ſommet B de l'angle ABC étant au centre d'un cercle ; la perpendiculaire AS tirée de l'extrêmité A de l'un de ſes côtés ſur l'autre BC, ſe nomme *Sinus droit* ou ſimplement *ſinus* de l'angle ABC ou de l'arc AC : la partie SC, que cette perpendiculaire coupe du côté de la circonférence, eſt le *ſinus verſe* : le côté BA ou BC, eſt le *ſinus total*, ou le rayon : la perpendiculaire RC, élevée à l'extrêmité C du rayon BC, juſqu'à la rencontre du rayon BA prolongé, ſe nomme la *tangente* ; & la droite BR eſt la *ſécante*. (fig. 203.)

325. Il faut donc diſtinguer la *ſécante* qu'on emploie dans la trigonométrie, d'avec celle dont nous avons parlé dans le Chapitre du cercle : car l'une s'arrête au centre du cercle, & l'autre coupe la circonférence en deux points.

326. Si l'on prolonge le ſinus AS d'un angle ABC, juſqu'à ce qu'il coupe la circonférence en T ; la corde AT ſera double du ſinus AS ; à cauſe que la perpendiculaire BC menée du centre, la coupe en deux également ; & ſon arc ACT ſera double de l'arc AC. Ainſi l'on doit dire que *le ſinus* AS *d'un angle* ABC, *eſt la moitié de la corde* AT *qui ſoutient un arc double.*

327. Corollaire. Delà il ſuit, (*fig.* 203.)

I°. Que le ſinus de l'angle ABE complément à deux droits de l'angle ABC, eſt le même que le ſinus de l'angle ABC. Car la corde AT, ſoutient l'arc AET, double de l'arc AE de l'angle ABE : & par conſéquent, la moitié AS de cette corde, eſt le ſinus de l'angle ABE.

II°. Que le ſinus de l'angle droit DBC eſt le rayon DB. Car ce ſinus étant prolongé ſoutiendroit la demi-circonférence, laquelle eſt double de l'arc DC, que l'angle droit embraſſe.

328. Le ſinus de l'angle ABD, complément à un droit de l'angle ABC, étant la perpendiculaire AN (324), laquelle eſt parallele & égale à BS ; il eſt clair que *ſi du rayon* BC *on retranche le ſinus verſe* SC *de l'angle* ABC, *le reſte* BS *ou* AN *ſera le ſinus du complément de l'angle* ABC.

329. Remarque. On a calculé les ſinus, tangentes, & ſécantes de tous les degrés du quart de cercle, & de leurs minutes, par des voies aſſez ſimples & faciles, qu'on trouve à la tête de toutes les tri-

---

aigu, ce qu'il faut lui ajouter pour qu'il vaille un angle droit ; & ils nomment *ſupplément d'un angle* quelconque, ce qu'il faut lui ajouter pour qu'il vaille deux angles droits. Ainſi (*fig.* 203) l'angle DBA eſt le complément de l'angle ABC, comme l'angle ABC eſt le complément de l'angle DBA ; & l'angle ABE eſt le ſupplément de l'angle ABC, comme l'angle ABC eſt le ſupplément de l'angle ABE. On laiſſe cependant ſubſiſter l'ancienne définition de l'auteur : parce qu'elle n'a rien de repréhenſible, & qu'il ne faut rien changer à un ouvrage ſans de grandes raiſons.

gonométries, & dont il ſeroit inutile de parler ici. Or, comme on ne pouvoit faire ces calculs, ſans employer la regle de trois, qui donne ſouvent des fractions; ou l'extraction de la racine quarrée, qui ne peut pas toujours ſe faire exactement; on a ſuppoſé le rayon diviſé en dix millions de parties: afin de pouvoir négliger les fractions ou les reſtes, leſquels étant au-deſſous de l'unité, ne peuvent jamais valoir la dixieme millionieme partie du rayon; ce qui peut être compté pour rien. Ces calculs faits, on a diſpoſé en colonnes d'une part les ſinus, tangentes, & ſécantes, depuis un degré juſqu'à quarante-cinq, en y joignant les ſinus, tangentes, & ſécantes des minutes de chacun de ces degrés; & de l'autre, on a mis auſſi en colonnes les ſinus, tangentes, & ſécantes des complémens des degrés, depuis un juſqu'à quarante-cinq, en y joignant auſſi les ſinus, tangentes, & ſécantes de leurs minutes: ce qui eſt d'une grande utilité, à cauſe qu'on a ſouvent beſoin des complémens.

Or, il faut obſerver que quoique les meſures dont nous nous ſervons pour meſurer un rayon, un ſinus, &c, ſoient différentes de celles qu'on a employées en calculant les tables des ſinus, tangentes, & ſécantes; cela n'altere en rien leur rapport. Suppoſons, par exemple, que le rayon étant diviſé en cent millions de parties, il ſe trouve une tangente qui n'en contienne que cinquante millions, & qui par conſéquent ne ſoit que la moitié du rayon; il eſt clair que ſi je diviſe le rayon & la tangente en pieds ou en pouces, le nombre de pieds que la tangente contiendra, ne ſera que la moitié du nombre de pieds contenus dans le rayon. Ainſi quand les tables nous auront fait connoître le rapport de deux lignes, ſi nous connoiſſons la valeur de l'une des deux en toiſes, pieds, ou pouces; nous trouverons aiſément la valeur de l'autre en toiſes, pieds, ou pouces, par le moyen d'une ſimple regle de trois. Par exemple, ſi la table nous donne pour la tangente cinq millions, & que le rayon ſoit de dix toiſes; je dirai: comme dix millions, valeur du rayon, ſelon les tables; eſt à cinq millions, valeur de la tangente, ſelon les mêmes tables, ainſi 10 toiſes, valeur du rayon en toiſes, eſt à un quatrieme terme qui ſera la valeur de la tangente en toiſes; & ce quatrieme terme ſera cinq toiſes, & ainſi des autres.

PROPOSITION LXXXIV.

330. *Dans tout triangle* ABC, *les côtés ſont entre eux comme les ſinus des angles oppoſés à ces côtés.* (fig. 204.)

DÉMONSTRATION. L'angle ABC étant à la circonférence, vaut

la moitié de l'arc ARC qu'il embraſſe : or, le côté AC, oppoſé à l'angle ABC, ſoutient l'arc entier ARC, ou le double de l'arc qui meſure l'angle ABC : donc la moitié du côté AC eſt le ſinus de l'angle ABC. Par la même raiſon la moitié du côté BC, eſt le ſinus de l'angle opppoſé A ; & la moitié du côté AB, eſt le ſinus de l'angle oppoſé C. Or, les côtés AC, AB, BC, ſont entre eux comme leurs moitiés : donc ils ſont entre eux comme les ſinus des angles qui leurs ſont oppoſés. C. Q. F. D.

Proposition LXXXV.

331. *Dans tout triangle ſcalene* ABC, *la ſomme de deux côtés* AB, BC, *eſt à leur différence ; comme la tangente de la moitié de la ſomme des deux angles* BAC, BCA, *faits ſur le troiſieme côté* AC, *eſt à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles.* (fig. 205.)

Démonstration. Du ſommet B pris pour centre, & avec un rayon égal au côté BC, qui eſt le plus grand des deux côtés AB, BC ; je décris un cercle. Je prolonge le petit côté AB de part & d'autre, juſqu'à la circonférence : ce qui donne AD égal à la ſomme AB plus BC des côtés AB, BC, & AE égal à la différence de ces mêmes côtés. L'angle DBC, externe au triangle ABC, eſt égal à la ſomme des deux angles internes oppoſés BAC, BCA ; & l'angle à la circonférence DEC, étant la moitié de l'angle au centre DBC, vaut par conſéquent la moitié de la ſomme des angles BAC, BCA. Or, l'angle BAC externe au triangle ACE, vaut les deux internes oppoſés AEC, ACE : donc la différence de l'angle BAC à l'angle AEC, eſt le petit angle ACE. Mais dans le triangle iſoſcele EBC, l'angle BEC étant égal à l'angle BCE ; la différence de l'angle BEC à l'angle BCA, eſt encore le petit angle ACE : donc puiſque l'angle BAC ſurpaſſe l'angle AEC du petit angle ACE, & que l'angle AEC ſurpaſſe l'angle BCA encore du petit angle ACE ; il s'enſuit que la différence des angles BAC, BCA eſt double de l'angle ACE, & que par conſéquent la moitié de cette différence eſt l'angle ACE.

Du point E pris pour centre, & avec la droite EC priſe pour rayon, je décris un arc CN, & je mene la tangente DC, qui va aboutir à l'extrêmité de la droite ED ; à cauſe que l'angle droit ECD doit embraſſer une demi-circonférence. Du point C pris pour centre, & avec la même droite EC priſe pour rayon, je décris l'arc EI ; & je mene ſa tangente EF. Ainſi en prenant EC pour rayon, l'arc NC eſt la meſure de l'angle DEC ; & la droite DC eſt ſa tangente. De même, l'arc EI eſt la meſure de l'angle ECI, & la droite EF eſt ſa tangente : or, les tangentes DC, EF, étant paralleles entre elles, à cauſe qu'elles

ſont perpendiculaires ſur EC ; l'angle FED eſt égal à ſon alterne EDC. Mais l'angle FAE eſt égal à l'angle DAC, qui lui eſt oppoſé : donc les deux triangles DAC, FAE ſont ſemblables, & nous avons DA . AE :: DC . EF ; c'eſt-à-dire, la ſomme des côtés AB, BC, eſt à leur différence AE, comme la tangente DC de la moitié de la ſomme des angles BAC, BCA, eſt à la tangente EF de la moitié de la différence de ces deux angles. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXXXVI.

332. *Dans tout triangle ſcalene* ABC, *le plus grand côté* AC, *eſt à la ſomme* AB + BC *des deux autres ; comme la différence de ces côtés, eſt à la différence des ſegmens* AR, RC, *du grand côté* AC, *faits par la perpendiculaire* BR *menée de l'angle oppoſé.* (fig. 206.)

DÉMONSTRATION. Du point B pris pour centre, & avec le rayon BC, je décris le cercle CDSE, & je prolonge le côté AB juſqu'à la circonférence en D. Ainſi j'ai BD = BC = BS ; & partant AB — SB, ou AS, eſt la différence des côtés AB, BC ; & AB + BD ou AD, en eſt la ſomme. De même, à cauſe de la corde EC diviſée en deux également par la perpendiculaire BR, j'ai ER = RC ; & par conſéquent AR — ER, ou AE, eſt la différence des ſegmens AR, RC. Or les ſécantes AC, AD, donnent AC . AD :: AS . AE (273) : donc le grand côté AC, eſt à la ſomme AD des deux autres ; comme leur différence AS, eſt à la différence AE des ſegmens AR, RC. Ce qu'il falloit démontrer.

DE LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

333. PROBLÊME I. *Connoiſſant l'hypothénuſe* AB *de* 636 *toiſes ; & le côté* BC *de* 386 ; *trouver les angles.* (fig. 207.)

SOLUTION. L'angle ACB, oppoſé à l'hypothénuſe, étant droit, ſon ſinus eſt égal au rayon & vaut, ſelon les tables 10000000. Or, l'hypothénuſe AB, eſt au côté BC ; comme le ſinus de l'angle droit ACB oppoſé à l'hypothénuſe, eſt au ſinus de l'angle CAB oppoſé au côté CB (330). Je dis donc par regle de trois : 636 eſt à 386, comme 10000000 eſt à un quatrieme terme, lequel en faiſant la regle eſt 6069135 : & cherchant ce nombre dans la colonne des ſinus marquée dans les tables ; je trouve qu'il appartient à l'angle de 37 degrés 22 minutes. Ainſi l'angle CAB eſt de 37 degrés 22 minutes. Or cet angle, joint à l'angle CBA, vaut un droit ou 90 degrés : retranchant donc de 90 degrés, 37 degrés 22 minutes ; le reſte 52 degrés 28 minutes, eſt la valeur de l'angle CBA.

334. REMARQUE. Pour abréger le calcul, on retranche du rayon

des ſinus, des tangentes, & des ſécantes, deux caracteres à droite; en obſervant que ſi les deux caracteres qu'on retranche valent plus de 50, on ajoute 1 au dernier caractere reſtant; & en voici la raiſon.

Soit le ſinus 3786486. Suppoſons d'abord qu'il ſoit 3786400, tandis que ſon rayon eſt 10000000: il eſt clair qu'en retranchant deux zeros de part & d'autre, c'eſt comme ſi j'avois diviſé l'un & l'autre par 100; & par conſéquent le rapport du ſinus au rayon, eſt le même après la diviſion qu'il l'étoit avant la diviſion. Mais ſi le ſinus eſt 3786486, & que je diviſe le ſinus & le rayon par 100; le quotient du ſinus ſera 37864 avec un reſte $\frac{86}{100}$, qui n'eſt pas bien éloigné de valoir 1. Ainſi, ſi je néglige ce reſte, je néglige près d'une unité; & comme le rayon diviſé par 100 eſt 100000, l'unité négligée eſt un cent millieme du rayon: & quoique ce cent millieme ſoit peu de choſe; cependant pour plus d'exactitude, on fait fort bien d'ajouter une unité au reſte du ſinus, & de dire que ce ſinus eſt 37865, plutôt que 37864.

Au contraire, ſi les deux derniers caracteres qu'on retranche du ſinus, ſont au-deſſous de cinquante; alors ces deux caracteres valent moins qu'une demi-unité du rayon, ou que la moitié d'un cent millieme; & par conſéquent on peut négliger cette valeur ſans craindre que le rapport du rayon au ſinus en ſoit ſenſiblement alteré.

335. PROBLÊME II. *Connoiſſant le côté* AC *de* 456 *toiſes, & l'angle oppoſé* B *de* 33 *degrés* 48 *minutes; trouver l'hypothénuſe* AB. (fig. 208.)

SOLUTION. Je dis: comme le ſinus de l'angle B, qui eſt dans les tables 55630 en retranchant deux caracteres, eſt au ſinus de l'angle droit C, qui eſt 100000 en retranchant auſſi deux caracteres; ainſi le côté AC de 456 toiſes, eſt à un quatrieme terme, qui eſt l'hypothénuſe: & la regle faite, je trouve que cette hypothénuſe vaut 820 toiſes.

336. PROBLÊME III. *Connoiſſant le côté* AC *de* 456 *toiſes, & l'angle* BAC *de* 56 *degrés* 12 *minutes; trouver le côté* BC *oppoſé à cet angle.* (fig. 209.)

SOLUTION. Du point A pris pour centre, & avec un intervalle égal au côté AC, je décris l'arc CD. Ainſi prenant AC pour rayon, le côté CB eſt la tangente de l'angle A: c'eſt pourquoi prenant dans les tables la valeur 149378 de la tangente de l'angle A, je dis: le rayon AC de 100000, ſelon les tables, eſt à la tangente CB de 149378, ſelon les mêmes tables; comme le même rayon AC de 456

toiſes, eſt à un quatrieme terme qui ſera la valeur en toiſes de la tangente CB : & la regle faite, je trouve 681 pour la valeur de CB.

337. PROBLÊME IV. *Connoiſſant les côtés* AC, CB ; *connoître les angles.* (fig. 210.)

SOLUTION. Je décris l'arc CD : par conſéquent CB eſt la tangente de l'angle A, & AC eſt le rayon. Je dis donc : comme le rayon AC en toiſes eſt à la tangente CB auſſi en toiſes ; ainſi le rayon AC de 100000, ſelon les tables, eſt à un quatrieme terme qui ſera la tangente CB exprimée en parties égales à celles du rayon : & cherchant dans les tables cette tangente, je trouverai à quel angle elle appartient.

338, PROBLÊME V. *Les côtés* AC, CB *étant connus ; connoître l'hypothénuſe.* (fig. 211.)

SOLUTION. Je cherche d'abord l'angle A, par le problême précédent : après quoi, je trouverai l'hypothénuſe AB, comme ci-deſſus (335).

DE LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES OBLIQU'ANGLES, OU QUI NE SONT PAS RECTANGLES.

339. PROBLÊME I. *Connoiſſant deux angles* C, B, *& le côté* AB *oppoſé à l'un des angles connus* C ; *trouver les deux autres côtés.* (fig. 112.)

SOLUTION. Je cherche dans les tables les ſinus des angles C & B, & je dis : comme le ſinus de l'angle C oppoſé au côté connu AB, eſt au ſinus de l'angle B oppoſé au côté inconnu AC ; ainſi le côté AB eſt au côté AC : & faiſant la regle, je trouve la valeur de AC.

Les angles C & B étant connus, le troiſieme eſt auſſi connu : puiſqu'il eſt le complément à deux droits de la ſomme des angles C & B. Ainſi je dis : le ſinus de l'angle C oppoſé au côté connu AB, eſt au ſinus de l'angle A oppoſé au côté inconnu BC ; comme le côté AB eſt au côté cherché BC, &c.

340. PROBLÊME II. *Connoiſſant le côté* AB *de* 469 *toiſes, le côté* BC *de* 584, *& l'angle compris* B *de* 68 *degrés ; trouver les autres angles & le côté* AC. (fig. 213.)

SOLUTION. Par la propoſition 85 (331), la ſomme des côtés AB, BC, eſt à leur différence ; comme la tangente de la moitié de la ſomme des angles A, C, eſt à la tangente de la moitié de leur différence. J'ajoute donc les deux côtés 469 & 584, & la ſomme eſt 1053 : je retranche le petit du plus grand, & la différence eſt 115.

Or,

Or, les trois angles pris enſemble étant de 180 degrés, ſi j'en retranche l'angle B = 68; le reſte 112 eſt la ſomme des deux angles. J'en prends la moitié 56, & je trouve dans les tables que la tangente de 56 degrés eſt 148256. Je dis donc: la ſomme 1053 des côtés AB, BC, eſt à leur différence 115; comme la tangente 148256 de la moitié de la ſomme des angles A, C, eſt à un quatrieme terme: & la regle me donne 16196, qui eſt la tangente de 9 degrés 12 minutes.

Ainſi j'ai la tangente de la moitié de la différence des angles A, C: or, je ſais que la moitié de la ſomme de deux grandeurs inégales, plus la moitié de leur différence, eſt égale à la grande; & que la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence eſt égale à la petite (*Calc.* 200). Ajoutant donc à 56 degrés, 9 degrés 12 minutes; la ſomme 65 degrés 12 minutes, ſera la valeur de l'angle A oppoſé au plus grand des deux côtés BC: & retranchant 9 degrés 12 minutes de 56; le reſte 46 degrés 48 minutes, ſera la valeur de l'angle C oppoſé à l'autre côté AB.

Les angles étant ainſi trouvés, je dis: le ſinus de l'angle A eſt au côté CB qui lui eſt oppoſé, comme le ſinus de l'angle B eſt au côté oppoſé AC.

341. PROBLÊME III. *Connoiſſant le côté* AC *de* 348 *toiſes, le côté* AB *de* 236, *& le côté* BC *de* 314; *connoître les angles.* (fig. 213.)

SOLUTION. Par la propoſition 86 (332), le plus grand côté AC eſt à la ſomme des deux autres AB, BC; comme la différence de ces côtés, eſt à la différence des ſegmens AE, EC, coupés par la perpendiculaire menée de l'angle B ſur le grand côté AC. Or la ſomme des côtés AB, BC, eſt 550; & leur différence eſt 78. Je dis donc: le côté AC = 348, eſt à la ſomme AB + BC = 550; comme la différence 78, eſt à un quatrieme terme: & la regle me donne 123 pour la différence des ſegmens AE, EC. Mais la ſomme des ſegmens eſt 348: ajoutant donc la moitié de cette ſomme, à la moitié de la différence 123; la ſomme 235 $\frac{1}{2}$ ſera le grand ſegment EC: & retranchant de la moitié de la ſomme, la moitié de la différence; le reſte 112 $\frac{1}{2}$ ſera le petit ſegment.

Cela fait, j'ai deux triangles rectangles ABE, BEC, dans chacun deſquels, je connois l'hypothénuſe & un côté: ainſi je trouverai les angles de ces deux triangles, de même que ci-deſſus (333).

342. REMARQUE. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail, pour laiſſer aux commençans le plaiſir de réſoudre eux-mêmes les autres cas qui peuvent ſe préſenter. Mais je ferai obſerver que ſi au lieu des ſinus, des tangentes, &c, & des grandeurs exprimées en toiſes, on

met leurs logarithmes; on abrégera beaucoup le calcul, & la difficulté des opérations. En voici un exemple (*fig.* 210.)

Soit le triangle rectangle ABC, dont je connois l'angle BAC de 56 degrés 12 minutes, & le côté AC de 456 toiſes. Si je veux trouver l'autre côté, je dois faire cette proportion (336) : le rayon AC de 100000, ſelon les tables, eſt à la tangente CB de 149378, ſelon les mêmes tables; comme le même rayon de 456 toiſes, eſt à un quatrieme terme : & la regle me donne 681 toiſes pour la valeur de CB. Or, pour faire cette régle, il faut que je multiplie 149348 par 456, & que je diviſe le produit par 100000 : ce qui ne laiſſe pas que de faire des opérations un peu longues, & qui quelquefois deviennent fort ennuyantes.

Pour éviter donc cet embarras, je cherche le logarithme du rayon qui eſt 100000000, & celui de la tangente 149378 qui eſt 101742873. Ces logarithmes, dans les tables de M. Ozanam, ſe trouvent à côté de leurs ſinus & de leurs tangentes : ce qui eſt d'une grande commodité. Je cherche auſſi dans la table des logarithmes des nombres, laquelle ſe trouve à la ſuite des Tables des ſinus, le logarithme 26589648 de 456. Or, lorſqu'on opere par les logarithmes, il faut faire par l'addition & la ſouſtraction, ce qu'on ſeroit obligé de faire par la multiplication & la diviſion (*calc.* 344). C'eſt pourquoi, j'ajoute enſemble les deux derniers logarithmes que je viens de trouver; & leur ſomme eſt 128332521 : j'en retranche le logarithme 100000000, & le reſte eſt le logarithme 28332521, lequel étant cherché dans les tables des logarithmes, appartient au nombre 681; & par conſéquent le côté cherché BC, eſt de 681 toiſes; & ainſi des autres.

DE LA LONGIMÉTRIE.

343. La *Longimétrie* eſt la ſcience de meſurer ſur le terrein les longueurs, les hauteurs, & les profondeurs acceſſibles ou inacceſſibles. On emploie pour cela les triangles; & on en meſure les angles par le moyen du *graphometre*, qui eſt un demi-cercle, ſur lequel tous les degrés ſont marqués, & au centre duquel eſt une regle tournante, armée à ſes extrêmités de deux *pinules* ou plaques de cuivre fendues par le milieu; afin de pouvoir viſer plus ſûrement un objet. Cet inſtrument eſt ſi commun, qu'il ſeroit inutile d'en faire une plus ample deſcription.

344. Comme on ne meſure ordinairement les longueurs ſur le terrein, que pour les rapporter ſur le papier; & que le papier eſt toujours beaucoup plus petit que le terrein qu'on veut repréſenter; il faut néceſſairement ſe ſervir d'une meſure qui ſoit à proportion plus

petite que celle que l'on a employé pour meſurer : & c'eſt ce qu'on fait par le moyen d'une *échelle* ou d'une ligne droite, que l'on diviſe & ſoudiviſe proportionnellement aux diviſions & ſoudiviſions de la meſure dont on s'eſt ſervi. Quand l'étendue que l'on veut repréſenter, eſt extrêmement grande, comme ſeroit une grande campagne ; on ſe contente de diviſer une ligne en grand nombre de parties égales qui repréſentent des toiſes ; & l'on néglige les pieds, les pouces & les lignes : parce que ces ſoudiviſions ne ſçauroient être ſenſibles ſur le papier. Mais ſi ce qu'on veut repréſenter n'eſt pas d'une grande étendue, comme ſeroit le plan d'une maiſon, d'un jardin, &c ; alors il ne faut point négliger les pieds, ni les pouces, &c ; & pour une plus grande exactitude, on fera l'échelle, ainſi qu'on va voir dans le problême ſuivant.

345. PROBLÊME I. *Conſtruire une échelle qui repréſente des toiſes, des pieds, des pouces & des lignes.* (fig. 214.)

SOLUTION. Je prends une ligne AB que je diviſe en parties égales, par exemple, en 4, qui repréſentent quatre toiſes. Je diviſe la quatrieme IIIB, en 6 parties égales, qui repréſentent des pieds : car la toiſe contient 6 pieds. Je conſtruis ſur AB, un rectangle ABEH, en lui donnant une hauteur AH à volonté. De tous les points de diviſion de la ligne AB, je mene des paralleles à la ligne AH ; & par cette conſtruction, il ſe trouve ſur la quatrieme toiſe IIIB, ſix petits rectangles tous égaux. Je mene la diagonale IIIR du premier de ces rectangles ; & diviſant ſa hauteur IIIN en douze parties égales, je mene par les points de diviſions des paralleles à AB : ainſi le triangle IIINR étant coupé par 12 baſes paralleles, c'eſt comme ſi l'on avoit douze triangles ſemblables qui auroient leurs ſommets au point III ; & qui par conſéquent auroient leurs baſes proportionnelles à leurs hauteurs. Or, les hauteurs ſont 1, 2, 3, 4, &c, juſqu'à 12 : donc la premiere baſe du côté du ſommet eſt 1 ; la ſeconde eſt 2 ; la troiſieme eſt 3 ; & ainſi de ſuite, juſqu'à la derniere NR qui eſt douze. Or, NR vaut un pied, & par conſéquent douze pouces : donc la premiere baſe du côté du ſommet vaut un pouce, la ſeconde en vaut deux, la troiſieme en vaut trois, &c.

Que ſi je veux repréſenter des lignes, je prolonge HE en S juſqu'à ce que ES ſoit de la grandeur d'un pouce, c'eſt-à-dire de la grandeur de la premiere baſe des douze triangles précédens ; & du point S menant la droite SB, j'ai un autre triangle ESB, lequel en prolongeant les paralleles à AB, ſe trouvera coupé par 12 autres baſes paralleles : & comme un pouce vaut 12 lignes, on prouvera,

comme ci-deſſus, que la premiere des baſes du côté du ſommet B, vaut une ligne, que la ſeconde en vaut deux, &c.

Cette échelle étant conſtruite, ſi je veux prendre, par exemple, 2 toiſes trois pieds, quatre pouces, je mets la pointe du compas ſur le point I de la droite AB, & je l'ouvre juſqu'à ce que l'autre pointe tombe ſur le point 3 marqué ſur la quatrieme toiſe IIIB; ainſi j'ai 2 toiſes 3 pieds. Je porte le compas ainſi ouvert, de ſorte que l'une de ſes pointes tombe ſur le nombre 4 marqué ſur la ligne IIIN, & que l'autre tombe ſur quelque point V de la ligne 4V; & fixant la pointe en V, j'ouvre le compas juſqu'à ce que l'autre pointe tombe en X, & j'ai la grandeur VX qui vaut 2 toiſes 3 pieds 4 pouces; & ainſi des autres.

346. COROLLAIRE. Il eſt aiſé de voir que *par le moyen d'une échelle on peut repréſenter ſur le papier telle longueur, & telle étendue de terrein que l'on voudra:* ce qui ſe fait en réduiſant cette étendue en triangles, & tranſportant enſuite ces triangles ſur le papier.

Car ſuppoſons que les côtés d'un triangle que j'ai meſuré ſur le terrein, ſoient l'un de deux toiſes, l'autre de trois, & le troiſieme de quatre. Si je prends ſur mon échelle trois grandeurs, dont l'une vaille deux parties ou toiſes de cette échelle, l'autre trois, & la troiſieme quatre; & qu'avec ces trois côtés, je décrive un triangle; ce triangle ſera ſemblable à celui du terrein: puiſque les côtés du triangle meſuré ſur le terrein ſeront entre eux, comme les côtés du triangle deſſiné ſur le papier: & ainſi des autres.

347. PROBLÊME II. *Meſurer une longueur qui n'eſt acceſſible que par l'une de ſes extrêmités.* (fig. 215.)

SOLUTION. I°. Soit la muraille ABCD, dont on ne peut approcher que du côté de A. Je prends ſur le terrein deux points, dont l'un R ſoit en ligne droite avec les points A, B, de la muraille; & l'autre S ſoit hors de l'allignement & aſſez écarté de R. Je poſe mon graphometre en S, enſorte que le plan de l'inſtrument ſoit horiſontal: je viſe en R, où je fais mettre un piquet; & viſant enſuite à l'extrêmité de la muraille en M, j'écris le nombre de degrés que ces deux rayons viſuels embraſſent. Je me tranſporte en R, en meſurant la diſtance SR; & portant le graphometre en R, je viſe en S & en M, & j'écris le nombre de degrés compris par les deux rayons viſuels. J'ai donc un triangle BRS, dans lequel je connois la baſe RS, & les deux angles ſur la baſe: donc l'angle au ſommet eſt auſſi connu, à cauſe qu'il eſt le complément des deux angles ſur la baſe, & par conſéquent je n'ai qu'à dire: le ſinus de l'angle B eſt au ſinus de

l'angle S; comme la baſe RS eſt au côté RB : & ce côté étant connu, ſi j'en retranche la diſtance RA, le reſte AB ſera la longueur cherchée de la muraille.

Si je ne veux point employer la trigonométrie, je fais une échelle, & par ſon moyen, je tranſporte ſur le papier la baſe RS. Enſuite avec un rapporteur ou petit demi-cercle gradué, je fais en R & en S les angles que j'ai trouvés ſur le terrein; ce qui me donne le petit triangle *rbs*, ſemblable au triangle RBS. Je retranche de *rb*, la valeur *ra* de RA; & portant le reſte *ab* ſur mon échelle, je trouve la valeur de la longueur de la muraille.

II°. Si je n'ai point de graphometre, ou que je veuille m'en paſſer; je prends ſur l'alignement RS, une partie RZ de quatre toiſes ou de cinq, &c; & une partie SV égale à RZ. De même ſur RB, je prends RX=RZ, & ſur SB je prends ST=SV. Je meſure XZ, & VT; & par conſéquent je connois les côtés des deux triangles ZRX, VST. Je tranſporte ſur le papier la baſe RS, par le moyen de mon échelle : je prends ſur *rs* la partie *rz*, & la partie *su*, chacune de quatre toiſes de mon échelle : enſuite avec *rz*, & deux autres lignes *rx*, *zx*, qui contiennent chacune autant de toiſes de mon échelle que les droites RX, ZX, en contiennent ſur le terrein; je conſtruis le triangles *rzx*, qui ſe trouve ſemblable au triangle RZX. Je fais de la même façon le triangle *ust*, ſemblable au triangle VST; & prolongeant les côtés *rx*, *st*, juſqu'à ce qu'ils ſe coupent en *b*; le triangle *rbs* eſt ſemblable au triangle RBS : puiſque les angles *r*, *s*, ſont égaux chacun à chacun aux angles R, S. Ainſi retranchant de *rb*, la droite *ra* d'un même nombre de toiſes que RA; le reſte *ab* porté ſur mon échelle, donne le nombre de toiſes de la muraille AB.

Cette derniere méthode me paroît la plus commode, non-ſeulement parce qu'elle diſpenſe d'avoir des inſtrumens; mais encore, parce qu'on n'eſt point obligé de meſurer les angles qu'il n'eſt pas toujours aiſé de prendre avec la derniere exactitude.

348. REMARQUE. J'ai dit qu'il falloit que le plan du graphometre fût horizontal : car comme cet inſtrument eſt toujours élevé ſur un piquet au-deſſus du terrein; il eſt viſible que ſi l'on viſoit au pied de la muraille, les rayons viſuels ſeroient plus longs que les diſtances SB, RB, & que les angles changeroient. C'eſt pourquoi s'il falloit viſer néceſſairement en B, comme lorſqu'il s'agit de meſurer une longueur ſans hauteur; on feroit mettre ſur l'alignement du rayon viſuel, quelques piquets : après quoi, remettant l'inſtrument dans ſa poſition horizontale; on viſeroit ſelon cet alignement, & ſelon l'alignement RS, pour meſurer l'angle fait en S; & il faudroit faire

la même choſe en R. On ſe peut tromper ſouvent, faute de faire attention à ceci.

349. PROBLÊME III. *Meſurer une longueur* AB *inacceſſible de toutes parts.* (fig. 216.)

SOLUTION. I°. Je prends une baſe RS ſur le terrein : du point S je viſe en R, en A, en B ; & je meſure les angles RSA, ASB. Du point R je viſe en S, en B, & en A ; & je meſure les angles SRB, BRA. Ainſi dans le triangle RAS, la baſe RS & les angles ſur la baſe, étant connus ; la trigonométrie me fera connoître aiſément les côtés RA, AS, & je connoîtrai de la même façon les côtés RB, SB du triangle RBS. Par conſéquent dans le triangle ARB, les côtes AR, RB, étant connus, de même que l'angle compris ARB ; il ſera facile de connoître la baſe AB. (340.)

II°. Sans trigonométrie, je tranſporte la baſe RS ſur le papier, & les angles ARS, BRS, BSR, ASB : ce qui me donne les triangles ARS, BRS, ſemblables à ceux du terrein. Après quoi menant la ligne AB, je connois par mon échelle la valeur de cette ligne.

III°. Sans inſtrument, je fais ſur RS tranſporté ſur le papier, des triangles ARS, BRS, ſemblables aux triangles qui ſont ſur le terrein, en employant la troiſieme méthode ci-deſſus (347) ; & je trouve AB de même qu'auparavant.

350. PROBLÊME. IV. *Meſurer une hauteur acceſſible ou inacceſſible.* (fig. 217.)

SOLUTION. I°. Je prends un point R dans la campagne ; & mettant le graphometre dans une ſituation perpendiculaire à l'horiſon, en ſorte que ſon diametre ſoit horiſontal, je viſe par le diametre au point M ; & tournant la regle, je viſe au ſommet B ; & je meſure l'angle BHM. Suppoſant donc que je puiſſe approcher de la hauteur AB, j'ai un triangle HMB dans lequel je connois le côté HM, & l'angle aigu BHM ; & par conſéquent l'autre angle HBM m'eſt auſſi connu : d'où je connoîtrai aiſément le côté BM (336) ; & ajoutant à ce côté la hauteur HR ou MA de l'inſtrument, j'aurai la valeur de BA.

II°. Si je dois agir ſans graphometre, je plante un piquet TS entre R & A, à trois ou quatre toiſes de diſtance ; & viſant horiſontalement en M, & enſuite en B, j'obſerve les points N, S, où les rayons viſuels coupent le piquet TS ; & je meſure NS. Je porte HM, ſur un papier, par le moyen de mon échelle : je prends ſur cette ligne une partie égale à la diſtance RT ou HN ; & j'éleve en N la perpendicu-

laire NS, égale à la valeur que j'ai trouvée ſur le piquet. Après quoi je mene HSB, qui coupe la perpendiculaire MB en B; & portant MB ſur l'échelle, je trouve ſa valeur, à laquelle ajoutant la valeur de MA, j'ai la hauteur entiere AB.

III°. Si le pied de la hauteur AB n'eſt pas acceſſible, je prends un autre point Z qui ſoit en ligne droite avec les points A, R; & après avoir fait en R les opérations qu'on vient de dire, je porte le graphometre en Z; & viſant en M, puis en B, je meſure l'angle BFM & la baſe FH. Or l'angle FHB étant le complement à deux droits de l'angle BHM, eſt auſſi connu: donc, dans le triangle BFH, dont la baſe & les deux angles ſur la baſe ſont donnés, je puis aiſément connoître le côté BH; & par le moyen de ce côté BH, & de l'angle aigu BHM, je puis connoître auſſi le côté BM, &c.

On peut aiſément ſe ſervir de la troiſieme méthode ci-deſſus, pour ce cas-ci, de même que pour les précédens.

351. PROBLÊME V. *Mener une ligne parallele à une ligne* AB *inacceſſible.* (fig. 218.)

SOLUTION. I°. Je cherche la longueur AB, ainſi que ci-deſſus (349); & faiſant en R l'angle VRO, égal à l'angle RAB que j'ai connu par le moyen du triangle RAB; la ligne RO eſt la parallele demandée: à cauſe que les angles VRO, RAB, du même côté ſont égaux.

II°. Si je ne me ſers point d'inſtrumens, je tranſporte ſur le papier, la baſe RS, & les triangles RAS, RBS: je mene enſuite la droite AB, & du point R la droite RO parallele à AB: je prends ſur RO & RS les parties RY, RT, égales entre elles, & de quatre ou cinq toiſes chacune; & je meſure par le moyen de mon échelle, la droite TY. Je prends ſur le terrein la partie RT de quatre toiſes; & mettant un piquet en R, & un autre en T, auxquels j'attache des cordeaux; je fais le cordeau RY de quatre toiſes, & le cordeau TY égal au nombre de toiſes que j'ai trouvé pour la valeur de TY. Je tends les deux cordeaux, juſqu'à ce que leurs extrêmités ſe touchent en Y; & le triangle RYT, eſt ſemblable au triangle RYT ſur le papier. Ainſi RY ſur le papier étant parallele à AB, la même RY ſur le terrein ſera auſſi parallele à AB.

352. PROBLÊME VI. *Lever le plan d'une grande campagne.* (fig. 219.)

SOLUTION. Je prends une baſe AB, d'où j'obſerve pluſieurs points tels que C, D, E, H, &c, auxquels je viſe par les extrêmités A, B de ma baſe. Ainſi je puis connoître aiſément les diſtances CD, DE, HG,

GF, de tous les points qui ſont à gauche ou à droite de ma baſe, & leurs diſtances aux extrêmités de la baſe : c'eſt pourquoi j'aurai les poſitions de tous ces points. Quant au point L, qui eſt en ligne droite avec la baſe AB, je prends une autre baſe AM, & de ſes extrêmités A, M, je viſe aux points C, L ; & par conſéquent je connoîtrai comme ci-deſſus, la droite LC, la droite LM, &c : ce qui me donnera la poſition du point L. Je ferois la même choſe s'il ſe trouvoit du côté de B, un point qui fût en ligne droite avec AB. Tout ceci eſt ſi facile, qu'il ſuffit d'en indiquer les voies.

353. PROBLÊME VII. *Lever le plan d'un endroit fermé, dans lequel on ne ſauroit entrer.* (fig. 220.)

SOLUTION. I°. Je meſure le côté AB, & le prolongeant enſuite en R, je meſure l'angle extérieur RBC, & le côté BC : ce qui me donne la poſition des deux côtés AB, BC. Je prolonge BC en S, & je meſure l'angle SCD, & le côté CD : ce qui me donne la poſition CD ; & j'acheve le reſte de la même façon.

Comme la muraille BC pourroit empêcher de prendre l'angle RBC avec le graphometre ; il faut, ſur le prolongement BRN, prendre un point R, d'où l'on menera une droite RH parallele à BC ; & l'on meſurera l'angle NRH, qui eſt égal à l'angle RBC, & ainſi des autres.

II°. Si je veux agir ſans inſtrument, je prends ſur le prolongement BR, & ſur le côté BC, les parties BP, BM, de la valeur d'environ quatre ou cinq toiſes : je meſure la droite MP, & tranſportant le tout ſur le papier par le moyen de mon échelle ; j'ai la poſition des deux côtés AB, BC ; & je fais la même choſe à l'égard des autres côtés.

354. PROBLÊME VIII. *Lever le plan d'un lieu hors duquel on ne peut ſortir, & dans le milieu duquel on ne ſauroit pénétrer.* (fig. 221.)

SOLUTION. Je meſure les côtés EA, AB, & l'angle compris A ; & le tout étant tranſporté ſur le papier, j'ai la poſition des deux côtés EA, AB, & ainſi des autres.

DU NIVELLEMENT.

355. Une ligne eſt dite *de niveau*, lorſque tous ſes points ſont également éloignés du centre de la terre ; & comme la figure de la terre approche beaucoup de la figure ſphérique, il s'enſuit qu'une ligne de niveau eſt une ligne circulaire.

356. Si l'on plante à plomb ſur la ſurface de la terre, un piquet AO (*fig.* 222) à l'extrêmité duquel on ait mis une lunette ou une regle 1, 5, qui lui ſoit perpendiculaire, & qu'on viſe à travers la lunette

nette ou par les pinules miſes aux extrêmités de la regle, un objet éloigné D; le rayon viſuel AD ſera tangente de la ligne de niveau AC, & s'en écartera d'autant plus qu'il ſera plus long. Cependant comme cette ligne AD nous paroît horiſontale, on la nomme ligne de *niveau apparent*; & on la prend même pour la ligne de vrai niveau AB, lorſque ſa longueur AD n'eſt pas au-deſſus de 100 ou de 110 toiſes: parce que la circonférence de la terre étant extrêmement grande à l'égard de 100 ou 110 toiſes, le hauſſement BD du point D du niveau apparent au-deſſus de B n'eſt pas ſenſible. Mais lorſque la ligne AD devient plus longue, la différence BD commencera à ſe faire ſentir, & l'on doit néceſſairement la corriger comme on verra bientôt.

357. Le niveau dont on ſe ſert le plus communément, lorſqu'il ne s'agit que d'une diſtance de 100 ou 110 toiſes, eſt un niveau d'eau. Il eſt compoſé d'un tuyau de fer blanc ABCD (*fig.* 223), recourbé à ſes extrêmités, à chacune deſquelles on met un autre petit tuyau de verre. Au milieu O, eſt un autre tuyau de fer blanc qui lui eſt perpendiculaire, & dans lequel on enchaſſe un piquet qu'on plante à plomb ſur le terrein. Quand on veut ſe ſervir de cet inſtrument, on le remplit d'eau, & alors la ſurface d'eau RS qui paroît à travers le tuyau de verre mis en A, ſe met de niveau avec la ſurface d'eau TX qui paroît en D. L'expérience nous apprend que les liquides qui agiſſent librement, ſe mettent toujours de niveau: ainſi, ſi l'on viſe de R en X, le rayon viſuel R aura ſes extrêmités R, X de niveau: & ſi l'on viſe en Z, la ligne RZ ſera une ligne de niveau apparent.

358. Les autres niveaux dont on ſe ſert pour les diſtances plus grandes, que 100 ou 110 toiſes, ne different preſque de celui-ci, qu'en ce qu'on emploie des verres de lunette au lieu d'eau, pour voir plus diſtinctement les objets; on en trouve les deſcriptions dans le traité de nivellement de M. *Picard* mis au jour par M. *de la Hire*, dans celui de *Bullet*, & dans pluſieurs autres ouvrages.

359. Le nivellement ſe nomme ſimple, lorſqu'il peut ſe faire d'un ſeul coup de niveau, & on le nomme compoſé, lorſqu'il eſt néceſſaire de donner pluſieurs coups de niveau, pour parvenir à ce qu'on cherche.

360. PROBLÊME I. *Deux points* A, B, *étant donnés ſur le terrein; trouver ſi ces deux points ſont de niveau, ou lequel des deux eſt plus éloigné du centre de la terre, & de combien.* (fig. 224.)

SOLUTION. Suppoſons d'abord que la diſtance AB ne ſoit pas au-

deſſus de 100 ou 110 toiſes. Je mets le niveau en A, & j'envoie en B un homme à qui je donne une double toiſe qu'il doit mettre à plomb en B, & un carton ſur lequel eſt une grande ligne noire, & je lui ordonne de faire gliſſer ce carton le long de la double toiſe, enſorte que la ligne noire ſoit toujours perpendiculaire ſur la toiſe. Je viſe par les ſurfaces R, S de l'eau; & lorſque je m'apperçois que la ligne noire du carton paſſe par l'extrêmité T du rayon viſuel RST, je fais ſigne à mon aide de s'arrêter, afin qu'il meſure la hauteur TB, & je meſure en même tems la hauteur VA du rayon viſuel. J'ordonne à mon aide de revenir, & ſi la hauteur TB qu'il a trouvée ſe trouve égale à la mienne AV, les deux points A, B ſont de niveau. Car les points VT, étant également éloignés du centre de la terre; ſi de ces diſtances égales je retranche les parties égales VA, TB, les points AB ſeront auſſi également éloignés du même centre; que ſi la hauteur TB eſt moindre que la hauteur VA, je retranche TB de VA, & le reſte HA fait voir que le point A eſt plus proche du centre de la terre que le point B de la quantité HA; & il eſt aiſé de voir ce qu'il faudroit faire ſi TB étoit plus grand que VA.

Si la diſtance AB (*fig.* 225) eſt au-deſſus de 100 toiſes, ſans être au-deſſus de 200; je coupe cette diſtance en deux parties égales AC, CB, & mettant le niveau en C; je viſe d'abord du point R par le point S au point T; enſuite je viſe du point S par le point H, & ſi je trouve que les deux hauteurs AH, BT ſoient égales, les points A, B ſeront de niveau. Mais ſi l'une eſt plus grande que l'autre, je retranche la moindre de la plus grande, & le reſte me fait voir de combien l'un des points eſt plus élevé que l'autre, ou de combien il eſt plus éloigné du centre de la terre.

Que ſi la diſtance AM eſt au-deſſus de 200 toiſes, je la coupe en parties égales, dont chacune ne ſoit pas au-deſſus de 100, par exemple, en trois AC, CB, BM : puis mettant mon niveau en C, je nivelle les deux points A, B, après quoi mettant le niveau en B, j'éleve les points B, M, & ainſi des autres.

361. REMARQUE. Cette méthode eſt excellente pour ſe paſſer du calcul qu'il faut néceſſairement faire lorſqu'il eſt queſtion de corriger l'erreur des coups de niveau trop étendus. Mais comme elle oblige à multiplier les opérations, nous allons voir de quelle maniere ſe doivent faire les corrections dont nous venons de parler.

362. PROBLÊME II. *Corriger les erreurs du niveau apparent.* (fig. 226.)

SOLUTION. Supposons que le cercle ADI représente la surface de la terre, & que la distance AD des deux points A, D qu'on veut niveler, soit de 500 toises : le niveau apparent AB sera la tangente, & la droite BOI menée par le centre, sera la sécante. Ainsi nous aurons BD . BA :: BA . BI (271). Or, la partie DB de la sécante étant extrêmement petite à l'égard du diametre DI de la terre, on peut la négliger ; & par conséquent DB . BA :: BA . DI ; d'où je tire $DB \times DI = \overline{BA}$, & $DB = \frac{\overline{BA}}{DI}$: c'est-à-dire que si on divise le quarré de la distance AB par le diametre de la terre, le quotient sera le haussement du niveau apparent au-dessus du vrai.

Or, selon Messieurs *Picard* & *de la Hire*, le diametre de la terre est de 653894 toises : faisant donc le quarré 250000 de la distance BA = 500 toises, & le divisant par 653894, je trouve 2 pouces 9 lignes pour le haussement BD. Ainsi après avoir nivelé à l'ordinaire, je dois retrancher 2 pouces 9 lignes de la hauteur que je trouve du côté de B lorsque je vise de A en B.

363. REMARQUE. Quoique cette méthode ne paroisse pas de la derniere exactitude, cependant elle est extrêmement juste : car si au quarré de AB on ajoute le quarré de AO, ces deux quarrés ensemble seront égaux au quarré de l'hypothénuse BO ; & tirant la racine quarrée, on aura la valeur de BO, de laquelle retranchant DO = AO, on trouvera que la valeur de BD est effectivement 2 pouces 9 lignes, comme ci-dessus.

364. COROLLAIRE I. *Les haussemens* BD, EH, &c, *de différens points* B, E, &c, *du niveau apparent, sont comme les quarrés de leurs distances* AB, AE, &c, *au point* A *où se fait le nivellement.* (fig. 226.)

DÉMONSTRATION. Nous avons $BD = \frac{\overline{AB}}{DI}$ (362) ; & par la même raison $EH = \frac{\overline{AE}}{DI}$: donc nous avons BD. EH :: $\frac{\overline{AB}}{DI}$. $\frac{\overline{AE}}{DI}$. Or, les deux derniers termes étant divisés par la même grandeur DI, sont entre eux comme s'ils n'étoient pas divisés : donc BD . EH :: $\overline{AB}$. $\overline{AE}$.

365. COROLLAIRE II. *Connoissant donc le haussement* BD *d'un point* B *de niveau apparent, on peut connoître les haussemens de tous les autres points* E, &c, *de ce niveau dont on connoît les distances* AE, &c. (fig. 226.)

Car je n'ai qu'à dire par regle de trois : comme le quarré de AB est

au quarré de AE ; ainſi le hauſſement connu BD, eſt à un quatrieme terme qui ſera le hauſſement cherché EH ; & ainſi des autres.

C'eſt de cette maniere que M. *Picard* a calculé les hauſſemens des points de niveau apparent au-deſſus du vrai niveau, depuis la diſtance de 50 toiſes, juſqu'à celle de 4000.

TABLE DES HAUSSEMENS DU NIVEAU APPARENT.

Diſtances.	Hauſſemens.			Diſtances.	Hauſſemens.		
Toiſes.	*Pieds.*	*Pouces.*	*Lignes.*	*Toiſes.*	*Pieds.*	*Pouces.*	*Lignes.*
50	0	0	$\frac{1}{7}$	750	0	6	3
100	0	0	$1\frac{1}{7}$	800	0	7	1
150	0	0	3	850	0	7	$11\frac{1}{2}$
200	0	0	$5\frac{1}{7}$	900	0	8	11
250	0	0	$8\frac{1}{7}$	950	0	10	0
300	0	1	0	1000	0	11	0
350	0	1	$4\frac{1}{7}$	1250	1	5	$2\frac{1}{2}$
400	0	1	$9\frac{1}{7}$	1500	2	0	9
450	0	2	3	1750	2	9	$8\frac{1}{2}$
500	0	2	9	2000	3	8	0
550	0	3	6	2500	5	8	9
600	0	4	0	3000	8	3	0
650	0	4	8	3500	11	1	9
700	0	5	4	4000	14	8	0

366. PROBLÊME III. *Niveler deux termes dont on ne connoît pas la diſtance.* (fig. 227.)

SOLUTION. I°. Je mets le niveau en A, & je viſe en B ; je tranſporte le niveau en B, & je viſe en A. Je meſure les hauteurs CA, SB : j'en retranche de part & d'autre la hauteur AR ou BT de l'inſtrument ; & ſi les reſtes CR, ST ſont égaux, je dis que les points A, B, ſont de niveau. Car le hauſſement du niveau apparent, lorſque je viſe de A en B, eſt le même que le hauſſement lorſque je viſe de B en A : donc les points C, S, doivent être également éloignés du centre de la terre ; & par conſéquent à cauſe de CA = SB, les points A, B en doivent être auſſi également éloignés.

II°. Si les reſtes ST, CR (*fig.* 228), ſont inégaux ; je retranche le moindre CR du plus grand ST ; & la moitié du reſte marque de combien le point A eſt au-deſſus du niveau du point B. Car ſuppoſons que le point A ſe trouvât en un point F qui fût de niveau avec le point B : le niveau au lieu d'être en R, ſeroit en X, & les hauteurs LT, CX ſeroient égales. Or, le point A venant à s'élever, le niveau s'éleve auſſi de X en R : ce qui fait augmenter la hauteur LT de la quantité LS ; & de l'autre côté, la hauteur CX diminue d'une quan-

tité égale à LS : ainſi CR = LT — LS. Retranchant donc de la hauteur ST, la hauteur CR ou LT — LS; le reſte ST — LT + LS eſt égal à 2 LS ou à deux fois la hauteur SL ou AF du point A au-deſſus du point F : donc la moitié de ce reſte eſt la hauteur AF.

Et il ne faut pas dire que la hauteur AF ou RX n'eſt pas égale à la hauteur SL, à cauſe que les lignes RF, SB, ne ſont pas paralleles; puiſqu'elles vont aboutir au centre de la terre. La diſtance des points F, B, au centre de la terre étant extrêmement grande à l'égard des lignes RF, SB, & de leur diſtance FB qui eſt auſſi très-petite par rapport à la circonférence de la terre; les deux lignes FR, SB, peuvent paſſer pour paralleles : ce qui rend les parties RX, SL ſenſiblement égales.

III°. Enfin, ſi je trouve d'une part la hauteur SB (*fig.* 229) plus grande que la hauteur BT; & de l'autre, la hauteur AX moindre que la hauteur AR du même niveau; j'ajoute l'excédent ST au défaut RX, & le moitié de la ſomme eſt la hauteur du point A au-deſſus du niveau du point B. Car ſuppoſons que le point A s'abaiſſe en F, où il ſoit de niveau avec le point B; le niveau au lieu d'être en R, deſcendra en V, & les hauteurs HT, XV ſeront égales. Or, le niveau montant en R, la hauteur HT augmente d'une partie SH égale à AF; & le point X au lieu d'être au-deſſus du niveau, comme il étoit auparavant, ſe trouve au-deſſous; en ſorte que la partie XV dont il ſurpaſſoit le niveau jointe à la partie RX dont il en eſt ſurpaſſé, ſont enſemble égales à SH : donc RX = SH — HT, & par conſéquent ajoutant ST ou SH + HT avec RX ou SH — HT, la ſomme 2 SH eſt le double de SH ou de la hauteur AF du point A au-deſſus du point B.

Cette méthode eſt excellente pour niveler des termes dont il ſeroit trop embarraſſant de trouver la diſtance.

367. PROBLÊME IV. *Niveler deux termes* A, R, *entre leſquels il ſe trouve des hauteurs & des déſcentes.* (*fig.* 230.)

SOLUTION. Je donne pluſieurs coups de niveau en montant de A en S, puis en deſcendant de S en X; enſuite en remontant de X en Z, & enfin en redeſcendant de Z en R. Je fais une colonne de toutes les hauteurs que j'ai trouvées en montant de A en S & de X en Z : & une autre colonne de toutes celles que j'ai trouvées en deſcendant de S en X & de Z en R : puis faiſant les ſommes de chacune de ces colonnes, je retranche la petite de la grande, le reſte marque la hauteur du point A au-deſſus du point R; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

CHAPITRE IX.

DE LA PLANIMÉTRIE OU MESURE DES SURFACES PLANES, ET DE LEUR RAPPORT ENTRE ELLES.

368. Nous nommerons *élémens* d'une ſurface plane, les lignes infiniment proches dont on conçoit qu'elle eſt compoſée. Toute ligne CR (*fig.* 231) qui coupera perpendiculairement tous les élémens, ſera la ligne qui exprimera leur multitude ou la ſomme de leur épaiſſeur, ou leur épaiſſeur totale.

PROPOSITION LXXXVII.

369. *Les parallélogrammes* ABCD, EBCF, *qui ont la même baſe* BC, *& qui ſont entre deux paralleles* AF, BH, *ſont égaux entre eux.* (fig. 232.)

DÉMONSTRATION. A cauſe des parallélogrammes, nous avons AB = DC, BE = CF, & AD = EF: ajoutant donc à ces deux dernieres, la partie DE, nous aurons AE = DF: donc les deux triangles AEB, DCF, ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, ſont parfaitement égaux (100). Je retranche de part & d'autre le petit triangle DOE, & j'ai ADOB = OEFC, & ajoutant de part & d'autre le petit triangle BOC, je trouve ABCD = EBCF: donc, &c. C. Q. F. D.

370. COROLLAIRE I. *Les parallélogrammes* ABCD, EMHF, *qui ſont entre deux paralleles* AF, BH, *& qui ont les baſes égales* BC, HM, *ſont égaux.* (fig. 232.)

DÉMONSTRATION. Je mene les droites BE, CF: j'ajoute aux deux droites égales AD, EF, la partie commune DE; & j'ai AE = DF, & AB = DC. Or, l'angle EAB = FDC: donc les triangles EAB, FDC, ayant les côtés EA, AB, égaux chacun à chacun aux côtés ED, DC, & l'angle compris égal à l'angle compris, ſont parfaitement égaux; & l'angle AEB eſt égal à l'angle DFC. Ainſi les droites BE, CF, étant égales & également inclinées entre les paralleles AF, BH, ſont paralleles entre elles; & par conſéquent EBCF eſt un parallélogramme. Or, EBCF = ABCD (369); & par la même raiſon EBCF = EMHF: donc ABCD = EMHF.

371. COROLLAIRE II. *Tout parallélogramme* EBCF *eſt égal au produit de ſa baſe* BC *multipliée par ſa hauteur ou par la perpendiculaire* ER *menée de ſon ſommet ſur ſa baſe.* (fig. 232.)

DÉMONSTRATION. Suppoſons que le parallélogramme ABCD ſoit

rectangle : le produit de la baſe BC multipliée par la hauteur AB ſera valeur de ce rectangle. Or, le parallélogramme EBCF eſt égal au rectangle : donc le parallélogramme EBCF eſt auſſi le produit de ſa baſe BC par ER ou par ſon égale AB.

372. Corollaire III. *Les parallélogrammes* BEFC, MEFH, *qui ont les baſes & les hauteurs égales, ſont égaux.* (fig. 232.)

Démonstration. Ils ſont chacun égaux à un rectangle BADC qui auroit même baſe & même hauteur qu'eux, ou qui ayant la baſe égale à la baſe ſeroit entre mêmes paralleles ; donc, &c.

373. Corollaire IV. *Les parallélogrammes qui ont les baſes inégales & les hauteurs égales, ſont entre eux comme les baſes : ceux qui ont les hauteurs inégales & les baſes égales, ſont entre eux comme leurs hauteurs : ceux qui ont les hauteurs réciproques à leurs baſes, ſont égaux entre eux.* (fig. 232.)

Démonstration. I°. Suppoſons que la baſe BC du parallélogramme BADC, ſoit plus grande que la baſe MH du parallélogramme EMHF ; & que les hauteurs AB, ER ſoient égales. Le parallélogramme BADC eſt donc le produit de ſa baſe BC par ſa hauteur BA ; & le parallélogramme MEFH eſt auſſi le produit de ſa baſe MH par ſa hauteur ER ou par ſon égale BA. Mais nous ſavons que ſi deux grandeurs inégales BC, MH, ſont multipliées par une même grandeur BA ; les produits ſont entre eux comme les grandeurs inégales BC, MH : donc les deux parallélogrammes ſont entre eux comme leurs baſes inégales BC, MH.

II°. Si l'on ſuppoſe que les baſes BC, MH, ſont égales ; & leurs hauteurs BA, ER, inégales, on démontrera de la même façon, que les deux parallélogrammes ſont entre eux comme leurs hauteurs.

III°. Enfin, ſi les hauteurs ſont réciproques aux baſes ; on démontrera, comme ci-deſſus (184), que les parallélogrammes ſont égaux.

374. Corollaire V. *Les triangles* ABC, AEC, *qui ont même baſe, & qui ſont entre deux paralleles, ſont égaux.* (fig. 233.)

Démonstration. Je mene CR parallele à AB, & CH parallele à AE : ce qui me donne les deux parallélogrammes égaux ABRC, AEHC (369). Mais BC étant la diagonale du parallélogramme ABRC, le triangle ABC eſt la moitié de ce parallélogramme ; & par la même raiſon, le triangle AEC eſt la moitié du parallélogramme AEHC : donc ces deux triangles ſont égaux, à cauſe que les moitiés ſont entre elles comme leur tout.

375. COROLLAIRE VI. *Tout triangle eſt égal au produit de ſa baſe multiplié par la moitié de ſa hauteur.* Car tout triangle eſt la moitié d'un parallélogramme de même hauteur & de même baſe. Mais le parallélogramme eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur : donc le triangle eſt le produit de la baſe par la moitié de ſa hauteur.

376. COROLLAIRE VII. Donc, I°. *Les triangles qui ont des baſes égales, & qui ſont entre mêmes paralleles ou qui ont des hauteurs égales, ſont égaux.*

II°. *Ceux qui ont des baſes inégales & des hauteurs égales, ſont entre eux comme leurs baſes.*

III°. *Ceux qui ont des hauteurs inégales, ſont entre eux comme leurs hauteurs.*

IV°. *Ceux qui ont les hauteurs réciproques aux baſes, ſont égaux.*

Tout cela eſt évident, par la raiſon que les triangles ſont moitiés des parallélogrammes de même baſe & de même hauteur qu'eux.

377. COROLLAIRE VIII. *Tout polygone régulier* EFCGH, *eſt égal à un triangle* ABC, *dont la baſe* BC *eſt égale au circuit du polygone ; & dont la hauteur* AB *eſt égale à l'apothême* OR. (fig. 234.)

DÉMONSTRATION. Suppoſons que le polygone ſoit un pentagone. Du centre O je mene des rayons à tous les angles : ce qui le diviſe en cinq triangles de même hauteur & de même baſe. Or le triangle OHG eſt égal à ſa baſe HG multipliée par la moitié de ſa hauteur OR (375). Donc le pentagone eſt égal à 5 HG multiplié par $\frac{1}{2}$ OR. Mais le triangle ABC eſt égal à BC multiplié par $\frac{1}{2}$ AB (375) ; & par la ſuppoſition, nous avons BC = 5 HG, & AB = OR : donc le triangle ABC eſt égal au polygone.

378. COROLLAIRE IX. *Tout cercle eſt égal à un triangle qui auroit pour baſe une ligne égale à la circonférence, & pour hauteur une ligne égale au rayon.* (fig. 235.)

DÉMONSTRATION. I°. Le cercle eſt un polygone d'une infinité de côtés, dont le circuit eſt la circonférence ; & dont l'apothême n'eſt pas différent du rayon, à cauſe que les côtés ſont infiniment proches de la circonférence. Donc, &c.

II°. Ceci peut ſe démontrer encore en cette ſorte. Soit le cercle BQM, dont le rayon eſt OB : je conçois que du même centre O, & par tous les points infiniment proches du rayon, ſoient décrites des circonferences CRS, DHN, &c, qui ſeront les élémens du cercle, enſorte que leur ſomme ne differera pas du cercle même. Du point B, j'éleve la perpendiculaire BA que je conçois égale à la circonférence.

BQM

BQM. Du point A, je mene au centre la droite AO; & de tous les points de diviſion, je conçois des droites CF, DG, paralleles à la droite BA, & qui ſe terminent ſur AO.

Les cercles BQM, CRS, étant ſemblables (287); nous avons BQM. CRS :: OB. OC; & à cauſe des triangles ſemblables OBA, OCF, nous avons auſſi BA. CF :: OB. OC: donc BQM. CRS:: BA. CF. Mais par la ſuppoſition, BQM = BA : donc CRS = CF; & on prouvera de même que la circonférence DHN eſt égale à la droite DG. D'où il ſuit que tous les élémens DG, CF, BA, du triangle OBA, ſont égaux chacun à chacun à tous les élémens du cercle BQM; & que par conſéquent ce cercle eſt égal au triangle OBA, qui a pour baſe la droite BA égale à la circonférence, & pour hauteur le rayon OB.

379. Corollaire X. Donc *tous les cercles de différens rayons, tels que* BQM, CRS, DHN, &c, *peuvent ſe changer en triangles ſemblables* OBA, OCF, ODG, &c. (*fig.* 235.)

380. Corollaire XI. *Toute couronne, c'eſt-à-dire, tout eſpace compris entre deux circonférences* BQM, CRS, *concentriques & inégales, eſt égale à un trapezoïde* BCFA, *dont les côtés paralleles & inégaux* BA, CF *ſont égaux chacun à chacun aux deux circonférences, & dont la hauteur* CB *eſt la différence des rayons* OB, OC. (fig. 235.)

Démonstration. La couronne n'eſt autre choſe que le cercle BQM moins le cercle CRS; or le cercle BQM eſt égal au triangle OBA; & le cercle CRS eſt égal au triangle OCF : donc la couronne eſt égale au triangle OBA, moins le triangle OCF; c'eſt-à-dire au trapézoïde BCFA.

381. *Remarque.* De tout ce que nous venons de dire, il paroît s'enſuivre qu'on peut trouver la quadrature du cercle, c'eſt-à-dire une figure rectiligne égale au cercle : mais la difficulté conſiſte à trouver une ligne droite égale à la circonférence; & c'eſt à quoi il n'y a pas d'apparence qu'on parvienne ſi-tôt.

Comme les côtés des polygones inſcrits & circonſcrits au cercle, approchent d'autant plus de la circonférence que leur nombre eſt plus grand; il eſt ſûr qu'à force d'inſcrire & de circonſcrire des polygones ſemblables, on en trouveroit à la fin deux dont les côtés ſe confondroient avec la circonférence. Mais parce qu'il faudroit pour cela faire des calculs à l'infini, ce qui n'eſt pas poſſible, *Archimede* n'a pouſſé le ſien que juſqu'aux polygones inſcrit & circonſcrit de 96 côtés; & il a trouvé que le diametre étoit au circuit du polygone

circonſcrit, comme 1 eſt à $3\frac{1}{7}$, ou comme 7 à 22; & que le même diametre étoit au circuit du polygone inſcrit, comme 1 à $3\frac{70}{71}$, ou comme 7 à $21\frac{70}{71}$: de ſorte qu'en réduiſant le diametre 7, & les deux circuits 22, & $21\frac{70}{71}$ au même dénominateur 71, ce qui donne $\frac{497}{71}$ pour le diametre, & $\frac{1562}{71}$, $\frac{1561}{71}$ pour les deux circuits; la différence des deux circuits eſt $\frac{1}{497}$, c'eſt-à-dire, une partie du diametre diviſé en 497 parties ou $\frac{1}{497}$ du diametre.

Or, comme la circonférence du cercle approche beaucoup plus du circuit du polygone circonſcrit, que de celui de l'inſcrit; il eſt clair que la différence de la circonférence du cercle au circuit du polygone circonſcrit doit être moindre que la moitié de la 497e partie du diametre, c'eſt-à-dire moindre que la 994e partie du diametre : & c'eſt pourquoi on ſe ſert plutôt du rapport de 7 à 22, pour exprimer le rapport du diametre du cercle à ſa circonférence, que du rapport de 7 à $21\frac{70}{71}$.

Cependant quoique le rapport de 7 à 22 ſoit aſſez juſte dans la pratique; les Géometres qui ſe piquent de grande exactitude, emploient ordinairement des nombres plus grands pour diminuer la différence. Celui qui me paroît le plus commode pour l'uſage, c'eſt le rapport de 1000 à 3141, parce que dans les regles de trois qu'il faut faire, le nombre 1000 épargne quelquefois une multiplication, & quelquefois une diviſion (*).

382. Problême I. *Trouver l'aire d'un cercle dont on connoît le rayon* OB (fig. 236.)

Solution. Soit le rayon OB de 3 toiſes : le diametre en contiendra 6. Ainſi je n'ai qu'à dire par regle de trois : 1000 eſt à 3141, comme 6 eſt à un quatrieme terme; & ce quatrieme terme ſera la circonférence, laquelle étant multipliée par la moitié du rayon, donnera l'aire du triangle OBA, lequel eſt égal à la ſurface du cercle.

383. Corollaire I. Si on connoiſſoit la circonférence du cercle, & qu'on cherchât le rayon pour trouver enſuite la ſurface du cercle; on diroit par regle de trois : 3141 eſt à 1000, comme la circonférence donnée eſt à un quatrieme terme, qui feroit le diametre de la circonférence donnée; & par conſéquent la moitié de ce diametre ſeroit le rayon cherché.

384. Corollaire II. *Tout ſecteur* ABC *eſt égal au produit de ſon arc* AC *multiplié par la moitié du rayon* AB. (fig. 236.)

(*) Le rapport de 10000 à 31415, ou de 100000 à 314159, eſt tout auſſi commode, & approche beaucoup plus du vrai rapport du diametre à la circonférence.

DÉMONSTRATION. Le cercle ARC étant un polygone régulier d'une infinité de côtés, eſt compoſé d'une infinité de triangles qui ont tous pour hauteur le rayon, & dont la ſomme des baſes eſt égale à la circonférence : & par la même raiſon le ſecteur ABC eſt compoſé d'une infinité de petits triangles qui ont auſſi pour hauteur le rayon AB, & dont la ſomme des baſes eſt égale à l'arc RC. Mais la ſomme des triangles qui compoſent le cercle, eſt égale à la ſomme totale des baſes, ou à la circonférence, multipliée par la moitié du rayon : donc la ſomme des triangles qui compoſent le ſecteur, eſt égale à la ſomme totale des baſes, c'eſt-à-dire à l'arc AC multiplié par la moitié du rayon.

385. COROLLAIRE III. *L'aire d'un ſegment* ASC *eſt égale au ſecteur* ABCS, *moins le triangle* ABC. Ce qui eſt évident.

386. PROBLÊME II. *Meſurer un trapézoïde* ABCD. (fig. 237.)

SOLUTION. J'ajoute enſemble les deux baſes AD, BC; & multipliant leur ſomme par la moitié de la hauteur ou de la perpendiculaire AB, menée entre les deux baſes ; le produit eſt la valeur du trapézoïde : ce que je démontre ainſi.

Je diviſe l'un des côtés non-paralleles DC, en deux également en O; & du point A par le point O, je mene la droite AR, qui coupe BC prolongé en R. Les triangles ADO, OCR ayant l'angle AOD égal à l'angle COR qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle ADO égal à ſon alterne OCR, & le côté DO égal au côté OC, ſont parfaitement égaux (100); & le côté AD eſt égal au côté CR. Ajoutant donc de part & d'autre la partie commune AOCB; nous aurons le trapézoïde ADCB égal au triangle ABR. Mais le triangle ABR eſt égal au produit de ſa baſe BR ou BC + AD multipliée par $\frac{1}{2}$ AB (375) : donc le trapézoïde eſt égal au même produit.

Ou bien je coupe les côtés non-paralleles AB, DC (*fig.* 238), chacun en deux également en R, S; & menant la droite RS qui ſera parallele à AD ou BC, je multiplie cette ligne RS par la hauteur AB : ce qui donne la valeur du trapézoïde. Pour le prouver,

Du point S, je mene FE perpendiculaire ſur BC, & qui rencontre AD prolongé en E. Les triangles DSE, CSF, ayant l'angle DSE égal à l'angle CSF qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'angle EDS égal à ſon alterne FCS, & le côté DS égal au côté SC ſont parfaitement égaux. Ajoutant donc à chacun d'eux la partie commune ADSFB, nous aurons le rectangle AEBF égal au trapézoïde ADCB. Mais le rectangle eſt égal au produit de BF ou RS par la hauteur AB : donc le trapézoïde eſt égal au même produit.

387. Problême III. *Mesurer une bande à retours* ABCDEFG. (fig. 239.)

Solution. Je coupe les droites AH, BG, CF, DE, chacune en deux également; & par les points de division, je mene la ligne ORST, laquelle étant multipliée par la largeur AH de la bande, donne la surface de cette bande. Car le trapézoïde ABGH est égal au produit de OR multiplié par AH (386): le trapézoïde BCFG est égal à RS × AH; & le trapézoïde CDEF est égal à ST × AH. Mais ces trapézoïdes composent la bande: donc cette bande est égale à OR × AH + RS × AH + ST × AH, ou ORST × AH.

388. Corollaire. Une couronne ABCDEFGN (*fig.* 240), étant égale au trapézoïde EART, dont les bases paralleles AR, ET, sont égales chacune à chacune aux deux circonférences, & dont la hauteur est la différence AE des deux rayons; il est clair que si du centre O & du point H qui divise AE en deux également, on décrit une circonférence; *la couronne sera égale à cette circonférence multipliée par* AE. Car cette circonférence sera égale à la droite HS qui coupe en deux également les côtés non-paralleles AE, RT du trapézoïde, &c.

389. Problême IV. *Mesurer une figure irréguliere* ABDEC. (fig. 241.)

Solution. De l'un des angles C, je mene des droites aux angles opposés: ce qui divise la figure en triangles. Je mesure chacun de ces triangles; & leur somme me donne la valeur de la figure.

Proposition LXXXVIII.

390. *Les rectangles, les parallélogrammes & les triangles, sont en raison composée de la raison de leurs hauteurs & de celle de leurs bases.* (fig. 242.)

Démonstration. Soient deux rectangles quelconques *ab*, *cd*, dont la hauteur de l'un est *a*, la base *b*; la hauteur de l'autre *c*, & la base *d*. Je compare la hauteur du premier à la hauteur du second, & la base à la base: ce qui me donne les deux raisons *a*, *c*; *b*, *d*. Je fais la raison composée de ces deux rayons, & j'ai *ab*, *cd*. Or, le premier terme *ab* de cette raison, étant le produit de la hauteur du premier rectangle par sa base, est égal à ce rectangle: & par la même raison, le second terme *cd* est égal au second rectangle: donc les deux rectangles sont en raison composée de la raison de leurs hauteurs & de celle de leurs bases.

Les parallélogrammes étant égaux aux rectangles de même baſe & de même hauteur, ſont donc auſſi en raiſon compoſée de la raiſon de leurs hauteurs & de celle de leurs baſes : & il faut dire la même choſe des triangles, à cauſe qu'ils ſont moitiés des rectangles de même hauteur & de même baſe. C. Q. F. D.

391. Problême. *Sur un côté donné* ab, *conſtruire une figure ſemblable à une figure donnée* ABCDE. (fig. 243.)

Solution. De l'un des angles A de la figure donnée, je mene des droites AC, AD aux angles oppoſés : aux extrêmités *a*, *b* de la droite donnée *ab*, je fais les angles *cab*, *cba*, égaux chacun à chacun aux angles CAB, CBA ; & par conſéquent le triangle *cab* eſt ſemblable au triangle CAB. Je fais aux extrêmités *a*, *c*, de la droite *ac*, les angles *dac*, *dca*, égaux chacun à chacun aux angles DAC, DCA ; & le triangle *dac* eſt auſſi ſemblable au triangle DAC. Enfin, je fais aux extrêmités *a*, *d*, de la droite *ad*, les angles *ead*, *eda*, égaux chacun à chacun aux angles EAD, EDA, & le triangle *ead* eſt ſemblable au triangle EAD. Ainſi les figures *abcde*, ABCDE, étant compoſées d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, ſont ſemblables entre elles, (164.)

Proposition LXXXIX.

392. *Les figures ſemblables ſont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ou des lignes ſemblablement poſées.* (fig. 244.)

Démonstration. Soient deux rectangles ſemblables *ab*, *cd* : Enſorte qu'on ait *a*. *b* : : *c*. *d*. Je fais le quarré *aa* de la hauteur *a* du premier, & le quarré *cc* de la hauteur *c* du ſecond. Or, le quarré *aa* ayant même hauteur que le premier rectangle *ab* ; ces deux figures ſont entre elles comme leurs baſes *a*, *b* (373) : donc *aa*. *ab* : : *a*. *b* ; & par la même raiſon, nous avons *cc*. *cd* : : *c*. *d*. Mais les raiſons *a*, *b* ; *c*, *d*, ſont égales ; à cauſe des rectangles ſemblables *ab*, *cd* : donc les raiſons *aa*, *ab*, & *cc*, *cd*, ſont auſſi égales ; & partant nous avons *aa*. *ab* : : *cc*. *cd*, ou *aa*. *cc* : : *ab*. *cd* : ce qui fait voir que les rectangles *ab*, *cd* ſont entre eux comme les quarrés *aa*, *cc* de leurs côtés homologues *a* & *c*.

Or, à cauſe de la ſimilitude des figures *ab*, *cd*, nous avons *a*. *c* : : *b*. *d*, donc *aa*. *cc* : : *bb*. *dd*. Mais les deux rectangles ſont entre eux comme les quarrés *aa*, *cc* de leurs hauteurs : donc ils ſont auſſi comme les quarrés *bb*, *dd* de leurs baſes : & on démontrera de la même façon, qu'ils ſont comme les quarrés des lignes ſemblablement poſées ; à

cauſe que ces lignes ſont entre elles comme les baſes, ou comme les hauteurs (165.)

Les parallélogrammes ſemblables étant égaux aux rectangles de même hauteur & de même baſe, ſont donc auſſi entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, ou des lignes ſemblablement poſées : & il faut dire la même choſes des triangles ſemblables; à cauſe qu'ils ſont moitiés des rectangles de même hauteur & de même baſe.

Quant aux polygones ſemblables réguliers ou irréguliers ; il eſt clair que ces figures étant compoſées d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, tous ces triangles ſeront entre eux comme les quarrés de leurs baſes, &c. Par exemple, dans la figure 243, les triangles ABC, *abc*, ſeront entre eux comme les quarrés de leurs baſes BC, *bc* : de même les triangles ACD, *acd* ſeront entre eux comme les quarrés de leurs baſes CD, *cd*, ou comme les quarrés des baſes BC, *bc* ; à cauſe de BC. *bc* :: CD. *cd*, & ainſi de ſuite : & par conſéquent les figures ſeront auſſi entre elles comme les quarrés de BC, *bc* ; ou de CD, *cd*, &c.

Enfin, les cercles étant des polygones, ſont entre eux comme les quarrés de leurs diametres, &c. C. Q. F. D.

PROPOSITION XC.

393. *Si trois lignes* a, b, c, *ſont en proportion continue ; le quarré de la premiere eſt au quarré de la ſeconde, comme la premiere eſt à la troiſieme.* (fig. 245.)

DÉMONSTRATION. Je fais le rectangle *ab* de la premiere par la ſeconde, & j'y ajoute le quarré *aa* de la premiere. Je fais de même le rectangle *bc* de la ſeconde par la troiſieme, & j'y ajoute le quarré *bb* de la ſeconde. Le quarré *aa* & le rectangle *ab* ayant même hauteur, ſont entre eux comme leurs baſes *a* & *b* : donc *aa*. *ab* :: *a*. *b* ; & par la même raiſon *bb*. *bc* :: *b*, *c*. Mais les raiſons *a*, *b* ; & *b*, *c*, ſont égales, par la ſuppoſition : donc *aa*. *ab* :: *bb*. *bc* ; ou *aa*. *bb* :: *ab*. *bc* ; & les rectangles *ab*, *bc*, ayant une dimenſion commune *b*, ſont entre eux comme leurs dimenſions inégales *a*, *c* : donc *ab*. *bc* :: *a*. *c*, & par conſéquent *aa*. *bb* :: *a*. *c* : ce qui fait voir que le quarré de la premiere ligne *a* eſt au quarré de la ſeconde, comme la premiere eſt à la troiſieme. C. Q. F. D.

394. REMARQUE. J'aurois pu démontrer ces propoſitions de la même façon que je l'ai fait dans l'algebre. Mais j'ai été bien aiſe de faire voir qu'on peut tirer les vérités géométriques des principes les

plus ſimples de cette ſcience, d'une maniere même plus naturelle qu'on ne le feroit par l'algebre.

PROPOSITION XCI.

395. *Si ſur les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC, *on conſtruit trois figures ſemblables ; la figure* AHLC *faite ſur l'hypothénuſe* AC, *eſt égale aux deux autres* ADEB, BFGC, *faites ſur les deux autres côtés* AB, BC. (fig. 247.)

DÉMONSTRATION. Les trois figures étant ſemblables, ſont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues AC, AB, BC. Mais le quarré de AC eſt égal aux quarrés des deux autres côtés AB, BC (171) : donc la figure AHLC eſt égale aux deux autres. C. Q. F. D.

396. COROLLAIRE I. *Si ſur les trois côtés* AC, AB, BC, *du triangle rectangle* ABC, *on décrit des demi-cercles* AEBRC, AHB, BSC ; *le triangle* ABC *eſt égal aux deux portions de cercles* AHBE, BSRC, *qu'on nomme communément* lunules. (fig. 247.)

DÉMONSTRATION. Les demi-cercles étant ſemblables, ſont entre eux comme les quarrés de leurs diametres (392) ; & par conſéquent le demi-cercle AEBRC eſt égal aux deux autres ; & retranchant de part & d'autre les ſegmens communs AEB, BRC ; il reſte le triangle ABC égal aux deux lunules.

397. COROLLAIRE II. *Si le triangle rectangle* ABC *eſt iſoſcele ; chaque lunule eſt égale à la moitié du triangle* ABC : *c'eſt-à-dire qu'en abaiſſant du ſommet* B *la perpendiculaire* BT, *la lunule* AHBE *eſt égale au triangle* ABT, *& la lunule* BSCR *égale au triangle* BTC. (fig. 248.)

DÉMONSTRATION. Les demi-cercles AHB, BSC, ſont égaux ; à cauſe des diametres égaux AB, BC : & les ſegmens AEB, BRC, ſont auſſi égaux ; à cauſe des cordes égales AB, BC : retranchant donc des deux petits demi-cercles les deux ſegmens, les deux lunules reſtantes ſeront égales. Or, ces deux lunules ſont égales au triangle ABC : donc chacune d'elles vaut la moitié de ce triangle.

398. REMARQUE. Ce n'eſt que dans le cas où le triangle rectangle ABC eſt iſoſcele, qu'on peut trouver en particulier la valeur de chaque lunule : & alors l'une ou l'autre de ces lunules, ſe nomme lunule d'*Hypocrate*, fameux Mathématicien, qui vivoit du tems des Grecs, & qui le premier en a trouvé la quadrature. Or, dans cette lunule, il faut obſerver que le quart de cercle BTCR eſt égal au

demi-cercle BSC : car le triangle BTC étant égal à la lunule BSCR; ſi on ajoute de part & d'autre le ſegment BRC, on aura le quart de cercle BTCR égal au demi-cercle BSC. Et de-là *Wiſthon*, célebre Anglois, a trouvé le moyen de diviſer la lunule d'Hypocrate en telles parties qu'on voudra, ainſi qu'on va voir dans le problême ſuivant.

399. PROBLÊME I. *Diviſer la lunule d'Hypocrate* BSCR *en tel nombre de parties que l'on voudra.* (fig. 249.)

SOLUTION. Du centre T du quart de cercle, je mene par le centre O du demi-cercle la droite TS qui diviſe la lunule en deux parties BSR, RSC. Ainſi ſuppoſé qu'on veuille la diviſer en quatre parties égales, je diviſe le diametre BC en quatre parties égales; & des points de diviſion, j'éleve des perpendiculaires MP, ZY : puis des points P, Y, menant les droites PT, YT, qui coupent la circonférence du quart de cercle aux points H, V; je dis que les parties de lunule SRHP, SRVY, en ſont chacune le quart : ce que je démontre ainſi.

Je mene les droites OP, TM : & à cauſe des paralleles PM, ST; les triangles PMO, PMT, qui ont la même baſe PM, & qui ſont entre deux paralleles, ſont égaux (374); & retranchant de part & d'autre la partie commune PXM, il reſte le triangle POX égal au triangle MXT.

Dans le triangle iſoſcele POT, l'angle extérieur POS étant égal aux deux intérieurs oppoſés, eſt par conſéquent double de l'angle OTP. Or, à cauſe que le quart de cercle BTCR eſt égal au demi-cercle BSC; il s'enſuit que le cercle entier du rayon BT eſt double du cercle entier du rayon OB, & que par conſéquent le ſecteur SOP du demi-cercle eſt égal au ſecteur RTH du quart de cercle; à cauſe de l'angle SOP double de l'angle RTH. Retranchant donc de ces deux ſecteurs la partie commune ORL, le reſte SRLP eſt égal au reſte LOTH; & ajoutant PLH de part & d'autre, j'ai SRHP égal au triangle POT, ou aux deux triangles POX. OXT : & enfin mettant au lieu du triangle POX, le triangle XMT, qui lui eſt égal; nous avons SRHP égal au triangle OTM.

Mais le triangle OMT ayant la même hauteur OT que le triangle BTC, n'eſt que le quart de ce triangle; à cauſe que ſa baſe OM eſt le quart de la baſe BC (376): donc la partie SRHP eſt égale au quart du triangle PTC, ou au quart de la lunule BSCR, laquelle eſt égale au triangle BTC.

400. PROBLÊME II. *Trouver un quarré égal à pluſieurs quarrés donnés,*

donnés, ou une figure ſemblable & égale à pluſieurs figures ſemblables. (fig. 250.)

SOLUTION. Suppoſons que les droites AB, BC, ſoient les côtés des deux premiers quarrés donnés. Je leur fais faire un angle droit ABC, & menant la droite AC, j'ai le triangle rectangle ABC, dans lequel le quarré de AC eſt égal aux quarrés des deux autres côtés AB, BC (171). Je prends le côté CD du troiſieme quarré donné; & lui faiſant faire un angle droit ACD avec AC, je mene la droite AD : ce qui me donne un autre triangle rectangle ACD, dans lequel le quarré de AD eſt égal aux quarrés de AC & de DC. Mais le quarré de AC eſt égal aux quarrés de AB, BC : donc le quarré de AD eſt égal aux trois premiers quarrés donnés; & continuant de la même façon, je trouverai le quarré de AE, égal aux quatre premiers quarrés donnés : faiſant donc le quarré de AE, j'aurai ce qu'on demande, & ainſi des autres.

Et ſi l'on demandoit une figure ſemblable & égale à pluſieurs figures ſemblables; je mettrois au lieu des droites AB, BC, CD, DE, les côtés homologues de ces figures : après quoi la figure ſemblable faite ſur AE ſeroit égale aux quatre figures données, &c; à cauſe que les figures ſemblables ſont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

PROPOSITION XCII.

401. *Si l'on mene dans un cercle deux diametres* AC, BD, *qui faſſent entre eux un angle aigu; & que de leurs extrémités* A, B, *on mene des tangentes* AV, BR, *qui ſe terminent aux diametres, & qui ſe coupent en* H; *je dis :*

I°. *Que les triangles* AVO, BRO *faits par les deux diametres, avec chacune des tangentes, ſont égaux.*

II°. *Que les triangles* AHR, BHV, *faits par les tangentes avec chaque diametre, ſont auſſi égaux.* (fig. 251.)

DÉMONSTRATION. I°. A cauſe des tangentes perpendiculaires ſur les diametres aux points A, B, les triangles AVO, BRO ſont rectangles; & à cauſe de l'angle aigu O commun, & du côté AO égal au côté BO, ces deux triangles ſont égaux. (100.)

II°. Retranchant donc des deux triangles égaux AVO, BRO, le trapézoïde commun AHBO; le reſte VHB eſt égal au reſte RHA. Ce qu'il falloit démontrer.

402. COROLLAIRE. *Si des extrémités* A, B, *des diametres, on mene des perpendiculaires* AX, BF *ſur les diametres oppoſés; le trian-*

gle AVX *fait entre les diametres par l'une des perpendiculaires* AX, *& la tangente* AV *menée du même point* A, *eſt égal au trapézoïde* AXBR *fait entre les diametres par la même perpendiculaire* AX, *& l'autre tangente* BR.

DÉMONSTRATION. Par la propoſition précédente, le triangle VHB eſt égal au triangle AHR : ajoutant donc à chacun de ces triangles le trapézoïde commun AHBX, on aura AVX = BRAX.

PROPOSITION XCIII.

403. *Poſant que les deux diametres* AC, BD *ſoient donnés avec leurs tangentes* AV, BR; *ſi d'un point quelconque* S *pris ſur la circonférence, on mene entre les diametres deux droites* LZ, MT *paralleles aux tangentes* AV, BR; (fig. 252):

I°. *Le triangle* LST *fait par ces deux paralleles avec l'un des diametres* DB *prolongé en* V, *eſt égal au trapézoïde* BRMT *fait par la tangente* BR *de ce diametre* DBV, *& ſa parallele* MT.

II°. *Le triangle* MSZ *fait par les mêmes paralleles avec l'autre diametre* CAR, *eſt égal au trapézoïde* AVLZ *fait par la tangente* AV *de ce diametre & ſa parallele.*

DÉMONSTRATION. I°. Du point A, je mene AX perpendiculaire ſur DB, & j'ai AVX = BRAX (402.) Or, à cauſe de la perpendiculaire AX parallele à la tangente RB, & à ſa parallele MT, & de LZ parallele à AV; les triangles VAX, LST, ſont ſemblables & ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues (392): donc VAX . LST :: $\overline{AX}$. $\overline{ST}$.

Mais par la propriété du cercle, nous avons $\overline{AX} = \overline{BO} - \overline{XO}$ (284), & $\overline{ST} = \overline{BO} - \overline{TO}$: donc VAX . LST :: $\overline{BO} - \overline{XO}$. $\overline{BO} - \overline{TO}$. Or, les triangles BRO, TMO, XAO, étant ſemblables, ſont entre eux comme les quarrés $\overline{BO}$, $\overline{TO}$, $\overline{XO}$ de leurs côtés homologues BO, TO, XO (393); mettant donc les triangles au lieu des quarrés, nous aurons VAX . LST :: BRO — XAO . BRO — TMO ou VAX . LST :: BRAX . BRMT. Mais l'antécédent VAX eſt égal à l'antécédent BRAX : donc le conſéquent LST eſt égal au conſéquent BRMT; & on prouvera la même choſe toutes les fois que la parallele ST coupera le diametre BD entre le centre O & le point B.

Mais ſi le point Q d'où l'on mene les droites QL, QE, paralleles aux tangentes AV, BR eſt tellement poſé que la parallele QE coupe le diametre BD en deſſous de O; je mene à l'extrêmité D la tan-

gente DF, qui coupe RC prolongé en F: & comme le triangle LQP, fait par les deux paralleles avec le diametre BD, eſt encore ſemblable au triangle VAX; j'ai de même VAX . LQP :: $\overline{AX}$. $\overline{QP}$ :: $\overline{BO} - \overline{XO}$. $\overline{OD} - \overline{OP}$: & au lieu des quarrés mettant les triangles BRO, AXO, ODF, OPE, qui ſont entre eux comme ces quarrés; nous aurons VAX . LQP :: BRO — AXO . ODF — OPE; c'eſt-à-dire VAX . LQP :: BRAX . DFEP. Mais VAX = BRAX: donc LQP = DFEP. Ainſi le triangle LQP, fait avec le diametre BD par les paralleles QL, QE, menées du point Q, eſt toujours égal au trapézoïde DFEP fait par ces mêmes paralleles avec la tangente DF: & ce ſeroit encore la même choſe, ſi le point d'où l'on mene les paralleles aux tangentes, étoit pris ſur la demi-circonférence BCD.

II°. Maintenant pour démontrer que le triangle MSZ, fait avec l'autre diametre AC par les paralleles LZ, MT, eſt égal au trapézoïde AVLZ fait par la tangente AV de ce diametre & ſa parallele LZ; je n'aurois qu'à mener du ſommet B de l'autre diametre une perpendiculaire B3 ſur AC, & achever le reſte, comme ci-deſſus. Mais comme cette démonſtration ne réuſſiroit pas par rapport aux ſections coniques que ceci concerne; voici une autre démonſtration qui ſera commune aux ſections coniques, & au cercle.

Nous avons VAX = BRAX (402); & retranchant de VAX le triangle LST, & de BRAX, le trapézoïde BRMT égal au triangle LST, comme on vient de voir; nous aurons AVLSTX = MTXA: & retranchant la partie commune STX2, nous aurons AVL2 = MS2A; & ajoutant de part & d'autre le triangle A2Z, nous aurons enfin AVLZ = MSZ. (*fig.* 252.)

D'abord. Si le point Q d'où les paralleles QL, QE, aux tangentes, ſont menées, eſt tellement poſé que la parallele ſoit en-deſſous du centre O; je mene du point D une tangente KDF qui coupe AC prolongé en F, & la tangente AV prolongée en K: les triangles rectangles BRO, DOF, ſont ſemblables & égaux; à cauſe de BO = OD, & des angles ſur BO égaux chacun à chacun aux angles ſur DO. Or, le triangle BRO eſt égal au triangle AVO (401): donc AVO = FOD; & ajoutant de part & d'autre le trapeze AKDO, nous avons VKD = AKF; & retranchant de VKD le triangle LQP, & de AKF le trapézoïde PEFD égal au triangle LQP, comme on a vu ci-deſſus; il reſte VLQPDK = AEPDK: enfin retranchant de part & d'autre la partie commune AKDPQZ, nous aurons VAZL = ZQE; c'eſt-à-dire le triangle ZQE fait par les paralleles menées

du point Q, avec le diametre AC égal au trapézoïde AVLZ fait par la tangente AV de ce diametre & ſa parallele.

Enſuite, ſi le point Q, d'où l'on mene des paralleles aux tangentes, étoit ſur la demi-circonférence BCT (*fig.* 253), de façon que la parallele QT coupât le diametre BD en deſſus de O; la ſimilitude des triangles QTL, VAX, feroit conclure comme auparavant que le triangle TLQ, fait avec le diametre BD, eſt égal au trapézoïde BRMT: puis menant du point C la tangente CK qui coupe BD en *t*, & RB en K, on trouveroit aiſément, comme on vient de voir, que le triangle QME fait avec l'autre diametre eſt égal au trapézoïde EL*t* C fait par la tangente C*t* de ce diametre, & ſa parallele.

Enfin, la figure 254 fait voir que ſi le point Q étoit ſur la demi-circonférence BCD, & que la parallele QT coupât BD en deſſous de O; il faudroit faire de ce côté ce qu'on a fait de l'autre dans la figure 252. C. Q. F. D.

Remarque. Cette propoſition & la précédente, ſont eſſentielles pour les ſections coniques, & j'avertis d'avance que pourvu qu'on ſache bien ceci, & ce que nous avons dit touchant le cercle; on ſera ſurpris quand on viendra aux ſections coniques, de voir que l'étude de ces courbes ne ſera plus qu'une application naturelle des principes les plus ſimples.

Du changement des figures & de leur réduction de grand en petit & de petit en grand.

404. Problême I. *Une figure quelconque* ABCDEF *étant donnée; faire un triangle qui lui ſoit égal.* (fig. 282.)

Solution. I°. Je retranche de la figure un triangle ABC par la diagonale AC. Du ſommet B, je mene la droite BP parallele à AC, juſqu'à ce qu'elle coupe en P, l'un des côtés AF prolongé: ce qui me donne un quadrilatere PBCA, dans lequel menant l'autre diagonale PC, j'ai deux triangles égaux BAC, CPA; à cauſe qu'ils ont la même baſe CA, & qu'ils ſont entre les deux paralleles CA, BP. Retranchant donc de la figure donnée, le triangle BAC, & ſubſtituant en ſa place le triangle PAC; j'ai la figure PCDF, égale à la figure donnée, & qui a un angle de moins.

II°. Je coupe le triangle DEF par la diagonale DF. Du ſommet E de ce triangle, je mene EH parallele à DF, juſqu'à ce qu'elle rencontre le côté AF prolongé en H: ce qui me donne le quadrilatere FDEH, dans lequel menant l'autre diagonale DH, j'ai deux triangles égaux FED, FHD; à cauſe qu'ils ont la baſe commune FD,

& qu'ils ſont entre deux paralleles. Retranchant donc de la figure PCDF, le triangle FDE ; & mettant en ſa place le triangle FDH ; j'ai la figure PCDH, égale à la figure donnée, & qui a deux angles de moins.

III°. Je retranche de cette figure le triangle CDH, par la diagonale CH ; & du ſommet D de ce triangle, je mene DR parallele à CH juſqu'à ce qu'elle rencontre AF prolongée en R : & menant la droite CR, les triangles CDH, CHR, qui ont la même baſe CH, & qui ſont entre deux paralleles, ſont égaux ; ainſi mettant CHR au lieu de CDH ; j'ai le triangle PCR, égal à la figure donnée.

405. PROBLÊME II. *Faire un rectangle égal à un triangle donné* ABC. (fig. 255.)

SOLUTION. Du ſommet B, j'abaiſſe la perpendiculaire BS ſur la baſe AC : je coupe BS en deux également en R ; & avec la baſe AC & la hauteur SR, je fais le rectangle AEDC, lequel eſt égal au triangle donné ABC. Car le triangle ABC eſt égal à ſa baſe AC multipliée par la moitié de ſa hauteur BS, c'eſt-à-dire par SR (375) ; & le rectangle AEDC eſt égal au même produit.

Ou bien je coupe la baſe AC du triangle en deux également en R (*fig.* 256) ; & avec la moitié AR & la hauteur BS du triangle, je fais un rectangle AEDR, lequel eſt égal au triangle donné. Car le rectangle AEFC, de même hauteur & de même baſe que le triangle, eſt double du triangle : or, les rectangles AEDR, AEFC, ayant même hauteur AE, ſont entre eux comme leurs baſes AR, AC (373) : donc AEDR étant la moitié de AEFC, eſt par conſéquent égal au triangle.

406. PROBLÊME III. *Un triangle* ABC *étant donné ; faire un parallélogramme qui lui ſoit égal, & qui ait un angle donné.* (fig. 257.)

SOLUTION. Du ſommet B, je mene EF parallele à la baſe AC : je fais en A un angle CAE, égal à l'angle donné, & achevant le parallélogramme AEFC, je coupe AC en deux également en P ; d'où je mene PB parallele à AE : ce qui donne le triangle ABC, égal au parallélogramme AEBP. Car les parallélogrammes AEBP, AEFC, ayant la même hauteur, ſont entre eux comme leurs baſes AP, AC : c'eſt-à-dire le parallélogramme AEBP eſt la moitié du parallélogramme AEFC. Or, le triangle ABC eſt auſſi la moitié du parallélogramme AEFC : donc, &c.

Ou bien je coupe le côté AE en deux également en H ; d'où je mene HR parallele à AC : ce qui me donne le parallélogramme AHRC égal au triangle ; à cauſe que l'un & l'autre ſont la moitié du parallélogramme AEFC.

407. PROBLÊME IV. *Une figure quelconque étant donnée, faire un rectangle ou un parallélogramme qui lui ſoit égal.*

Je change la figure en un triangle qui lui ſoit égal (404); & de ce triangle je fais le rectangle ou le parallélogramme requis. (405, 406.)

408. PROBLÊME V. *Faire un quarré égal à un parallélogramme, ou à un triangle, ou à une figure quelconque donnée.* (fig. 258.)

SOLUTION. I°. Pour faire un quarré égal au parallélogramme ABCD; je prends une moyenne proportionnelle AE, entre la hauteur AB & la baſe AD; & le quarré AF fait ſur cette proportionnelle, eſt égal au rectangle. Car puiſque nous avons AB. AE :: AE. AD; nous avons auſſi $\overline{AE} = AB \times AD$: or $AB \times AD$ eſt le parallélogramme: donc le quarré AF eſt égal à ce parallélogramme.

II°. Si la figure donnée eſt un triangle, je prends une moyenne proportionnelle entre la moitié de ſa hauteur & ſa baſe; & le quarré de cette moyenne proportionnelle étant égal au produit des extrêmes, eſt par conſéquent égal au triangle donné. (*fig.* 259.)

Enfin ſi la figure eſt un polygone régulier, je la réduis en triangles, & j'acheve le reſte comme il vient d'être dit. (*fig* 262.)

409. PROBLÊME VI. *Changer un triangle en un autre qui ait une hauteur donnée, ou une baſe donnée.* (fig. 259.)

SOLUTION. I°. Soit le triangle ABC qu'on demande de changer en un autre qui ait la hauteur EH. Je cherche une quatrieme proportionnelle à la hauteur donnée EH, à la hauteur BD du triangle ABC, & à ſa baſe AC. A l'extrêmité H de la hauteur EH, j'éleve la perpendiculaire RP, que je fais égale à la quatrieme proportionnelle trouvée: & menant les lignes RE, PE; le triangle REP, dont la hauteur eſt EH, eſt égal au triangle donné ABC. Car par la conſtruction, les hauteurs EH, BD, de ces deux triangles, ſont réciproques aux baſes AC, RP: donc les deux triangles ſont égaux. (376.)

II°. Si on demande que le triangle ABC ſoit changé en un autre qui ait la baſe RP; je cherche une quatrieme proportionnelle à cette baſe RP, à la baſe AC, & à la hauteur BD: & élevant ſur RP, une perpendiculaire HE que je fais égale à la quatrieme proportionnelle trouvée; je mene les droites RE, EP, qui me donnent le triangle REP égal au triangle ABC; à cauſe des baſes RP, AC, réciproques aux hauteurs BD, EH; par la conſtruction.

410. COROLLAIRE I. *On changera de la même façon un rectangle ou un parallélogramme en un autre, qui ait une hauteur ou une base donnée :* en cherchant une quatrieme proportionnelle, comme dans le problême précédent.

411. COROLLAIRE II. De même, *si on vouloit changer un polygone quelconque régulier ou irrégulier en un triangle qui eût une hauteur ou une base donnée ;* on changeroit d'abord cette figure en triangle (404); & on changeroit enſuite ce triangle en un autre qui eût la hauteur ou la baſe donnée : & ſi on vouloit changer le polygone en un rectangle ou parallélogramme qui eût une hauteur ou une baſe donnée, on le changeroit d'abord en rectangle ou en parallélogramme (407) : après quoi on changeroit ce rectangle ou ce parallélogramme en un autre, qui eût la hauteur ou la baſe donnée. (410.)

412. PROBLÊME VII. *Faire une figure égale à pluſieurs figures données.* (fig. 260.)

SOLUTION. Je réduis les figures données en triangles (404), que je ſuppoſe être les triangles ABC, EFD, HIL. Je réduis ces trois triangles à une même hauteur IM (409); ou ce qui revient au même, je cherche la baſe LP qu'il faut donner au triangle ABC, afin qu'il puiſſe avoir la hauteur IM. Je mets cette baſe en ligne droite avec la baſe HL, & menant la droite PI, le triangle PLI eſt égal au triangle ABC (376); & par conſéquent le triangle HIP eſt égal aux deux HIL, ABC.

Je cherche de même la baſe PQ, qu'il faut donner au triangle EFD, afin qu'il puiſſe avoir la hauteur IM; & mettant cette baſe en ligne droite avec HP, & menant la droite QI; le triangle PQI eſt égal au triangle EFD; donc le triangle entier HIQ eſt égal aux trois triangles, & par conſéquent aux trois figures données.

413. PROBLÊME VIII. *Deux figures* X, Q, *étant données ; trouver une troiſieme figure qui ſoit ſemblable à la premiere* X, *& égale à la ſeconde* Q. (fig. 261.)

SOLUTION. Je change la figure X en un triangle, que je change enſuite en un autre AMB, qui ait pour baſe le côté AB. Je change de même la figure Q en un triangle BMP, qui ait la même hauteur que le triangle AMB : ainſi le triangle AMP eſt égal aux deux figures données. Je décris ſur AP un demi-cercle APR; & au point B j'éleve la perpendiculaire BR, ſur laquelle je conſtruis la figure Y ſemblable à la figure X : & je dis que la figure Y eſt égale à la figure Q.

Car les triangles AMB, BMP, ayant la même hauteur, ſont entre eux comme leurs baſes AB, BP : mais AMB = X, & BMP = Q: donc X. Q :: AB. BP. Or, les figures ſemblables X, Y, ſont entre elles comme les quarrés $\overline{AB}$, $\overline{BR}$, de leurs côtés homologues AR, BR (392); & à cauſe que dans le demi-cercle APR, la ligne BR eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens AB, BP; nous avons AB. BR :: BR. RP. Donc nous avons auſſi $\overline{AB}$. $\overline{BR}$ :: AB. BR; & par conſéquent X. Y :: AB. BP. Mais nous venons de trouver X. Q :: AB. BP : donc X. Y :: X. Q : ce qui donne Y = Q.

414. COROLLAIRE. On peut donc par ce moyen, *changer pluſieurs figures qui ne ſont pas ſemblables entre elles*, en un même nombre de figures toutes ſemblables à l'une des figures données.

415. PROBLÊME IX. *Le côté d'un polygone régulier étant donné; trouver le polygone.* (fig. 262.)

SOLUTION. Soit la droite AB, ſur laquelle on demande de décrire un pentagone régulier. Je décris un cercle avec un rayon quelconque OM, & dans ce cercle j'inſcris un pentagone régulier que je diviſe en ſes cinq triangles égaux. Enſuite ſur la droite AB, je conſtruis un triangle ARB ſemblable au triangle MON, en faiſant les angles A, B, égaux chacun à chacun aux angles M, N. Enfin du ſommet R pris pour centre, & avec le rayon RA, je décris un cercle dans lequel portant cinq fois la corde AB, j'ai le pentagone demandé. Car l'angle ARB, égal à l'angle MON, vaut la cinquieme partie de la circonférence ABVTX; de même que l'angle MON, vaut la cinquieme partie de la circonférence MNPQT.

416. PROBLÊME X. *Changer une figure quelconque, en polygone régulier.* (fig. 263.)

SOLUTION. Je change la figure donnée en un triangle que je ſuppoſe être le triangle ABC. Je diviſe ſa baſe AC en cinq parties égales; & des points de diviſion je mene au ſommet les droites DB, EB, &c, qui diviſent le triangle en cinq triangles égaux : à cauſe qu'ils ont tous la même hauteur & les baſes égales. Je décris avec un rayon quelconque OR un cercle, dans lequel j'inſcris un pentagone que je diviſe en ſes cinq triangles. Je fais un triangle TSV, ſemblable à l'un des triangles ROT du pentagone, & égal au triangle ABD, cinquieme partie du triangle ABC (413); & du ſommet V décrivant un cercle avec le rayon VT, je porte ST cinq fois autour de la circonférence : ce qui me donne un pentagone égal au triangle ABC

ABC, & par conſéquent à la figure donnée. Car les cinq triang es de ce pentagone ſont égaux aux cinq triangles qui compoſent le triangle ABC; & l'angle TVS embraſſe la cinquieme partie de la circonférence de ſon cercle, de même que l'angle ROT ſon égal embraſſe la cinquieme partie de la circonférence du ſien.

PROPOSITION XCIV.

417. *Un quadrilatere quelconque* ABCD *étant donné avec ſes diagonales* AC, BD: *ſi l'on diviſe l'un des côtés* AB *en deux également en* E, *& que de ce point de diviſion on mene la droite* EF *parallele à l'une des diagonales* AC; *enſuite du point* F *la droite* FG *parallele à l'autre diagonale* BD; *puis du point* G *la droite* HG *parallele à la diagonale* AC; *& enfin du point* H *la droite* HE *parallele à la diagonale* BD: *je dis que cette derniere parallele coupera le côté* AB *au point* E *qui le diviſe en deux également; & que la figure* EFGH *ſera un parallélogramme qui ſera la moitié du quadrilatere donné.* (fig. 264.)

DÉMONSTRATION. I°. Dans le triangle ABC, les baſes AC, EF, étant paralleles, coupent les côtés AB, BC, proportionnellement: Or, AB eſt coupé en deux également en E: donc BC eſt auſſi coupé en deux également en F. Par la même raiſon, dans le triangle BCD, dont les baſes BD, FG, ſont paralleles, le côté CD eſt coupé en deux également en G; & dans le triangle CDA, dont les deux baſes AC, GH ſont paralleles, le côté AD eſt coupé en deux également en H: ainſi dans le triangle ABD, la ligne HE menée du point H parallelement à la baſe, doit couper le côté AB au point E qui le diviſe en deux également.

II°. Les droites EF, HG étant paralleles à la même droite AC, ſont paralleles entre elles; par la même raiſon, les droites EH, FG paralleles à la même droite BD, ſon paralleles entre elles: donc la figure EFGH eſt un parallélogramme.

III°. Les triangles ſemblables ABC, EBF étant entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues AB, EB (392), qui ſont comme 2 à 1; il s'enſuit que ces deux triangles ſont entre eux comme 4 à 1: c'eſt-à-dire, le triangle EBF eſt le quart du triangle ABC; & par la même raiſon HGD eſt le quart du triangle ACD: ainſi les deux enſemble EBF, HGD ſont le quart du quadrilatere ABCD. On prouvera de même que le triangle EAH étant le quart du triangle BAD; & le triangle FCG, le quart du triangle BCD; les deux enſemble EAH, FCG ſont auſſi le quart du quadrilatere ABCD: retranchant donc du quadrilatere les quatre triangles EBF, HDG,

EAH, FCG, qui valent les deux quarts ou la moitié du quadrilatere ; le reſte, c'eſt-à-dire le parallélogramme EFGH ſera la moitié de ce quadrilatere. C. Q. F. D.

418. COROLLAIRE. *Si le quadrilatere a un de ſes angles rentrans ; on démontrera toujours que le parallélogramme* EFGH *en eſt la moitié.* (fig. 265.)

DÉMONSTRATION. Je prolonge les paralleles EH, FG, & la diagonale BD, juſqu'à ce qu'elles coupent l'autre diagonale AC aux points M, N, R : & je prouverai, comme ci-deſſus, que le triangle EBF, eſt le quart du triangle ABC ; que le triangle AEM eſt le quart du triangle ABR ; & le triangle CFN, le quart du triangle BRC. D'où il ſuit que les trois triangles EBF, AEM, CFN, ſont enſemble les deux quarts ou la moitié du triangle ABC ; & que par conſéquent le parallélogramme reſtant EFNM, eſt la moitié de ce triangle ou la moitié du quadrilatere ABCD, plus la moitié du triangle ADC, c'eſt-à-dire EFNM $= \frac{1}{2}$ ABCD $+ \frac{1}{2}$ ADC.

Or, dans le triangle ADC, les trois triangles HDG, AHM, CGN étant égaux à la moitié de ce triangle, le reſte HGNM vaut l'autre moitié, & nous avons HGNM $= \frac{1}{2}$ ADC. Mais nous avons trouvé EFNM $= \frac{1}{2}$ ABCD $+ \frac{1}{2}$ ADC : retranchant donc du premier membre le parallélogramme HGNM ; & de l'autre, $\frac{1}{2}$ ADC qui lui eſt égal, nous aurons EFGH $= \frac{1}{2}$ ABCD.

PROPOSITION XCV.

419. *Une figure quelconque* ABC *étant donnée ; ſi d'un point pris en-dehors ou en-dedans de la figure, on mene les droites* OA, OC, OB, *à tous les angles ; & qu'ayant diviſé l'une de ces droites* OA *en raiſon quelconque en* E, *on mene du point* E *la droite* EF *parallele à la baſe* AC *du triangle* AOC ; *puis du point* F, *la droite* FH *parallele à la baſe* BC *du triangle ſuivant* COB, *& ainſi de ſuite : la derniere parallele* HE *paſſera par le point* E, *& la figure* EFH *formée par ces paralleles, ſera ſemblable à la figure* ABC. (fig. 266.)

DÉMONSTRATION. I°. Dans le triangle AOC, la parallele EF coupe le côté OC en même raiſon que le côté OA : de même dans le triangle COB, la parallele FH coupe le côté OB en même raiſon que le côté OC : donc OB eſt coupé en H, en même raiſon que AO eſt coupé en E ; & par conſéquent la parallele menée du point H, doit paſſer par E.

II°. Le triangle OEF eſt ſemblable au triangle OAC ; à cauſe de l'angle commun O ; & des baſes EF, AC paralleles : par la même

raiſon, le triangle OFH eſt ſemblable au triangle OCB; & le triangle OHE, au triangle OBA : donc les deux figures ACB, EFH, étant compoſées d'un égal nombre de triangles ſemblables, ſont auſſi ſemblables entre elles. C. Q. F. D.

420. COROLLAIRE. *Si le point* O *étoit pris ſur le circuit de la figure* 267; on démontreroit de la même façon que EF, FH, &c; formeroient une figure EFHRS ſemblable à la figure APBDC.

421. PROBLÊME I. *Une figure* ABCD *étant donnée, en décrire une autre ſemblable, & qui ſoit avec elle en telle raiſon que l'on voudra.* (fig. 268.)

SOLUTION. I°. Je prends un point O, ou dans la figure, ou en-dehors, ou ſur le circuit, ou enfin à l'un des angles. De ce point, je mene des droites à tous les angles; & ſuppoſant qu'on veuille que la figure demandée ne ſoit que la moitié de la figure donnée; je diviſe l'une des droites OA en deux également en R. Je cherche une moyenne proportionnelle OE, entre OR & OA; & du point E, je mene EH parallele à AB; puis HS parallele à CB, & ainſi de ſuite : ce qui me donne la figure EHSV ſemblable, & moitié de la figure donnée.

Car ces figures ſont entre elles comme les quarrés des lignes OE, OA, ſemblablement poſées (392) : mais par la conſtruction, nous avons OA. OE :: OE. OR : donc $\overline{OA}$. $\overline{OE}$ :: OA. OR (393). Mais OA eſt double de OR : donc $\overline{OA}$ eſt double de $\overline{OE}$; & par conſéquent la figure donnée eſt double de la figure EHSV.

II°. Si l'on veut que la figure EHSV (*fig.* 269) ſoit double de la figure donnée; je prolonge OA en R, enſorte que AR ſoit égal à OA : je prends une moyenne proportionnelle OE, entre OA, OR. Du point E, je mene EH parallele à AB, &c; & la figure EHSV eſt double de la donnée. Car à cauſe de OA. OE :: OE. OR; nous avons $\overline{OA}$. $\overline{OE}$ :: OA. OR :: 1. 2 (393); & par conſéquent la figure donnée n'eſt que la moitié de la figure EHSV.

III°. Si l'on veut que la figure EHSV ſoit à la figure donnée comme une ligne MN eſt à une ligne MP : je cherche une quatrieme proportionnelle OR aux trois lignes MP, MN, OA : enſuite une moyenne proportionnelle OE, entre OA & OR; & j'acheve le reſte, comme ci-deſſus : ce qui ſe démontre de la même façon.

422. REMARQUE. On peut abréger beaucoup l'opération, en mettant le point O ſur les angles de la figure (*fig.* 270). Car alors la fi-

gure ſe trouve diviſée en deux triangles de moins, & par conſequent il y a moins de paralleles à mener : l'une & l'autre méthode ont leur utilité, & c'eſt par leur moyen qu'on réduit toutes les figures de grand en petit, & de petit en grand.

423. PROBLÊME II. *Deux quarrés étant donnés, en trouver tant d'autres que l'on voudra, leſquels pris deux à deux, ſoient égaux aux deux quarrés donnés.* (fig. 271.)

SOLUTION. Suppoſons que les droites AB, BC, ſoient les côtés des deux quarrés donnés. Je leur fais faire un angle droit ABC : puis menant l'hypothénuſe AC, je décris le demi-cercle ABDC qui paſſe par le point B ; puiſque l'angle ABC eſt droit. D'un point quelconque D de la circonférence, je mene deux droites DA, DC, aux extrêmités du diametre ; & par conſéquent l'angle ADC étant auſſi droit, les quarrés des droites AD, DC, pris enſemble ſont égaux au quarré de leur hypothénuſe AC. Mais les quarrés des droites AB, BC, pris enſemble ſont auſſi égaux au quarré de la même hypothénuſe : donc $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Et comme il y a une infinité de points dans le quart de circonférence ABD, il eſt viſible qu'en menant de chacun de ces points deux lignes aux extrêmités A, C du diametre ; on auroit une infinité de quarrés, qui, pris deux à deux, ſeroient égaux aux deux quarrés donnés.

Quant à tous les points de l'autre quart de cercle DC, il eſt clair que toutes les lignes que l'on meneroit de ces points aux extrémités A, C, ſeroient les mêmes deux à deux que celles qui auroient été menées du quart de cercle ABD, & que par conſéquent leurs quarrés ſeroient les mêmes.

424. COROLLAIRE. *Quoiqu'on puiſſe trouver une infinité de quarrés, qui, pris deux à deux, ſoient égaux ; on ne trouvera cependant jamais que leurs racines priſes deux à deux ſoient égales : mais les deux plus grandes ſeront les deux égales* AD, DC ; *& les autres* AB, BC, *ſeront d'autant moindres que les deux égales* AD, DC, *qu'elles ſeront plus inégales entre elles.* (fig. 271.)

DÉMONSTRATION. Si l'on veut que les deux inégales AB, BC, priſes enſemble, ſoient égales à la ſomme des deux égales AD, DC ; je décris du point C, & avec le rayon CD, l'arc DE : ce qui donne CE = DC ; & par conſéquent BE eſt l'excès du côté BC, ſur le côté DC. De même du point A, & avec le rayon AB, je décris l'arc BR : ce qui donne AB = AR ; & par conſéquent DR eſt l'excès de AD ou DC ſon égale ſur AB. Ainſi, afin que les deux AB,

BC ſoient égales aux deux DC, DA ; il faut que l'excès BE, dont BC ſurpaſſe DC, ſoit égal à l'excès DR dont DA ſurpaſſe BA. Cela poſé,

Nous avons $BC = DC + BE$, & $AB = AD - DR = DC - BE$; à cauſe de $AD = DC$, & de $DR = BE$, par la ſupoſition : donc $\overline{BC} = \overline{DC} + 2BE \times DC + \overline{BE}$, & $\overline{AB} = \overline{DC} - 2BE \times DC + \overline{BE}$; & ajoutant enſemble ces deux équations, nous aurons $\overline{BC} + \overline{AB} = 2\overline{DC} + 2\overline{BE}$. Mais les quarrés de AD, DC, ſont $\overline{AD} + \overline{DC} = 2\overline{DC}$: donc ſi la ſuppoſition étoit vraie, les deux quarrés de AB, BC, pris enſemble, ſurpaſſeroient la ſomme des quarrés de AD, DC de deux fois le quarré de BE. Mais il eſt démontré que les quarrés de AB, BC, ne ſurpaſſent pas les quarrés de AD, DC : donc en ſuppoſant les racines AB, BC, égales enſemble aux racines AD, DC, on les ſuppoſe trop grandes.

On démontrera de la même façon, que les deux côtés ou racines AH, HC, ſont enſemble moindres que les deux AB, BC, qui ſont moins inégales entre elles.

425. Problême III. *Trouver une moyenne proportionnelle à deux figures données.*

Solution I°. Si les deux figures données ne ſont pas ſemblables, je les réduis en triangles de même hauteur ; afin qu'elles ſoient entre elles comme les baſes de ces triangles : puis prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux baſes, je fais ſur cette moyenne proportionnelle un triangle de même hauteur que les deux autres ; & ce triangle eſt moyen proportionnel entre les deux autres, & par conſéquent entre les deux figures. Ce qui eſt évident : puiſque les triangles de même hauteur ſont entre eux comme leurs baſes ; & que par la conſtruction, les baſes ſont en proportion continue.

II°. Mais ſi les deux figures ſont ſemblables, je prends une moyenne proportionnelle entre deux de leurs côtés homologues ; & ſur cette moyenne proportionnelle, je décris une figure ſemblable, laquelle eſt auſſi moyenne proportionnelle entre les deux autres : car les trois côtés homologues étant en proportion continue, leurs quarrés le ſeront auſſi. Or, ces figures ſont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Donc, &c.

426. Problême IV. *Exprimer en lignes la raiſon de pluſieurs figures données.*

Solution. Je réduis les figures données en triangles de même

hauteur ; & les baſes de ces triangles expriment la raiſon des figures entre elles.

DE LA GÉODÉSIE OU DIVISION DES FIGURES SUR LE TERREIN.

427. PROBLÊME I. *Diviſer un triangle en tel nombre de parties égales ou inégales en raiſon donnée que l'on voudra, par des lignes menées de la baſe au ſommet.* (fig. 272.)

SOLUTION. Pour diviſer le triangle ABC en trois parties égales ; je diviſe la baſe en trois parties égales aux points E, H : & de ces points menant au ſommet les droites EB, HB, le triangle ſe trouve diviſé en trois triangles égaux ; à cauſe qu'ils ont la même hauteur & les baſes égales (376.)

Et pour diviſer le même triangle en trois parties qui ſoient entre elles comme les trois parties RS, SM, MN, de la droite RN ; je diviſe la baſe en même raiſon que la droite RN, & ſuppoſant que les points de diviſion ſoient les points E, H; je mene des droites au ſommet B, qui diviſent le triangle en trois triangles qui ſont entre eux comme leurs baſes, & par conſéquent comme leurs droites RS, SM, MN.

428. PROBLÊME II. *Diviſer un triangle* ABC *en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra, par des lignes menées d'un point* O *pris ſur le circuit du triangle.* (fig. 273.)

SOLUTION. Si l'on demande trois parties égales ; je diviſe le côté BC en trois également aux points D, E; & le triangle ABC ſe trouve diviſé en trois triangles égaux BAD, DAE, EAC. Je mene la droite OA ; & des points D, E, les droites DR, ES, paralleles à OA : enfin, du point O, je mene les droites OR, OS, qui diviſent le triangle ABC en trois parties égales.

Car les triangles RDA, RDO, qui ont la baſe commune RD, & qui ſont entre les paralleles RD, AO, ſont égaux (374) : ajoutant donc à chacun d'eux la partie commune RBD, nous aurons le triangle DAB égal au triangle ORB. Mais DAB eſt le tiers du triangle ABC : donc ORB en eſt auſſi le tiers.

De même les triangles ESA, ESO, qui ont la baſe commune ES, & qui ſont entre les paralleles AO, SE, ſont égaux : donc ajoutant la partie commune SEC, les triangles ACE, OSC ſont égaux. Mais AEC eſt le tiers du triangle ABC : donc OSC en eſt auſſi le tiers ; & par conſéquent le quadrilatere ROSA eſt le tiers reſtant.

Et ſi l'on demande que les trois parties ſoient entre elles comme

les parties HP, PQ, QT, de la droite HT; je diviſe la droite BC en même raiſon que la droite HT; & j'acheve le reſte comme ci-deſſus.

429. Problême III. *Diviſer un triangle* ABC *en autant de parties qu'on voudra, égales ou inégales, par des lignes paralleles à la baſe* AC. (fig. 274.)

Solution. Si on demande qu'il ſoit diviſé en trois parties égales, je diviſe le côté AB en trois également aux points E, R: je prends une moyenne proportionnelle BH, entre la droite BA & ſon tiers BE; & je mene HM parallele à la baſe. Je prends de même une moyenne proportionnelle BN, entre la droite BA & ſes deux tiers BR; & menant la droite NP parallele à la baſe, le triangle ABC ſe trouve diviſé en trois parties égales par les paralleles HM, NP.

Car les triangles ſemblables BHM, BAC, ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues BH, BA (392). Or, par la conſtruction, nous avons BE . BH :: BH . BA : donc $\overline{BE}$. $\overline{BH}$ :: BE . BA :: 1 . 3 (393); & par conſéquent le triangle BHM eſt le tiers du triangle BAC. On prouvera de même que le triangle BNP eſt les deux tiers du triangle BAC; d'où il ſuit qu'en retranchant de ce triangle, le triangle BHM; le reſte HMNP ſera auſſi le tiers du triangle, & par conſéquent le trapézoïde NPCA ſera le tiers reſtant.

Si on demande que le triangle ſoit diviſé en trois parties, qui ſoient entre elles comme les trois parties SQ, QT, TV, de la droite LV; je diviſe le côté BA en même raiſon que la droite SV, & j'acheve le reſte, comme ci-deſſus.

430. Problême IV. *Diviſer un triangle* ABC *en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra, par des lignes qui partent d'un même point dans l'aire qui n'eſt pas donné.* (fig. 275.)

Solution. I°. Si l'on veut que le triangle ſoit diviſé en quatre parties égales; je prends AR égal à la quatrieme partie de la baſe: du point R, je mene la droite RV parallele au côté AB; je diviſe RV en deux également en O; & menant les droites OA, OB, le triangle OAB eſt le quart du triangle ABC. Car menant la droite RB, les triangles ABO, ABR, qui ont la baſe commune AB, & qui ſont entre les paralleles AB, RV, ſont égaux. Mais ABR eſt le quart du triangle ABC; à cauſe que ces deux triangles ont la même hauteur; & que la baſe AR eſt le quart de la baſe AC: donc le triangle ABO eſt auſſi le quart du triangle ABC.

Maintenant le trapezoïde reſtant AOBC eſt les trois quarts du triangle ABC, & par conſéquent, il faut le diviſer en trois parties

égales. Or, dans ce trapézoïde, les triangles ROC, VOC, qui ont les baſes RO, VO, égales par la conſtruction, & la même hauteur, puiſqu'ils ont le ſommet en C, ſont égaux : & les triangles AQR, BOV, qui ont auſſi les baſes égales, & qui ſont entre les paralleles AB, RV ſont auſſi égaux : donc les triangles AOC, BOC, ſont égaux entre eux. C'eſt pourquoi diviſant chacune de leurs baſes en trois parties, & menant des points de diviſion des droites au point O ; j'ai ſix parties égales, leſquelles priſes deux à deux en donnent trois AOS, SOTC, BOT, qui ſont chacune le quart du triangle ABC.

II°. Si on veut que le triangle ſoit diviſé en quatre parties qui ſoient entre elles comme les parties MN, NP, PQ, QX, de la droite MX ; je prends ſur la baſe AC une partie AR, enſorte que j'aie AR. AC :: MN . NX : & achevant le reſte, comme ci-deſſus, le triangle ABO eſt au triangle total ABC, comme MN eſt à MX ; & il ne reſte plus qu'à diviſer le trapézoïde AOBC en trois parties qui ſoient entre elles comme les autres parties NP, PQ, QX de la droite MX, par le point O pris ſur ſon circuit ; & c'eſt ce que nous allons enſeigner dans le problême ſuivant.

431. PROBLÊME V. *Diviſer une figure quelconque* ABCDE *en tant de parties que l'on voudra, égales ou inégales, par des lignes menées d'un point* O *pris ſur le circuit.* (fig. 276.)

SOLUTION. I°. Si l'on veut que la figure ſoit diviſée en trois parties égales ; du point O, je mene à tous les angles les droites OA, OB, OC, qui la diviſent en triangles : je change ces triangles en d'autres PMQ, QMR, RMS, SMT, qui leur ſoient égaux chacun à chacun, & qui aient la même hauteur, c'eſt-à-dire PMQ = AEO, QMR = AOB, & ainſi de ſuite, & par conſéquent le triangle total PMT eſt égal à la figure ABCDE. Je diviſe la baſe PT en trois également aux points N, L : d'où je mene au ſommet M, les droites NM, LM, qui diviſent le triangle PMT en trois autres PMN, NML, LMT, égaux entre eux, à cauſe des baſes égales, & de la hauteur commune.

Maintenant à cauſe que le point N du tiers PN tombe ſur la baſe QR du triangle QMR = AOB ; je diviſe la baſe AB du triangle AOB en X, en même raiſon que la baſe QR eſt diviſée en N : & menant la droite XO, le triangle AOX eſt au triangle AOB, comme la baſe AX eſt à la baſe AB. Mais QMN eſt au triangle QMR, auſſi comme QN eſt à QR, ou comme AX eſt à AB : donc AXO. AOB :: QMN . QNR ; & à cauſe de AOB = QMR, nous avons AXO = QMN. Or, EOA = PMQ : donc EOA + AOX = PMQ + QMN, ou EOXA = PMN. Mais PMN eſt le tiers du triangle PMT,

PMT, égal à la figure ABCDE : donc EOXA eſt le tiers de cette figure.

De même à cauſe que le point L de la ſeconde diviſion égale NL, tombe ſur la baſe RS du triangle RMS égal au triangle BOC ; je diviſe la baſe BC de ce triangle en Z, en même raiſon que la baſe RS eſt diviſée en L : & menant la droite OZ, la partie XOZB eſt encore un tiers de la figure. Car à cauſe de AOB = QMR, & de AOX = QMN ; nous avons XOB = NMR. Or, BOZ . BOC :: BZ . BC :: RL . RS ; & RML . RMS :: RL . RS : donc BOZ . BOC :: RML . RMS ; & à cauſe de BOC = RMS, nous avons BOZ = RML, & par conſéquent XOB + BOZ = NMR + RML, ou XOZB = NML. Mais NML eſt le tiers du triangle PMT égal à la figure ABCDE : donc XOZB en eſt auſſi le tiers, & par conſéquent OZCD eſt le tiers reſtant.

II°. Si on veut que la figure ſoit diviſée dans la raiſon de trois lignes inégales, je diviſe la baſe PT dans la même raiſon, & j'acheve le reſte comme auparavant.

432. Remarque. On voit par-là qu'il eſt également facile de diviſer une figure en parties égales ou inégales en raiſon donnée : c'eſt pourquoi je ne parlerai plus que de la diviſion des figures en parties égales.

433. Problême VI. *Diviſer une figure donnée* ABCD *en tel nombre de parties égales qu'on voudra par un point* O *donné dans l'aire.* (fig. 277.)

Solution. Du point O, je mene à tous les angles, les droites OA, OB, OC, OD, qui diviſent la figure en triangles. Je change ces triangles en d'autres MEN, NEP, PEQ, QER, qui leur ſoient égaux chacun à chacun, & qui aient une même hauteur, c'eſt-à-dire MEN = AOD, NEP = AOB, PEQ = BOC, & QER = COD ; & par conſéquent le triangle entier MER eſt égal à la figure ABCD.

Si l'on veut donc diviſer la figure ABCD en trois parties égales, je diviſe la baſe MR en trois également aux points H, L ; d'où je mene au ſommet les droites HE, LE qui diviſent le triangle MER en trois triangles MEH, HEL, LER égaux entre eux, & dont chacun par conſéquent eſt le tiers du triangle MER ou de la figure ABCD. Ainſi à cauſe que le point H du tiers MH tombe ſur la baſe NP du triangle NEP égal au triangle AOB ; je diviſe la baſe AB de ce triangle en X, en même raiſon que NP eſt diviſé en H : & menant la droite XO, la partie DOXA eſt le tiers de la figure ABCD : ce que l'on démontrera comme dans le problême précédent.

De même à cauſe que le point L de la ſeconde diviſion égale HL, tombe ſur la baſe PQ du triangle PEQ égal au triangle BOC; je diviſe la baſe BC de ce triangle en Z, en même raiſon que la baſe PQ l'eſt en L: & menant ZO, la partie XOZB eſt encore le tiers de la figure, & par conſéquent DOZC eſt l'autre tiers.

434. COROLLAIRE. On ſe ſervira de la même méthode lorſqu'il faudra *diviſer un triangle par un point donné dans l'aire.* Car il faut prendre garde que dans le problême du nombre 430, le point dans l'aire n'étoit point donné, & qu'il s'agiſſoit de le trouver; au lieu qu'ici il faut néceſſairement s'aſtreindre au point que l'on donne.

435. PROBLÊME VII. *Déviſer un trapézoïde* ABCD, *en autant de parties égales qu'on voudra.* (fig. 278.)

SOLUTION. Si l'on veut qu'il ſoit diviſé en quatre parties égales, je diviſe la baſe inférieure AB en quatre parties égales aux points M, N, R: je diviſe de même la baſe ſupérieure DC en quatre également aux points S, T, X: & menant par les points de diviſion, les droites MS, NT, RX; le trapézoïde eſt diviſé en quatre trapézoïdes égaux.

Car le trapézoïde ADSM eſt égal au produit de la ſomme de ſes deux baſes AM, DS, par la moitié de ſa hauteur (386). Or les trois autres trapézoïdes ont la même hauteur, & les baſes égales aux deux AM, DS: donc ils ſont égaux au même produit.

436. PROBLÊME VIII. *Diviſer un trapézoïde* ABCD, *par des lignes paralleles à ſa baſe.* (fig. 280.)

SOLUTION. Je prolonge les côtés non-paralleles AD, CB, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en E: je réduis le trapézoïde en un triangle MNP qui lui ſoit égal, & le triangle DEC en un autre PNS qui lui ſoit égal, & qui ait même hauteur que le triangle MNP. Ainſi le trapézoïde ABCD eſt au triangle DCE, comme le triangle MNP eſt au triangle PNS, ou comme la baſe MP à la baſe PS, à cauſe que les deux triangles ont la même hauteur.

Si l'on veut donc que le trapézoïde ſoit diviſé en trois parties égales; je diviſe la baſe PM en trois également aux points Q, R, d'où je mene les droites QN, RN qui diviſent le triangle MNP en trois parties égales: je prends une moyenne proportionnelle SO, entre SP & SR: enſuite une quatrieme proportionnelle EL aux trois lignes SP, SO, ED; & du point L menant LH parallele à la baſe AB, la partie LHCD eſt le tiers du trapézoïde.

Car les triangles EDC, ELH, étant ſemblables, ſont entre eux

comme les quarrés $\overline{ED}$, $\overline{EL}$, de leurs côtés homologues. Or, par la conſtruction, nous avons ED. EL :: SP. SO : donc $\overline{ED}$. $\overline{EL}$ :: $\overline{SP}$. $\overline{SO}$. Mais nous avons auſſi SP. SO :: SO. SR : donc $\overline{SP}$. $\overline{SO}$ :: SP. SR. (393), & par conſéquent EDC . ELC :: SP . SR :: SNP . SNR; & diviſant, EDC. ELC — EDC :: SNP. SNR — SNP; ou EDC. LHCD :: SNP. RNP. Mais nous avons EDC = SNP; donc LHCD = RNP, c'eſt-à-dire, la partie LHCD eſt égale au triangle RNP qui eſt le tiers du triangle MNP, ou le tiers du trapézoïde ABCD.

Je prends de même une moyenne proportionnelle SZ, entre SP & SQ; puis une quatrieme proportionnelle ET, aux quatre lignes SP, SZ, ED : & menant TV parallele à la baſe, la partie TVDC eſt les deux tiers du trapézoïde ABCD; ce qui ſe démontre de même que ci-deſſus : donc retranchant la partie LHCD, qui en eſt auſſi le tiers; le reſte TVHL eſt le tiers, & par conſéquent ABVT eſt le tiers reſtant.

437. PROBLÊME IX. *Retrancher d'un triangle* ABC, *un triangle égal à un triangle donné* DEF. (fig. 279.)

SOLUTION. Je cherche un triangle HCL égal au triangle DEF, & ſemblable au triangle ABC (414); & retranchant l'un de l'autre, le reſte eſt ABLH.

DES FIGURES ISOPÉRIMETRES.

438. Deux ou pluſieurs figures qui ont les circuits égaux, ſont dites *iſopérimetres.*

439. PROBLÊME I. *Une figure étant donnée, en faire une autre d'une autre eſpece qui lui ſoit iſopérimetre,* (fig. 281.)

SOLUTION. Suppoſé que l'on demande de faire un rectangle iſopérimetre au triangle ABC; j'ajoute enſemble les côtés du triangle, en ſorte qu'ils forment la ligne droite EL: je coupe cette ligne en deux également en G; & enſuite chacune des moitiés, en deux parties inégales, faiſant EF = HL, & FG = GH : je prends les deux égales EF, HL, pour former les deux baſes ſupérieure & inférieure d'un rectangle MO; & les deux FG, GH, pour en former les côtés : ainſi le rectangle MO eſt iſopérimetre au triangle ABC.

440. COROLLAIRE. Il eſt aiſé de voir qu'on pourroit faire de la même façon un quarré, un polygone régulier, &c, iſopérimetre au triangle ABC.

441. PROBLÊME II. *Un triangle ſcalene* ABC *étant donné, conſ-*

truire ſur la même baſe AB *un triangle iſoſcele iſopérimetre au triangle* ABC. (fig. 283.)

SOLUTION. Je prends AD égal à la moitié des deux côtés AC, CB; & je fais ſur la baſe AB, un triangle ADB dont les côtés AD, BD, ſoient égaux.

PROPOSITION XCVI.

442. *De tous les triangles iſopérimetres faits ſur une même baſe, celui qui eſt iſoſcele ſur cette baſe eſt plus grand que ceux qui ne ſont pas iſoſceles; & les autres ſont d'autant plus petits que leurs côtés ſont plus inégaux.* (fig. 284.)

DÉMONSTRATION. Soit le triangle ABC iſoſcele ſur la baſe AB, c'eſt-à-dire dont les côtés AC, CB ſont égaux; & le triangle ABE iſopérimetre au triangle ABC, mais qui n'eſt pas iſoſcele ſur ſa baſe, ou qui n'a pas les côtés AE, EB égaux.

Je prolonge AC en R, faiſant AC = CR; & je mene la droite ER. Dans le triangle AER, les deux côtés AE, ER, pris enſemble, ſont plus grands que AR ou que AC, CB, ou enfin, que AE + EB = AC + CB; à cauſe que les deux triangles ACB, AEB ſont iſopérimetres, & qu'ils ont la même baſe: ainſi nous avons AE + ER > AE + EB; & retranchant AE de part & d'autre, nous avons ER plus grand que EB. Or, les triangles BCE, ECR, ont le côté CE commun, le côté BC égal au côté CR: mais la baſe BE eſt plus petite que la baſe ER, comme on vient de voir: *donc l'angle* BCE eſt plus petit que l'angle ECR (108), & par conſéquent moindre que la moitié de l'angle RCB. Mais l'angle RCB externe au triangle ACB, étant égal aux deux internes oppoſés A & ABC qui ſont égaux, eſt double de l'angle ABC; & menant la droite CS parallele à AB, l'angle SCB eſt égal à ſon alterne ABC, & vaut par conſéquent la moitié de l'angle RCB: donc l'angle BCE eſt moindre que l'angle SCB; & par conſéquent le ſommet E du triangle ABE tombe en deſſous de la parallele CS. Ainſi la hauteur du triangle iſoſcele ACB eſt plus grande que celle du triangle AEB. Mais ces deux triangles ayant la même baſe AB, ſont entre eux comme leur hauteur: donc le triangle ACB eſt plus grand que le triangle AEB.

On démontrera de la même façon que le triangle AFB iſopérimetre au triangle AEB, mais dont les côtés AF, FB ſont plus inégaux entre eux que les côtés AE, EB, eſt moindre que le triangle AEB, & ainſi des autres. C. Q. F. D.

443. COROLLAIRE. *Si deux triangles iſoſceles & iſopérimetres*

ABC, AEC, *ont un côté* AC *commun, celui qui eſt iſoſcele ſur ce côté, c'eſt-à-dire le triangle* ABC *qui a ſes deux angles égaux ſur* AC, *eſt plus grand que celui qui n'eſt pas iſoſcele ſur ce côté, c'eſt-à-dire que le triangle* AEC *qui a ſes angles égaux ſur* CE, *& non pas ſur* AC. (fig. 285.)

DÉMONSTRATION. Le triangle AEC, conſidéré par rapport à la baſe AC, eſt ſcalene, puiſque ſes côtés AE, EC ſont inégaux; au lieu que le triangle ABC, conſidéré par rapport à la même baſe, eſt iſoſcele: donc celui-ci eſt plus grand que celui-là.

PROPOSITION XCVII.

444. *Si deux triangles iſopérimetres & iſoſceles* AEC, ABC, *ont un côté commun* AC; *celui-ci dont la différence de la baſe à chacun de ſes côtés égaux, eſt moindre, eſt plus grand que celui dont la différence de la baſe à chacun de ſes côtés égaux, eſt plus grande* (fig. 285.)

DÉMONSTRATION. Soit le triangle iſoſcele ACE dont les côtés égaux ſont AE, AC, & la baſe eſt EC que nous ſuppoſerons plus grande que le côté AE ou AC. Si je veux faire ſur AC un triangle iſopérimetre au triangle AEC & iſoſcele ſur AC, il faut que des deux côtés inégaux AE, EC, j'en faſſe deux égaux AB, BC: & pour cela, je dois prendre la moitié de l'excès de EC ſur AE, & le donner à AC. Ainſi dans le nouveau triangle ABC, le côté AB ou BC ſera plus grand que AC de la moitié de l'excès de CE ſur AE ou AC: & par conſéquent la différence de la baſe AC de ce nouveau triangle à ſon côté BC ou BA, ſera moindre que, dans le triangle ACE, la différence de la baſe CE au côté AC. Or, le nouveau triangle ABC étant iſoſcele ſur le côté commun AC, eſt plus grand que le triangle AEC qui n'eſt pas iſoſcele ſur ce côté: donc, &c.

Si dans le triangle AEC la baſe EC étoit plus petite que le côté AE ou AC, il ſeroit facile de faire la même démonſtration. C. Q. F. D.

PROPOSITION XCVIII.

445. *De tous les triangles iſopérimetres, celui qui eſt équilatéral eſt le plus grand.* (fig. 286.)

DÉMONSTRATION. Soit le triangle ſcalene ABC. Je fais ſur ſa baſe AB un triangle iſoſcele ADB, & iſopérimetre à ABC; & par conſéquent ADB eſt plus grand que ACB (442.) Je fais ſur le côté AD du triangle iſoſcele ADB, un triangle iſopérimetre & iſoſcele DEA:

& ce triangle DEA étant iſoſcele ſur DA, eſt plus grand que ADB qui n'eſt pas iſoſcele ſur DA (443); & la différence de ſa baſe AD à ſes côtés AE, DE, eſt moindre, que dans le triangle ADB, la différence de la baſe AB à ſes côtés AD, DB (444). Je fais de même ſur ED un triangle iſoſcele EOD & iſopérimetre au triangle DEA : ainſi ce dernier triangle EDO eſt plus grand que le triangle DEA, & la différence de ſa baſe à ſes côtés eſt moindre. Donc, puiſqu'à meſure que la différence de la baſe aux côtés diminue, le triangle iſopérimetre devient plus grand; il s'enſuit que quand cette différence ſera nulle; c'eſt-à-dire quand le triangle iſopérimetre ſera équilatéral, ce triangle ſera le plus grand de tous les iſopérimetres.

Si l'on prend un autre triangle ſcalene iſopérimetre au triangle ACB, mais de différente baſe, & qu'on faſſe le même raiſonnement; on trouvera que le triangle équilatéral & iſopérimetre à ce triangle, ſera le plus grand. Or, on ne peut trouver qu'un ſeul triangle équilatéral iſopérimetre à pluſieurs iſopérimetres : donc il eſt vrai en général que de tous les triangles iſopérimetres de mêmes baſes ou de baſes inégales, l'équilatéral eſt le plus grand. C. Q. F. D.

PROPOSITION XCIX.

446. *De tous les parallélogrammes iſopérimetres qui ont la même baſe* AB, *le plus grand eſt le rectangle* ADCB; *& les autres ſont d'autant moindres, qu'ils ont des angles plus aigus.* (fig. 287.)

DÉMONSTRATION. Du point A pris pour centre & avec le rayon AD, je décris un demi-cercle MDN; & du même point menant le rayon AE à un point de la circonférence E different de D, j'acheve le parallélogramme AEGB, lequel eſt iſopérimetre au rectangle ADCB: puiſqu'ils ont la baſe commune AB, & le côté AE égal au côté AD; à cauſe que ce ſont des rayons d'un même cercle. Or, le point D étant le point de la circonférence le plus éloigné du diametre MN, la hauteur AD du rectangle ADCB eſt plus grande que la hauteur EF du parallélogramme AEGB : donc le rectangle eſt plus grand que le parallélogramme; puiſque ces figures ayant même baſe, ſont entre elles comme leurs hauteurs.

Si l'on prend ſur la circonférence un point H plus éloigné de D que le point E, & qu'ayant mené le rayon AH, on acheve le parallélogramme AHLB; on démontrera aiſément que ce parallélogramme eſt moindre que le parallélogramme AEGB, & ainſi des autres. C. Q. F. D.

PROPOSITION C.

447. *De tous les rectangles iſopérimetres, le plus grand eſt le*

quarré ABCD, *& les autres ſont d'autant moindres que leurs côtés ſont plus inégaux.* (fig. 288.)

DÉMONSTRATION. I°. Je retranche de la hauteur AB, la partie BR; & j'ajoute à la baſe AD, la partie AE égale à BR: & achevant le rectangle EFHD, le quarré ABCD, eſt iſopérimetre au rectangle EFHD qui a gagné ſur la longueur de la baſe, ce qu'il a perdu ſur la hauteur. Or, les rectangles BRHC, EARF, ayant les baſes BR & EA égales, ſont entre eux comme leurs hauteurs RH, AR; & RH eſt plus grande que AR: donc le rectangle BRHC eſt plus grand que le rectangle EARF; & ajoutant la partie commune ARHD, nous avons ABCD plus grand que EFHD.

II°. Je retranche de la hauteur AR ou EF du rectangle EFHD, une partie FN; & j'ajoute à ſa baſe ED, une partie ES égale à FN; ainſi achevant le rectangle STVD, ce rectangle STVD eſt iſopérimetre au rectangle EFHD. Or, les rectangles FNHV, TNES, ayant les baſes FN, SE égales, ſont entre eux comme leurs hauteurs FH, EN; & FH eſt plus grand que EN: donc le rectangle FNHV eſt plus grand que le rectangle TNES; & ajoutant à chacun d'eux la partie commune ENVD, le rectangle EFHD eſt plus grand que le rectangle STVD dont les côtés ſont plus inégaux. C. Q. F. D.

PROPOSITION CI.

448. *Si deux triangles rectangles* ABC, RCD *ſont ſemblables; je dis que le quarré d'une ligne compoſée des deux hypothénuſes* BC, CD, *eſt égal au quarré d'une ligne compoſée des deux côtés homologues* AB, CR, *plus au quarré d'une autre ligne compoſée des deux autres côtés homologues* AC, RD. (fig. 289.)

DÉMONSTRATION. Je joins en ligne droite les hypothénuſes BC, CD; & à cauſe de l'angle ABC, égal à l'angle RCD; les lignes AB, RC, ſont paralleles, de même que les lignes AC, RD: à cauſe des angles égaux ACB, RDC. Je prolonge BA juſqu'à la rencontre de DR prolongée en P: ainſi les droites AC, PR paralleles entre les paralleles BP, CR, ſont égales; & par la même raiſon les droites AP, CR, le ſont auſſi; & le triangle BPD eſt rectangle. Donc $\overline{BD}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PD}^2$: c'eſt-à-dire le quarré de la ligne BP égale aux deux hypothénuſes, eſt égal au quarré de la ligne BP ou BA+RC, plus au quarré de la ligne PD ou RD+AC. Ce qu'il falloit démontrer.

449. PROBLÊME. *Deux triangles iſoſceles* ABC, CDE, *d'inégales baſes, & qui ne ſont pas ſemblables entre eux, étant donnés;*

conſtruire ſur les mêmes baſes, deux autres triangles iſoſceles & ſemblables entre eux AHC, CRE, *dont les quatre côtés* AH, HC, CR, RE, *ſoient enſemble égaux aux quatre côtés* AB, BC, CD, DE *des deux triangles donnés pris enſemble.* (fig. 290.)

SOLUTION. J'ajoute en ligne droite les côtés AB, CD, des triangles donnés: je coupe la ſomme MN en S, en même raiſon que la ſomme AE de leurs baſes eſt coupée en C: je prends deux droites égales chacune à la grande partie MS; & je conſtruis avec ces deux lignes & la grande baſe AC un triangle iſoſcele AHC. Je prends de même deux lignes égales chacune à la petite partie SN; & je conſtruis avec ces deux lignes & la petite baſe CE, un triangle iſoſcele CRE. Ainſi les deux triangles iſoſceles AHC, CRE ſont ſemblables: car nous avons AH. CR :: MS. SN :: AC. CE; & de plus leurs quatre côtés pris enſemble ſont égaux aux quatre côtés des triangles donnés: puiſque nous avons AH+CR=MS+SN=MN=AB+CD.

PROPOSITION CII.

450. *Deux triangles iſoſceles* ABC, CDE, *non ſemblables, étant donnés ſur des baſes inégales ou égales* AC, CE; *ſi ſur les mêmes baſes on fait deux triangles iſoſceles* AHC, CRE, *ſemblables entre eux, & dont les quatre côtés* AH, HC, CR, RE *ſoient enſemble égaux aux quatre côtés* AB, BC, CD, DE *des triangles donnés: je dis que les deux triangles ſemblables* AHC, CRE, *pris enſemble ſeront plus grands que les deux* ABC, CDE, *pris enſemble.* (fig. 291.)

DÉMONSTRATION. Des ſommets H, D, j'abaiſe les perpendiculaires HP, DQ, qui paſſeront par les autres ſommets B, R; à cauſe que les quatre triangles ſont iſoſceles ſur les baſes AC, CE. Je prolonge la perpendiculaire DQ du plus grand des deux triangles donnés, faiſant QL = DQ: du ſommet B de l'autre triangle donné, je mene la droite BL; & du point L, la droite LC. Les deux triangles rectangles CQD, CQL, ayant le côté CQ commun, & le côté DQ égal à QL, ſont parfaitement égaux; & par conſéquent nous avons LC=CD, & BC+CL=BC+CD=HC+CR. Or, *dans le* triangle BCL les deux côtés BC, CL, étant enſemble plus grands que le côté BL; le quarré d'une ligne compoſée des deux BC, CL, ou des deux HC, CR, eſt donc plus grand que le quarré de BL, & par conſéquent nous avons $\overline{HC} + \overline{CR} > \overline{BL}$.

Les triangles rectangles HPC, RQC, étant ſemblables, à cauſe de

de l'angle aigu HCP égal à l'angle aigu RCQ; le quarré d'une ligne composée de leurs hypothénuses HC, CR, est égal au quarré d'une ligne composée des deux côtés HP, RQ, plus au quarré de la ligne PQ composée de deux autres côtés PC, CQ (448) : ainsi nous avons $\overline{HC} + \overline{CR} = \overline{HP} + \overline{RQ} + \overline{PQ}$.

De même les triangles rectangles PBS, SLQ, étant semblables; le quarré de la ligne BL composée des deux hypothénuses BS, SL, est égal au quarré d'une ligne composée des deux côtés BP, QL ou QD, plus au quarré de la ligne PQ composée des deux autres côtés PC, CQ; & par conséquent $\overline{BL} = \overline{BP} + \overline{QD} + \overline{PQ}$. Or, nous avons trouvé $\overline{BL}$ plus petit que $\overline{HC} + \overline{CR}$: donc $\overline{BP} + \overline{QD} + \overline{PQ}$ est plus petit que $\overline{HC} + \overline{CR}$, ou que son égal $\overline{HP} + \overline{RQ} + \overline{PQ}$: retranchant donc $\overline{PQ}$ de part & d'autre, nous aurons $\overline{BP} + \overline{QD}$ plus petit que $\overline{HP} + \overline{RQ}$. Donc en tirant la racine quarrée de part & d'autre, nous aurons BP + QD plus petit que HP + RQ; c'est-à-dire, les hauteurs des deux triangles non-semblables, sont ensemble moindres que les hauteurs des deux triangles semblables. D'où il suit que l'excès HB de la hauteur HP du triangle AHC sur la hauteur PB du triangle ABC, est plus grand que l'excès DR de la hauteur DQ du triangle CDE sur la hauteur RQ du triangle CRE. Cela posé,

Le triangle ABC est $\frac{1}{2}$ AC×PB, & le triangle CDE est $\frac{1}{2}$ CE×DQ (375), & leur somme est $\frac{1}{2}$ AC×PB + $\frac{1}{2}$ CE×DQ : au contraire le triangle AHC est $\frac{1}{2}$ AC×$\overline{PB + BH}$, & le triangle CRE est $\frac{1}{2}$ CE×$\overline{QD - DR}$, & leur somme est $\frac{1}{2}$ AC×$\overline{PB + BH}$ + $\frac{1}{2}$ EC×$\overline{QD - DR}$. Comparant dont cette somme avec la précédente $\frac{1}{2}$ AC×PB + $\frac{1}{2}$ CE×DQ, il est aisé de voir que le triangle AHC gagne sur le triangle ABC, une quantité $\frac{1}{2}$ AC×BH plus grande que la quantité $\frac{1}{2}$ EC×DR que le triangle CRE perd par rapport au triangle CDE; puisque $\frac{1}{2}$ AC est plus grand que $\frac{1}{2}$ CE, & BH plus grand que DR : donc les deux triangles semblables AHC, CRE, sont ensemble plus grands que les non-semblables ABC, CDE. Ce qu'il falloit démontrer.

Proposition CIII.

451. *De toutes les figures isopérimetres d'un même nombre de côtés, la plus grande est celle qui est équilatérale & équiangle.* (fig. 292.)

Démonstration. I°. Soit la figure de cinq côtés ABCDE, qui n'est pas équilatérale, & dont les côtés inégaux sont EA, AB. Je mene

la droite EB; & je fais ſur cette baſe, un triangle iſoſcele ERB, dont les deux côtés ER, RB, pris enſemble ſoient égaux aux côtés EA, AB, pris enſemble. Ainſi le triangle ERB eſt plus grand que le triangle EAB (442); & ajoutant la partie commune EDCB, la figure REDCB eſt plus grande que la figure AEDCB. Donc toute la figure irréguliere dans ſes côtés, n'eſt pas la plus grande des figures iſopérimetres d'un même nombre de côtés.

II°. Soit donc une figure ABCDE, réguliere dans ſes côtés, mais qui a des angles inégaux EDC, EAB. (*fig.* 293.)

Je mene les droites EC, EB; & faiſant ſur ces droites priſes pour baſes, deux triangles iſoſceles ſemblables ERC, EHB, & dont les quatre côtés ſoient enſemble égaux aux quatre côtés des triangles EDC, EAB; les deux triangles ERC, EHB, ſont enſemble plus grands que les deux EDC, EAB (450); & ajoutant de part & d'autre la partie commune EBC, la figure ERCH eſt plus grande que la figure EDCBA: donc toute la figure irréguliere dans ſes angles, n'eſt pas la plus grande des figures iſopérimetres d'un même nombre de côtés.

III°. Or, entre toutes les figure iſopérimetres d'un même nombre de côtés, il faut néceſſairement qu'il y en ait une plus grande; à cauſe qu'un contour donné ne peut pas enfermer un eſpace qui devienne toujours plus grand: & nous venons de trouver que toutes celles qui ne ſont pas régulieres, ne ſauroient être plus grandes; donc la figure réguliere dans ſes côtés & dans ſes angles eſt la plus grande de toutes. C. Q. F. D.

PROPOSITION CIV.

452. *Un angle droit* ABC *étant donné, ſi l'on diviſe l'un de ſes côtés* BA *en parties égales* BD, DE, EF, &c; *& que de tous les points de diviſion on mene des droites* DC, EC, FC, &c, *à un point quelconque* C *de l'autre côté* BC: *je dis que les angles* DCB, ECB, FCB, &c, *iront en diminuant à meſure qu'ils s'éloigneront du premier* DCB. (fig. 294.)

DÉMONSTRATION. Du point C pris pour centre, & de l'intervalle CD, je décris un arc de cercle qui coupe les lignes voiſines de CD, l'une en R & l'autre en H. Ainſi à cauſe que l'*inclinée* CD eſt plus grande que la perpendiculaire CB, j'ai CH = CD plus grand que CB; & à cauſe que l'oblique CE eſt plus grande que l'oblique CD qui eſt moins éloignée de la perpendiculaire CB, j'ai CR = CD moindre que CE. Or, les triangles CDB, CED, ayant la hauteur commune CB, & les baſes DB, DE, égales, ſont égaux

entre eux : & le ſecteur CDH eſt plus grand que le triangle CDB ; au lieu que le ſecteur CRD eſt moindre que le triangle CED : donc le ſecteur CDH eſt plus grand que le ſecteur CRD. Mais ces deux ſecteurs ſont comme leurs arcs DH, DR, ou comme les angles DCH, DCR, qui ſont meſurés par ces arcs : donc l'angle DCH eſt plus grand que l'angle DCR ; & on prouvera de la même façon que l'angle FCE eſt moindre que l'angle ECD. Ce qu'il falloit démontrer.

453. COROLLAIRE. *Donc les angles* DCB, ECD, FCE, &c, *ne ſont pas dans la raiſon des baſes* DB, ED, FE, &c. *des triangles* DCB, ECD, &c. Car ces baſes ſont égales, & les angles au contraire vont en diminuant. (fig. 294.)

PROPOSITION CV.

454. *Si deux polygones réguliers* ABCDE, FGHLMN, *de différentes eſpeces, ſont iſopérimetres ; le côté* AB *du premier eſt au côté* FG *du ſecond, réciproquement comme le nombre des côtés du ſecond, eſt au nombre des côtés du premier : & l'angle au centre* AOB *eſt à l'angle au centre* FPG, *dans la même raiſon que le côté* AB *eſt au côté* FG ; *c'eſt-à-dire encore réciproquement comme le nombre des côtés du ſecond au nombre des côtés du premier.* (fig. 295.)

DÉMONSTRATION. Le côté AB, eſt la cinquieme partie du circuit ABCDE ; & le côté FG eſt la ſixieme partie du circuit FGHLMN : mais ces deux circuits ſont égaux : donc AB eſt à FG, comme $\frac{1}{5}$ eſt à $\frac{1}{6}$; & réduiſant ces fractions au même dénominateur, ce qui donnera $\frac{6}{30}$ & $\frac{5}{30}$; nous aurons AB eſt à FG, comme $\frac{6}{30}$ eſt à $\frac{5}{30}$, ou comme 6 eſt à 5 ; c'eſt-à-dire comme le nombre 6 des côtés du ſecond eſt au nombre 5 des côtés du premier.

De même à cauſe que tous les angles au centre d'un polygone, valent quatre angles droits ; l'angle au centre AOB eſt la cinquieme partie de quatre droits, & l'angle au centre FPG en eſt la ſixieme partie : donc ces deux angles ſont entre eux comme $\frac{1}{5}$ eſt à $\frac{1}{6}$, ou comme $\frac{6}{30}$ eſt à $\frac{5}{30}$, ou comme 6 eſt à 5 ; & par conſéquent dans la même raiſon de AB à FG, ou du nombre des angles du polygone FGHLM au nombre des angles du polygone ABCDE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION CVI.

455. *Deux polygones réguliers iſopérimetres, mais de différens nombres de côtés, étant donnés ; le plus grand eſt celui qui a un plus grand nombre de côtés.* (fig. 296.)

DÉMONSTRATION. Soit le pentagone régulier ABCDE, iſopéri-

metre à l'exagone régulier FGNTVM. Le côté AB du pentagone, eſt donc au côté FG de l'exagone, comme 6 à 5 (454); & par conſéquent ſi le côté AB eſt diviſé en 6 parties égales, le côté FG en contiendra cinq. Je prends la moitié de l'une de ces parties, que je porte de A en H, & l'autre moitié de B en L; & je mene les lignes HO, LO, & l'apothême OQ. Ainſi puiſque AB contient 6 parties égales & doubles chacune de la partie AH; la ligne AQ qui eſt la moitié de AB, contiendra ſix moitiés de ces parties égales, c'eſt-à-dire ſix parties égales à AH. Concevant donc que AQ ſoit diviſé en ces 6 parties égales, & que de tous les points ſoient menées au point O des droites; le triangle AOQ ſera diviſé en 6 petits triangles, égaux chacun au triangle AOH. Mais comme les angles au ſommet O de ces ſix triangles, iront en diminuant à meſure que leurs baſes s'éloigneront de OQ (452); l'angle AOH ſera moindre que la ſixieme partie de l'angle AOQ; & par la même raiſon l'angle BOL égal à l'angle AOH, ſera auſſi moindre que la ſixieme partie de l'angle QOL. Ainſi l'angle HOL ſera plus grand que les cinq ſixiemes de l'angle AOB; c'eſt-à-dire que HOL ſera plus grand par rapport à l'angle AOB, que 5 par rapport à 6. Or, l'angle FRG eſt à l'angle AOB, comme 5 à 6: donc l'angle HOL ſera plus grand que l'angle FRG; & par conſéquent dans le triangle iſoſcele HOL, les deux angles ſur la baſe OHL, OLH, ſeront plus petits que les deux angles RFG, RGF ſur la baſe du triangle iſoſcele RFG.

Faiſant donc ſur FG, deux angles SFG, SGF, *égaux aux deux* angles OHL, OLH; il eſt clair que les deux côtés FS, SG, étant plus inclinés ſur la baſe que les deux FR, GR, ſe couperont en un point S plus proche de la baſe que le point R où ſe coupent les deux FR, GR: & que par conſéquent le triangle FSG aura la hauteur SP plus petite que la hauteur RP du triangle FRG. Mais les triangles HOL, FSG, étant ſemblables & égaux, ont les hauteurs égales OQ, SP: donc OQ eſt plus petit que RP.

Or, le pentagone ABCDE eſt égal au produit de ſon circuit multiplié par la moitié de ſon apothême OQ (377); & l'exagone FGNTVM eſt égal au produit de ſon circuit par la moitié de ſon apothême: donc à cauſe de l'égalité des deux circuits, ces deux polygones ſont entre eux comme la moitié de leurs apothêmes, ou comme leurs apothêmes; & par conſéquent le pentagone eſt plus petit que l'exagone qui a plus de côtés de lui. Et on démontrera la même choſe à l'égard de deux autres polygones réguliers iſopérimetres, de différens nombres de côtés. C. Q. F. D.

456. COROLLAIRE. *De tous les polygones réguliers, le cercle étant*

celui qui contient un plus grand nombre de côtés, il s'enſuit que de tous les polygones réguliers iſopérimetres, le cercle eſt le plus grand.

457. REMARQUE. De tout ce que nous venons de dire touchant les figures iſopérimetres, on en peut aiſément conclure que *de tous les magazins que l'on conſtruit dans les places pour les munitions de guerre & de bouche; les quarrés contiennent davantage que ceux qu'on fait en quarré long en ſuppoſant le même circuit; & que les circulaires ſont ceux qui contiennent le plus.* On pourroit ajouter, en faveur de ces derniers, que la figure de leurs couvertures, les garantit beaucoup plus que tous les autres, du choc direct des bombes.

CHAPITRE X.

DES DIFFÉRENTES POSITIONS DES LIGNES A L'ÉGARD DES PLANS, ET DE CELLES DES PLANS ENTRE EUX.

458. ON dit qu'une ligne droite eſt *ſur un plan*, lorſque toutes ſes parties ſont dans ce plan.

459. THÉORÊME. I. *Si deux points* R, S, *d'une ligne droite ſont ſur un plan* ABCD; *toutes les parties de cette ligne, même prolongée à l'infini, ſeront dans ce plan auſſi prolongé à l'infini.* (fig. 297.)

DÉMONSTRATION. Du point R, par le point S, menez dans le plan ABCD, la droite RS; ce que l'on peut faire, puiſque toutes les parties de ce plan ne hauſſent ni ne baiſſent pas plus les unes que les autres: cette ligne RS aura tous ſes points ſur le plan. Or, du point R au point S, on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite: donc il n'eſt pas poſſible qu'une autre ligne droite qui a les points R, S, ſur le plan ABCD, ait quelques uns de ſes points entre R & S qui ne ſoient pas ſur ce plan; & il eſt évident que ſi l'on prolonge la ligne droite RS de part & d'autre en Z & en X, tous les points de cette ligne ſeront encore ſur le plan ABCD, prolongé s'il le faut. C. Q. F. D.

460. THÉORÊME II. *Deux lignes droites* AB, CB *qui ſe coupent en* B, *ſont dans un même plan.* (fig. 298.)

DÉMONSTRATION. Je mene la droite AC; & la faiſant mouvoir toujours parallelement à elle-même juſqu'en B, le long de la droite AB, elle décrit par ſon mouvement une ſurface ACEB. Or, les points C, B, de la droite BC, ſont dans cette ſurface: donc toute la ligne BC eſt dans le plan ACEB de même que la ligne AB. Ce qu'il falloit démontrer.

diculaire ſur le plan MNOP; & ſon extrêmité B décrit une droite BS ſur laquelle AB eſt auſſi toujours perpendiculaire. Or, je dis que BS doit être dans le plan RHTX : car ſi cela n'étoit pas, ce plan couperoit la droite CS en un autre point quelconque E. Ainſi menant dans ce plan la droite BE, la droite CS perpendiculaire ſur SB, ſeroit néceſſairement oblique ſur BE, & par conſéquent ſur le plan RHTX : ce qui eſt contre la ſuppoſition. C. Q. F. D.

470. THÉORÊME VII. *Si deux plans ſont paralleles entre eux; toutes les perpendiculaires menées entre ces deux plans, ſont égales.* Ce qui eſt évident, puiſque les deux plans ſont toujours à égale diſtance, & que les diſtances ſe meſurent par les perpendiculaires.

471. PROBLÊME I. *D'un point donné* A *hors d'un plan* MNOP, *abaiſſer une perpendiculaire ſur ce plan.* (fig. 303.)

SOLUTION. Je mene dans le plan, une ligne quelconque RQ : du point donné A, j'abaiſſe ſur cette ligne une perpendiculaire AS : du point S je mene dans le plan MNOP une droite ST perpendiculaire ſur RQ, & du point A j'abaiſſe ſur ST la perpendiculaire AT, qui ſera perpendiculaire ſur le plan MNOP.

Car la droite RS étant perpendiculaire ſur les deux côtés TS, SA, du triangle TSA, eſt par conſéquent perpendiculaire ſur ce triangle (463). Ainſi menant dans le plan MNOP, la droite XT perpendiculaire ſur TS; cette droite XT étant parallele à RS, ſera auſſi perpendiculaire ſur le triangle TSA (467) & par conſéquent ſur le côté TA de ce triangle : donc puiſque TA eſt perpendiculaire ſur XT, & qu'elle l'eſt auſſi ſur TS, par la conſtruction, & que XT, TS, ſont dans le même plan MNOP, il s'enſuit que TA eſt perpendiculaire ſur le plan. (463.)

472. PROBLÊME II. *D'un point donné* T *ſur un plan* MNOP, *élever une perpendiculaire ſur ce plan.* (fig. 304.)

SOLUTION. D'un point quelconque A pris hors du plan, j'abaiſſe une perpendiculaire AS; & enſuite du point T, menant TX parallele à SA, cette droite TX eſt perpendiculaire ſur le plan. (467.)

473. DÉFINITION. Si une ligne droite eſt inclinée ſur un plan; le plus petit angle qu'elle fait avec ce plan, ſe nomme *angle d'inclinaiſon* de la ligne ſur le plan.

474. PROBLÊME III. *Une ligne* AB *étant inclinée ſur un plan* MNOP; *trouver ſon angle d'inclinaiſon ſur ce plan.* (305.)

SOLUTION. De l'extrêmité B de cette ligne, j'abaiſſe ſur le plan la

la perpendiculaire BC ; & du point C menant la droite AC dans le plan, l'angle BAC eſt l'angle d'inclinaiſon : ce que je démontre ainſi.

Du point A pris pour centre, & avec le rayon AC, je décris dans le plan MNOP le cercle CDEHS ; & du point A je conçois qu'il ſoit mené à la circonférence, une infinité de rayons AD, AE, AH, &c, qui formeront tous avec la droite BA différens angles BAD, BAE, &c. Je mene la droite BD ; & le triangle BCD eſt rectangle : car la droite BC étant perpendiculaire ſur MNOP, eſt auſſi perpendiculaire ſur les droites AC, CD, qui ſont dans ce plan, & qui paſſent par le point C. Ainſi BD eſt plus grand que BC.

Or, les triangles ABC, ABD, ont le côté AB commun, & le côté AC égal au côté AD, parce que ces deux côtés ſont rayons d'un même cercle ; mais la baſe BC de l'un, eſt moindre que la baſe BD de l'autre : donc l'angle BAC eſt moindre que l'angle BAD (109). On prouvera de même que l'angle BAE eſt plus grand que l'angle BAC, & ainſi des autres. Donc l'angle BAC étant le moindre des angles que la ligne BA fait avec les lignes menées par le point A dans le plan MNOP, eſt l'angle d'inclinaiſon de la ligne BA ſur ce plan.

475. Corollaire I. Il ſuit de-là (*fig.* 305) :

I°. *Que l'angle* BAH, *qui eſt l'angle de ſuite de l'angle d'inclinaiſon* BAC, *eſt le plus grand de tous les angles que la ligne* BA *fait avec le plan.*

II°. *Que de tous les autres angles qui ſont entre le plus grand* BAH *& le moindre* BAC ; *ceux qui s'approchent plus du grand, ſont plus grands que ceux qui s'en éloignent davantage.*

III°. *Qu'on peut toujours trouver deux angles égaux, moindres que le plus grand* BAH, *& plus grands que le moindre* BAC ; *mais qu'on n'en trouvera jamais trois d'égaux.*

Démonstration. Je mene la droite CE dans le plan, & la droite EB au ſommet B de la perpendiculaire : ainſi le triangle EBC ſera rectangle de même que le triangle DCB. Mais à cauſe que ces deux triangles ont le côté BC commun, & que le côté CD eſt moindre que le côté CE, puiſque l'arc CD eſt moindre que l'arc CE ; il s'enſuit que le côté EB du triangle rectangle EBC, eſt plus grand que le côté BD du triangle rectangle BDC.

Or, les triangles ABE, ABD, ayant le côté AB commun, le côté AE égal au côté AD, & la baſe EB plus grande que la baſe BD ; il eſt clair que l'angle BAE qui s'éloigne plus de l'angle d'inclinaiſon BAC, eſt plus grand que l'angle qui s'en éloigne moins ; & continuant le même raiſonnement, on prouvera que l'angle BAH qui eſt l'angle de ſuite de l'angle d'inclinaiſon BAC, eſt le plus grand

de tous ceux qui ſont faits par la ligne AB avec les rayons menés du centre ſur la demi-circonférence HEC; & quant à ceux qui ſeront faits par la même ligne AB avec les rayons menés du centre ſur l'autre demi-circonférence HSC; il eſt facile de démontrer qu'ils ſeront égaux chacun à chacun à ceux qui auront été faits avec les rayons de la demi-circonférence HEC.

476. COROLLAIRE II. Il ſuit encore de-là, *que l'angle* BAC *d'inclinaiſon d'une ligne* BA *ſur un plan, eſt dans un plan* BAC *perpendiculaire ſur le plan* MNOP. Car la droite BC étant perpendiculaire ſur le plan MNOP, le triangle ABC dans lequel eſt la droite BC, eſt auſſi perpendiculaire ſur ce plan.

477. THÉORÊME VIII. *Si deux plans* ABCD, EFGH, *ſe coupent; leur commune ſection eſt une ligne droite.* (fig. 306.)

DÉMONSTRATION. Le plan ABCD n'eſt autre choſe que la ſomme de ſes élémens DC, RX, RX, &c; de même que le plan EFGH n'eſt autre choſe que la ſomme de ſes élémens FG, SZ, SZ, &c: donc quand ces plans viennent à ſe couper, les élémens de l'un coupent les élémens de l'autre. Or, les élémens étant des lignes, ne ſe coupent qu'en un point: donc la ſection des deux plans eſt une ſuite de points M, O, O, O, &c, N, & par conſéquent une ligne.

Mais cette ligne en tant qu'elle appartient au plan ABCD, ne hauſſe ni ne baiſſe dans aucune de ſes parties du côté de G ni du côté de F; & en tant qu'elle appartient au plan EFGH, elle ne hauſſe ni ne baiſſe dans aucune de ſes parties du côté de C ni du côté de D: donc il faut néceſſairement qu'elle ſoit une ligne droite. C. Q. F. D.

478. THÉORÊME IX. *Si deux points* ABCD, EFGH *qui ſe coupent ſont perpendiculaires ſur un plan* MNOP; *leur commune ſection* RS *eſt perpendiculaire ſur ce plan.* (fig. 307.)

DÉMONSTRATION. Car en tant que RS appartient au plan ABCD perpendiculaire ſur MNOP, elle n'incline pas plus ſur le plan MNOP du côté de E, que du côté de H; & par conſéquent elle eſt perpendiculaire ſur EH: de même en tant que RS appartient au plan EHGF auſſi perpendiculaire ſur MNOP, elle n'incline pas plus du côté de A que du côté de B: donc puiſque RS eſt perpendiculaire ſur les deux lignes EH, AB, qui ſont dans le plan MNOP; elle eſt perpendiculaire ſur ce plan (463). C. Q. F. D.

479. COROLLAIRE I. *Si les côtés* AB, BC, *d'un angle* ABC *qui eſt dans un plan* ABC, *ſont paralleles aux côtés* DE, EF *d'un autre*

angle DEF *qui eſt dans un autre plan* DEF; *ces deux angles* ABC, DEF; *ſont égaux.* (fig. 308.)

Démonstration. Je joins les ſommets par la droite BE; & faiſant avancer l'angle ABC toujours parallélement à lui-même, le côté AB tombe néceſſairement ſur ſa parallele DE, & le côté BC ſur ſa parallele BC: d'où il ſuit que les deux angles ſont égaux.

480. Corollaire II. *L'angle d'inclinaiſon de deux plans* ABED, BEFC *qui ſe coupent eſt le même par-tout.* (fig. 309.)

Démonstration. Suppoſons que l'angle ABC ſoit l'angle d'inclinaiſon des deux plans du côté de B. Je mene à l'extrêmité E de la commune ſection BE & dans le plan ABDE, une droite ED parallele à AB. Je mene de même dans le plan BEFC une droite EF parallele à BC: ainſi faiſant gliſſer l'angle ABC toujours parallélement à lui-même le long de BE, il tombera enfin ſur l'angle DEC & lui ſera égal. Mais le plan que le côté AB décrira pendant ſon mouvement, ſera le même que le plan ABED; & celui que l'autre côté BC décrira, ſera le même que le plan BCFE: donc l'angle d'inclinaiſon de ces deux plans eſt le même par-tout.

481. Problême IV. *Trouver l'angle d'inclinaiſon de deux plans* ABED, BCEF, *qui ſe coupent.* (fig. 309.)

Solution. D'un point quelconque O pris ſur la ſection commune BE, je mene dans le plan ABED la droite OR perpendiculaire ſur BE, & dans le plan BCFE la droite OH auſſi perpendiculaire ſur BE; & l'angle ROH eſt l'angle d'inclinaiſon cherché.

Car le plus ou moins d'inclinaiſon des deux plans entre eux, conſiſte uniquement dans le plus ou moins de diſtance qu'ils conſervent entre eux: donc les côtés RO, OH, de l'angle qui meſure cette inclinaiſon, ne doivent plus ou moins s'approcher que dans le ſens des plans; & par conſéquent ils ne doivent incliner ni du côté de B ni du côté de E.

482. Théorême X. *Si deux plans paralleles* ABCD, EHFG, *ſont coupés par un troiſieme plan* MON; *les deux ſections* RS, PQ, *ſont paralleles.* (fig. 310.)

Démonstration. Si cela n'étoit pas, les deux ſections s'approcheroient d'un côté & s'éloigneroient de l'autre: donc les deux plans à qui elles appartiennent en feroient de même & ne ſeroient plus paralléles; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Il ſuit de-là, *que ſi le plan* MON *qui coupe les deux plans paralleles, eſt un triangle; les côtés* MO, NO, *de ce triangle ſont coupés*

proportionnellement par les ſections RS, PQ; *ſuppoſé néanmoins que* MN *ſoient paralleles à* RS; ce qui eſt évident.

ANGLES SOLIDES.

483. DÉFINITION. Si trois angles plans BAC, CAD, DAB qui ſont dans trois plans différens ont le ſommet commun A, & que leurs côtés s'ajuſtent, ils forment un angle en A qui ſe nomme *angle ſolide*; tels ſont tous les angles des corps dont les faces ſe terminent en pointe. (fig. 311.)

484. Il faut au moins trois angles plans pour former un angle ſolide. Car il eſt viſible que ſi entre les deux angles plans BAD, BAC, il ne ſe trouvoit pas un troiſieme angle CAD, les deux angles plans BAD, BAC ſeroient dans un même plan.

485. THÉORÊME I. *Si un angle ſolide* A *eſt formé par trois angles plans* SAM, MAN, NAS; *la ſomme de deux de ſes angles, eſt plus grande que le troiſieme.* (fig. 312.)

DÉMONSTRATION. Si l'on veut que l'angle SAN ſoit plus grand que les deux autres; je fais dans le plan de cet angle, l'angle SAR égal à l'angle SAM; & par conſéquent l'angle reſtant RAP, eſt plus grand que l'angle NAM. Je prends ſur le côté AM de l'angle SAM, la partie AC; & je fais AR = AC. Du point C je mene la droite CB, qui coupe l'autre côté SA de l'angle SAM, en un point quelconque B. Du point B par le point R, je mene la droite SP qui coupe la droite AN en P; & du point P par le point C, je mene la droite CP: ce qui me donne le triangle BCP, qui ſert de baſe à l'angle ſolide A.

Les triangles BAC, BAR, ſont parfaitement égaux; à cauſe de BA commun, de AC = AR, & de l'angle compris BAC égal à l'angle compris BAR: donc BC eſt égal à BR. Or, les triangles RAP, PAC, ont le côté AR égal au côté AC, & le côté AP commun; mais l'angle RAP eſt plus grand que l'angle PAC, par la ſuppoſition: donc la baſe RP eſt plus grande que la baſe PC; & par conſéquent BR + RP ou BP eſt plus grande que BC + CP: ce qui eſt impoſſible, à cauſe que dans tout triangle BPC un côté ſeul BP eſt toujours moindre que les deux autres. Donc, il eſt impoſſible auſſi que l'angle BAP ſoit plus grand que la ſomme des deux autres BAC, CAP, qui forment l'angle ſolide A.

486. THÉORÊME II. *La ſomme des angles plans* BAC, CAP, PAB *qui forment un angle ſolide* A, *vaut toujours moins que quatre angles droits.* (fig. 312.)

DÉMONSTRATION. Je termine l'angle ſolide A par une baſe BPC,

laquelle forme avec les plans des trois angles BAC, CAP, PAB, trois autres angles solides B, C, P. Or, dans l'angle solide B, les deux angles plans PBA, ABC, valent plus que le troisieme PBC (485): de même dans l'angle solide C, les deux angles plans BCA, ACP, valent plus que le troisieme BCP; & dans l'angle solide P, les deux angles CPA, APB, valent plus que le troisieme CPB.

Mais dans le triangle BPC, les trois angles PBC, BCP, CPB, valent ensemble deux droits: donc les six angles PBA, ABC, BCA, ACP, CPA, APB, valent plus de deux droits. Mais tous les angles des trois triangles BAC, CAP, PAB, valent ensemble six droits; à cause que dans chaque triangle, les trois angles valent deux droits: retranchant donc de six angles droits, la valeur des angles sur les bases des trois triangles, laquelle vaut plus de deux droits; les trois angles qui forment l'angle solide A, vaudront ensemble moins de quatre droits. On prouvera facilement la même chose, si l'angle solide A étoit formé par plus de trois angles.

CHAPITRE XI.

DE LA STÉRÉOMÉTRIE OU DE LA MESURE DES SOLIDES, DE LEURS SURFACES ET DE LEURS RAPPORTS.

487. DÉFINITION I. On nomme *cube* un solide compris sous six faces, dont tous les côtés sont égaux entre eux, & dont les angles sont droits. (*fig.* 313.)

La face ABCD sur laquelle on conçoit que le solide est appuyé, se nomme *base inférieure*, ou simplement *base*: la face FGHE opposée à la base, se nomme *base supérieure*; & les quatre autres faces se nomment *faces ascendantes*, à cause qu'elles sont entre la base inférieure & la supérieure. Il est visible que la hauteur de ce solide n'est pas différente de l'un des côtés GB des faces ascendantes: puisque toutes les faces sont perpendiculaires les unes sur les autres.

488. DÉFINITION II. Un *parallélepipede* est un solide ABCDEF GH (*fig.* 314), compris sous six parallélogrammes dont les opposés sont égaux. On le nomme *parallélepipède rectangle*, lorsque tous les angles des parallélogrammes sont droits; & *parallélepipède incliné*, quand les angles ne sont pas droits.

489. DÉFINITION III. Un *prisme* ABCDEFGHILNM (*fig.* 315), est un solide compris sous deux bases égales & paralleles ABCDEF,

HILNMG, & ſous autant de parallélogrammes que chacune des baſes a de côtés. Ce ſolide eſt *droit*, lorſque les parallélogrammes montans ſont perpendiculaires ſur les baſes; & *incliné*, lorſque ces parallélogrammes ſont inclinés entre les baſes. Si la baſe du priſme eſt un triangle, on le nomme *priſme triangulaire :* ſi la baſe eſt un pentagone, on le nomme *priſme pentagonal;* & ainſi des autres.

490. DÉFINITION IV. Un *cylindre*, eſt un ſolide compris ſous deux baſes égales & paralleles, qui ſont deux cercles AB, CD, & ſous une ſurface courbe qui regne entre les deux cercles (*fig.* 316.)

Un cercle étant un polygone d'une infinité de côtés, on peut concevoir un cylindre comme un priſme, dont la baſe eſt compoſée d'une infinité de lignes droites ou de côtés.

491. DÉFINITION V. Une *pyramide*, eſt un ſolide compris ſous une baſe ABCD (*fig.* 317), & ſous autant de triangles montans AEB, BEC, CED, DEA que la baſe a de côtés, leſquels, triangles ont tous leurs ſommets en un même point E. La ligne EO menée du ſommet au centre O de la baſe, ſe nomme *axe;* & cet axe ne differe point de la hauteur, lorſqu'il eſt perpendiculaire ſur la baſe. Mais lorſqu'il eſt incliné ſur la baſe, la pyramide eſt auſſi inclinée; & la hauteur doit ſe prendre par la perpendiculaire menée du ſommet E ſur ſa baſe.

492. DÉFINITION VI. Un *cône* eſt une pyramide d'une infinité de faces ABE (*fig.* 318), dont la baſe AB eſt un cercle : on le nomme *droit*, lorſque ſon axe EO eſt perpendiculaire *ſur la baſe; & incliné*, lorſque l'axe eſt incliné.

493. DÉFINITION VII. La *ſphere* eſt un ſolide ABCD (*fig.* 319) parfaitement rond, & au milieu duquel eſt un point O également éloigné de tous les points de la ſurface. Si l'on conçoit qu'un demi-cercle ACB tourne autour de ſon diametre BA immobile; il décrira une ſphere par ſa circonvolution. Toute ligne droite BA qui paſſe par le centre O & qui aboutit de part & d'autre à la ſurface, ſe nomme *axe* ou *diametre de la ſphere;* & toute ligne OB, menée du centre à la ſurface, ſe nomme *rayon.*

PRISMES, CYLINDRES.

PROPOSITION CVII.

494. *Si l'on coupe un parallélepipede, ou un priſme, ou un cylindre, droits ou inclinés, par un plan parallele à la baſe; ce plan ſera ſemblable & égal à la baſe.* (fig. 314.)

DÉMONSTRATION. Soit le parallélepipede ABCDEFGH, coupé

par le plan MNOP parallele à ſa baſe ABCD : le parallélogramme BCHG étant coupé par les deux plans MNOP, ABCD, paralleles entre eux; les ſections NO,BC, faites ſur ce parallélogramme, ſont auſſi paralleles (482), & par conſéquent égales; à cauſe qu'elles ſont entre les paralleles BG, CH : & on prouvera de la même façon que les trois côtés du plan MNOP, ſont égaux & paralleles aux trois autres côtés de la baſe ABCD chacun à chacun. Or les angles du plan MNOP, ſont auſſi égaux aux angles de la baſe; à cauſe qu'ils ont leurs côtés paralleles à ceux de la baſe : donc les deux plans MNOP, ABCD, ſont ſemblables & égaux.

La même choſe ſe démontrera à l'égard d'un cube : car un cube n'eſt autre choſe qu'un parallélepipede rectangle, dont les côtés de la baſe & la hauteur ſont égaux. C. Q. F. D.

Proposition CVIII.

495. *Tout cube, tout parallelépipede, tout priſme, & tout cylindre, droit ou incliné, eſt égal à ſa baſe multipliée par ſa hauteur, c'eſt-à-dire par la perpendiculaire tirée entre les deux baſes.* (fig. 320.)

Démonstration. Soit le parallélepipede AB. Si l'on conçoit qu'il ſoit coupé par une infinité de plans paralleles à la baſe, & infiniment proches; la ſomme de ces plans ſera égale au parallélepipede. Or, tous ces plans ſont égaux à la baſe (494) : donc leur ſomme n'eſt autre choſe que la baſe priſe autant de fois qu'il y a de plans; c'eſt-à-dire la baſe multipliée par la grandeur qui marque la multitude des plans. Mais la hauteur AC du parallélepipede, ſe trouve coupée par les plans, en autant de parties infiniment petites & égales; & chacune de ces parties, eſt la hauteur infiniment petite de chaque plan, puiſque les hauteurs ſe prennent par les perpendiculaires : donc la hauteur AC marque la multitude des plans qui compoſent le parallélepipede; & par conſéquent ce ſolide eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur.

On démontrera de la même façon que le parallélepipede incliné AB (*fig.* 321), eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur CE. Car quoique l'arête inclinée AC ſoit coupée par les plans en autant de parties égales qu'il y a de plans qui compoſent le ſolide; cependant comme cette ligne n'eſt pas perpendiculaire entre les plans, chacune de ſes parties ſe trouve plus grande que la hauteur infiniment petite de chacun des plans; au lieu que chaque petite partie de la perpendiculaire CE eſt préciſément égale à la hauteur infiniment petite de chaque plan : d'où il ſuit que c'eſt la perpendiculaire qui

doit en exprimer la multitude; & que par conſéquent le parallélepipede eſt égal à ſa baſe multipliée par ſa hauteur.

496. COROLLAIRE I. *Tous les parallélepipedes, tous les priſmes, tous les cylindres, qui ont même hauteur & même baſe, ou les hauteurs égales & les baſes auſſi, ſont égaux.* Cela eſt évident: puiſqu'ils ſont les produits de leurs baſes par leur hauteur.

497. COROLLAIRE II. *Les parallélepipedes, les priſmes, & les cylindres, qui ont les baſes égales & les hauteurs inégales, ſont entre eux comme les hauteurs: ceux qui ont les baſes inégales & les hauteurs égales, ſont entre eux comme leurs baſes; & ceux qui ont les baſes réciproques aux hauteurs, ſont égaux.* (fig. 322.)

DÉMONSTRATION. I°. Soient les deux parallélepipedes AF, MR. Si l'on ſuppoſe que les deux baſes ſont égales; je nomme X l'une & l'autre baſe: ainſi le premier eſt X × HA; & le ſecond eſt X × MT. Or, à cauſe que les hauteurs HA, MT ſont multipliées par une même grandeur X; les produits X × HA, X × MT ſont entre eux comme HA, MT: donc les parallélepipedes ſont entre eux comme les hauteurs HA, MT.

II°. On démontrera de la même façon que ſi les baſes ſont inégales & les hauteurs égales; les parallélepipedes ſont entre eux comme les baſes.

III°. Enfin ſi les baſes ſont réciproques aux hauteurs, c'eſt-à-dire ſi l'on a ABCD. MNOP :: MT. AH; on aura, en faiſant le produit des extrêmes & des moyens, ABCD × AH = MNOP × MT, c'eſt-à-dire, les deux parallélepipedes égaux.

498. COROLLAIRE III. *Les parallélepipedes, les priſmes, & les cylindres, ſont entre eux en raiſon compoſée de la raiſon de leurs hauteurs & de celle de leurs baſes.* (fig. 322.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux parallélepipedes AF, MR. La raiſon de leurs hauteurs eſt AH, MT: celle de leurs baſes eſt ABCD, MNOP; & la compoſée des deux eſt AH × ABCD, MT × MNOP. Or, les deux termes de cette raiſon, ſont les deux parallélepipedes: donc ces deux ſolides ſont en raiſon compoſée, &c.

PYRAMIDES, CONES, PRISMES.

PROPOSITION CIX.

499. *Si l'on coupe une pyramide* ABCDE, *dont la hauteur eſt* EQ, *par un plan* MNOP *parallele à la baſe* ABCD; *je dis* 1°. *que ce plan ſera ſemblable à la baſe.* 2°. *Qu'il ſera à la baſe comme le quarré de ſa hauteur* SE *au quarré de la hauteur* QE *de la baſe, en prenant*

prenant pour hauteurs les diſtances des plans au ſommet E de la pyramide. (fig. 323.)

DÉMONSTRATION. I°. La face AEB étant coupée par les deux plans MNOP, ABCD, paralleles entre eux; les ſections MN, AB ſont paralleles entre elles, & par la même raiſon les trois autres côtés du plan MNOP ſont paralleles aux trois autres côtés de la baſe. Or, dans la face AEB, nous avons MN. AB :: ME. AE; à cauſe des paralleles MN, AB: & par la même raiſon dans la face ADE, nous avons MP. AD :: ME. AE: donc MN. AB :: MP. AD; ce qui fait voir que les côtés MN, MD du plan MNOP ſont proportionnels aux côtés AB, AD de la baſe. Et par un ſemblable raiſonnement on trouvera que les deux autres côtés PO, ON, du plan MNOP, ſont auſſi proportionnels aux côtés DC, CB de la baſe. Mais les angles du plan MNOP ſont égaux aux angles de la baſe chacun à chacun, à cauſe des côtés paralleles: donc le plan MNOP eſt ſemblable à la baſe.

II°. Les plans MNOP, ABCD, étant ſemblables, ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues MN, AB. Mais nous avons MN. AB :: ME. AE: donc les deux plans ſont entre eux comme les quarrés de ME. AE. Du point Q où la perpendiculaire coupe la baſe, je mene la droite AQ: ce qui me donne le triangle AQE, dans lequel les deux ſections MS, AQ faites par les deux plans MNOP, ABCD paralleles entre eux, ſont paralelles. Ainſi j'ai SE. QE :: ME. AE; & par conſéquent les deux plans MNOP, ABCD étant entre eux comme les quarrés de ME, AE, ſont auſſi comme les quarrés de SE, QE. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE. On démontrera la même choſe d'une pyramide inclinée ABCE (*fig.* 324). Car prolongeant le plan MNOP, & la baſe juſqu'à la rencontre de la perpendiculaire EQ, menée du ſommet ſur la baſe; & menant dans la baſe la droite AQ, qui donnera le triangle AQE; les ſections MS, AQ, faites ſur le triangle par les plans paralleles MNOP, ABCD prolongés, ſeront paralleles. Ainſi l'on aura ES. EQ :: EM. EA :: MN. AB; & les plans PMNO, ABCD étant entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues MN, AB, à cauſe qu'ils ſont ſemblables, ſeront par conſéquent comme les quarrés de leurs hauteurs ES, EQ.

PROPOSITION CX.

500. *Les pyramides qui ont les baſes égales, & les hauteurs auſſi, ſont égales.* (fig. 325).

DÉMONSTRATION. Soient les deux pyramides ABCDE, HZVQ, dans lesquelles je suppose que la base quarrée de la premiere est égale à la base triangulaire de la seconde, & que la hauteur OE est égale à la hauteur QX. Je coupe l'une & l'autre par des plans MNLP, RYT, paralleles aux bases, & qui soient à égales distances des sommets E, Q; ce qui me donne ES = QF. Or, dans la premiere pyramide, j'ai MNLP. ABCD :: $\overline{SE}^2$. $\overline{OE}^2$ (499); & dans la seconde RYT. HZV :: $\overline{QF}^2$. $\overline{QX}^2$: donc à cause de $\overline{QF}^2 = \overline{ES}^2$, & de $\overline{QX}^2 = \overline{OE}^2$; j'ai MNLP. ABCD :: RYT. HZV. Mais ABCD = HZV : donc MNLP = RYT.

Or si l'on conçoit que l'une & l'autre pyramide soient coupées par une infinité de plans paralleles aux bases; il n'y aura pas plus de plans dans l'une que dans l'autre, à cause des hauteurs égales; & chaque plan de l'une sera égal à chaque plan de l'autre, qui sera à égale distance du sommet, ainsi qu'on vient de voir : donc la somme des plans de l'une sera égale à la somme des plans de l'autre, & par conséquent les deux pyramides seront égales.

501. COROLLAIRE *Ce que nous venons de dire dans les deux propositions précédentes touchant les pyramides, doit s'entendre aussi des cônes droits ou inclinés :* puisque les cônes sont des pyramides dont les bases ont une infinité de côtés.

PROPOSITION CXI.

502. *Tout prisme triangulaire* ABCDEF *peut se diviser en trois pyramides égales.* (fig. 326.)

DÉMONSTRATION. Je coupe les trois parallélogrammes montans, par les diagonales AF, FC, EC; & je fais passer un plan par les deux AF, FC, & un autre par les deux FC, EC : ce qui me donne trois pyramides ABCF, EFDC, ECAF. Or, les deux premieres ont les bases ABC, DEF égales, de même que leurs hauteurs BF, DC : & si l'on conçoit que la seconde EFDC ait pour base le triangle ECD, & que la base de la troisieme EACF soit le triangle ECA; on trouvera que ces deux pyramides sont aussi égales, à cause que leurs bases EAC, ECD sont égales, & qu'elles ont leurs sommets au même point F : ce qui leur donne une même hauteur. Donc les trois pyramides sont égales. C. Q. F. D.

503. COROLLAIRE. *Donc tout prisme triangulaire* ABCDEF, *est triple d'une pyramide* ABCF *de même hauteur & de même base* (fig. 326.)

Proposition CXII.

504. *Toute pyramide, de quelque nombre de côtés que ſoit ſa baſe, eſt le tiers d'un priſme de même hauteur & de même baſe.* (fig. 327.)

Démonstration. Soit la pyramide pentagonale ABCDEF. Du point O où ſon axe coupe la baſe, je mene des droites OA, OB, OC, &c, à tous les angles: ce qui diviſe la baſe en autant de triangles qu'elle a de côtés. Je coupe la pyramide par des plans qui paſſent par le ſommet F & par les droites OA, OB, OC, &c; & la pyramide ſe trouve diviſée en cinq pyramides triangulaires, qui ont chacune pour baſe l'un des triangles de la baſe. Je conſtruis ſur ces triangles, des priſmes triangulaires de même hauteur; & ces cinq priſmes pris enſemble forment un priſme total dont la baſe eſt la même que celle de la pyramide, & qui a même hauteur. Or, chacun des priſmes triangulaires eſt triple de la pyramide triangulaire correſpondante: donc le priſme total eſt triple de la pyramide totale, & par conſéquent la pyramide en eſt le tiers.

Et on démontrera la même choſe à l'égard des pyramides inclinées, & des cônes droits ou inclinés. C. Q. F. D.

505. Corollaire. *Les pyramides qui ont les baſes égales & les hauteurs inégales, ſont entre elles comme leurs hauteurs; celles qui ont les hauteurs égales & les baſes inégales ſont entre elles comme leurs baſes; & celles qui ont les hauteurs réciproques aux baſes, ſont égales.*

Démonstration. Les pyramides ſont le tiers des priſmes de même baſe & de même hauteur: or ce qui convient aux entiers convient à leurs tiers: donc ce que nous avons dit des priſmes (497), doit ſe dire auſſi des pyramides.

Proposition CXIII.

506. *Une pyramide* ABCF *étant donnée; ſi on la coupe par un plan* OED *parallele à la baſe, je dis que pour avoir la valeur de la partie tronquée* ABCDEO, *il faut chercher un plan moyen proportionnel géométrique entre la baſe inférieure & la ſupérieure* DEO; *ajouter ce plan aux deux baſes, & multiplier le tout par le tiers de la hauteur* XZ *de la partie tronquée* ABCDEO. (fig. 428.)

Démonstration. I°. Suppoſons que la pyramide ſoit triangulaire. Je coupe deux des faces montantes ABEO, BCDE, par des diagonales AE, CE; & faiſant paſſer un plan par ces deux diagonales, je retranche de la pyramide tronquée, la pyramide ABCE;

& il me reſte une autre pyramide AODCE. Je coupe la face AODC, par la diagonale OC; & je coupe AODCE, par un plan qui paſſe par le ſommet E par la diagonale OC : ce qui me donne deux autres pyramides AOCE, ODCE.

Maintenant je cherche le rapport de la premiere de ces trois pyramides ABCE, à la ſeconde AOCE; & comme elles ont deux faces ABE, OEA, qui ſont ſur un même plan, ſi je prends ces deux faces pour leurs baſes, elles auront l'une & l'autre le ſommet en C; & par conſéquent leur hauteur ſera la même : d'où il ſuit que ces deux pyramides ſeront entre elles comme leurs baſes ABE, OEA. Mais ces deux baſes ou triangles étant entre les deux paralleles AB, OE, ſont entre eux comme leurs baſes AB, OE : donc les deux pyramides ſeront entre elles comme AB, OE. Ainſi nommant P la premiere ABCE, & S la ſeconde AOCE; nous aurons P. S :: AB. OE.

Je compare de même la ſeconde AOCE, avec la troiſieme ODCE; & prenant pour leurs baſes les faces AOC, ODC, qui ſont ſur un même plan, elles ſe trouvent avoir le ſommet commun en E, & par conſéquent la même hauteur : d'où il ſuit que ces deux pyramides ſont entre elles comme leurs baſes ou triangles AOC, ODC. Mais ces triangles étant entre les paralleles AC, OD, ſont entre eux comme leurs baſes AC, OD; & à cauſe des triangles ſemblables ABC, OED, nous avons AC. OD :: AB. OE : donc les deux pyramides AOCE, ODCE, ſont entre elles comme *AB. OE.* Ainſi nommant T la troiſieme ODCE, nous avons S. T :: AB. OE. Mais nous avons trouvé P. S :: AB. OE : donc nous avons auſſi P. S :: S. T; c'eſt-à-dire les trois pyramides qui compoſent la pyramide tronquée ABCDEO, ſont en proportion continue.

Je cherche un plan moyen proportionnel que je nomme V, entre la baſe inférieure ABC, & la ſupérieure OED : ce qui donne ABC. V :: V. OED; & multipliant tout par la même grandeur $\frac{1}{3}$XZ, c'eſt-à-dire par le tiers de la hauteur XZ du tronquement, les trois quantités ABC$\times\frac{1}{3}$XZ, V$\times\frac{1}{3}$XZ, & OED$\times\frac{1}{3}$XZ, ſont encore en proportion continue. Or, la premiere ABC$\times\frac{1}{3}$XZ, eſt égale à la premiere pyramide ABCE; & la troiſieme OED$\times\frac{1}{3}$XZ eſt égale à la troiſieme pyramide ODCE : donc la ſeconde V$\times\frac{1}{3}$XZ doit être égale à la ſeconde AOCE, & par conſéquent le tronquement ABCDEO eſt égal aux trois plans ABC, V, OED, multipliés par le tiers de la hauteur ZX du tronquement.

II°. Si la pyramide n'eſt pas triangulaire (*fig.* 329); des centres Z, X, des deux baſes, je mene des droites à leurs angles : & faiſant

paſſer des plans par les lignes de diviſion de l'une & l'autre baſe, le tronquement ſe trouve diviſé en autant de tronquemens de pyramides triangulaires que la baſe a de côtés ; & chacun de ces tronquemens ſera égal à ſes deux baſes triangulaires ajoutées au plan moyen proportionnel, le tout multiplié par $\frac{1}{3}$ZX.

Or, ſi je prends un plan moyen proportionnel MNPQ, entre la baſe totale ABCD & la baſe totale HEFG ; ce plan ſe trouvera diviſé en un même nombre de triangles que ces baſes, & chacun de ces triangles ſera moyen proportionnel entre les deux baſes de la pyramide triangulaire qu'il coupera : donc en ajoutant enſemble les plans ABCD, MNPQ, HEFG, & multipliant la ſomme par $\frac{1}{3}$XZ ; j'aurai tout d'un coup la ſomme des tronquemens triangulaires qui compoſent le tronquement AF.

Il eſt aiſé d'appliquer la même choſe aux tronquemens des pyramides inclinées. C. Q. F. D.

PROPOSITION CXIV.

507. *Tout priſme triangulaire tronqué eſt égal au triangle* ABC *qui lui ſert de baſe, multiplié par le tiers des trois arêtes que forment les plans montans, c'eſt-à-dire par le tiers de ſes trois longueurs.*

DÉMONSTRATION. Il peut arriver que le priſme triangulaire ne ſoit tronqué que par une de ſes extrêmités (*fig.* 330, 331, 332) ; ou qu'il ſoit tronqué par ſes deux extrêmités (*fig.* 333.)

I°. Si le priſme triangulaire n'eſt tronqué que par une de ſes extrêmités ; il peut ſe faire, 1°. Que deux de ſes longueurs BE, CD, (*fig.* 330) ſoient égales ; & la troiſieme AH plus grande que chacune des deux autres. 2°. Que deux de ſes longueurs AH, CG (*fig.* 331), étant égales ; la troiſieme BE ſoit moindre que chacune d'elles. 3°. Enfin, que les trois longueurs AH, BE, CG ſoient inégales entre elles (*fig.* 332). Examinons tous ces cas en particulier.

D'abord, ſi la longueur AH eſt plus grande que les deux égales BE, CD, (*fig.* 330) ; je coupe le priſme par un plan EFD parallele à la baſe ABC, & qui paſſe par les extrêmités E, D des longueurs égales BE, CD : ce qui coupe le priſme tronqué en deux ſolides, dont l'un eſt le priſme ABCDEF, & l'autre eſt la pyramide DEFH. Or, le priſme ABCDE eſt égal à ſa baſe ABC multipliée par la longeur BE, ou par le tiers de ſes trois longueurs égales AF, BE, CD ; & la pyramide eſt égale à ſa baſe DEF ou ABC ſon égale, multipliée par le tiers de ſa hauteur FH : ainſi le priſme tronqué ABCDEH eſt égal à ſa baſe ABC multipliée par le tiers des trois longueurs DC, BE, AF, plus le tiers de la longueur FH. Mais le tiers de AF, plus

le tiers de FH, eſt égal au tiers de AH : donc le priſme tronqué eſt égal à ſa baſe multipliée par le tiers de ſes trois longueurs CD, BE, AH.

Enſuite, ſi les deux longueurs égales AH, CG (*fig.* 331), ſont plus grandes que la troiſieme BE; je coupe le priſme par un plan DEF parallele à ſa baſe ABC, & qui paſſe par l'extrêmité E de la troiſieme longueur BE : ce qui coupe le priſme tronqué en deux ſolides, dont l'un eſt le priſme triangulaire ABCDEF, & l'autre eſt la pyramide DGHFE. Je coupe la face DGHF de cette pyramide par la diagonale HD, & faiſant paſſer un plan par cette diagonale & par le ſommet E; la pyramide DGHF eſt coupée en deux autres pyramides HDFE, DGHE, qui ſont égales entre elles; à cauſe du ſommet E commun, & des baſes HGD, HDF qui ſont viſiblement égales; puiſque DGHF eſt un parallélogramme dont la diagonale eſt HD. Mais prenant pour baſe de la pyramide FEDH, le plan FED = ADC; la hauteur de cette pyramide eſt la droite FH : donc cette pyramide eſt égale au plan ADC multiplié par $\frac{1}{3}$FH; & par conſéquent l'autre pyramide DGHE eſt égale au même plan ADC multiplié par $\frac{1}{3}$FH ou par $\frac{1}{3}$GD, à cauſe de GD = FH. Et comme le priſme ABCDEF eſt égal au même plan multiplié par le tiers des droites CD, BE, AF; il s'enſuit que le priſme tronqué, compoſé de ces trois ſolides, eſt égal au produit de la baſe ABC multipliée par le tiers des droites CD, BE, AF, plus le tiers de FH, plus le tiers de DG. Mais $\frac{1}{3}$AF + $\frac{1}{3}$FH = $\frac{1}{3}$AH, & $\frac{1}{3}$CD + $\frac{1}{3}$DG = $\frac{1}{3}$CG : *donc le* priſme tronqué eſt égal à ſa baſe ABC multipliée par $\frac{1}{3}$BE + $\frac{1}{3}$AH + $\frac{1}{3}$CG.

Enfin, ſi les trois longueurs AH, BE, CG ſont inégales (*fig.* 332); je fais les mêmes opérations que dans le cas précédent; & le priſme tronqué ſe trouve diviſé en un priſme triangulaire ABCDEF, & deux pyramides DGHE, DGFE, qui ont le ſommet E commun, & qui ſont par conſéquent comme leurs baſes inégales DGH, DHF. Mais ces baſes ou triangles étant entre les paralleles DG, FH, ſont entre eux comme leurs baſes GD, FH : donc les deux pyramides ſont entre elles comme les droites GD, FH. Or, en prenant pour baſe de la pyramide DHFE, le plan FED; ſa hauteur de cette pyramide eſt FH : donc la pyramide DGHE doit être égale à une autre pyramide qui auroit pour baſe le même plan FED, & pour hauteur la ligne GD. Car cette nouvelle pyramide ſeroit à la pyramide DGHE, comme GD eſt à FH : à cauſe des baſes égales. Ainſi la pyramide DEFH = FED × $\frac{1}{3}$FH = ABC × $\frac{1}{3}$FH; la pyramide DGHE = ABC × $\frac{1}{3}$DG; & le priſme ABCDEF = ABC × $\frac{1}{3}$ AF + $\frac{1}{3}$ BE + $\frac{1}{3}$ CD;

donc le priſme tronqué ABCGHE = ABC × $\frac{1}{3}$ AF + $\frac{1}{3}$ BE + $\frac{1}{3}$ CD + $\frac{1}{3}$ FH + $\frac{1}{3}$ DG. Mais $\frac{1}{3}$ AF + $\frac{1}{3}$ FH = $\frac{1}{3}$ AH ; & $\frac{1}{3}$ CD + $\frac{1}{3}$ DG = $\frac{1}{3}$ CG : donc le priſme ABCGHE = ABC × $\frac{1}{3}$ AH + $\frac{1}{3}$ BE + $\frac{1}{3}$ CG.

II°. Si le priſme triangulaire eſt tronqué par ſes deux extrêmités (*fig.* 333) ; je coupe ſes trois arêtes par un plan ABC, qui leur ſoit perpendiculaire : ce qui coupe ce priſme en deux autres ABCDHE, ABCMON, qui ne ſont tronqués chacun que par l'une des ſes extrêmités. Ainſi le premier ABCDHE eſt égal au plan ABC multiplié par le tiers de ſes trois longueurs AH, EB, CD ; & le ſecond ABCMON eſt égal au plan ABC multiplié par le tiers de ſes trois longueurs AO, BN, CM : donc les deux enſemble, c'eſt-à-dire, le priſme total eſt égal au plan ABC multiplié par le tiers des trois longueurs OH, NE, MD. Ce qu'il falloit démontrer.

508. Remarque. Quoique ce que je viens de dire ne regarde que le priſme triangulaire tronqué ; on peut cependant s'en ſervir pour meſurer un priſme quelconque tronqué. Soit par exemple, le priſme pentagonal tronqué ABCDEFGHIL (*fig.* 328) : de l'un des angles E de la baſe, je mene aux autres angles des droites EB, EC : ce qui diviſe cette baſe en trois triangles. Je conçois que ſur ces droites EB, EC, ſoient élevés des plans perpendiculaires à la baſe, qui diviſeront le priſme tronqué en trois priſmes triangulaires tronqués. Ainſi meſurant chacun de ces priſmes en particulier, leur ſomme me donnera le priſme total. Au reſte, on trouve beaucoup plus aiſément la valeur des priſmes tronqués, par le moyen du centre de gravité de la baſe ; ainſi qu'on verra dans le troiſieme livre. Et je n'ai parlé ici du priſme triangulaire tronqué, que pour faciliter le problême ſuivant, qui concerne la meſure des revêtemens ou murailles des places de guerre.

509. Problême. *Meſurer le revêtement d'une place de guerre.* (fig. 335.)

Solution. Tout le monde ſait que les murailles des places de guerre ont un talud ; c'eſt-à-dire, qu'elles ont plus d'épaiſſeur en bas qu'en haut, & c'eſt préciſément en cela que conſiſte la difficulté de les meſurer. Or, entre toutes les méthodes qu'on a données pour y parvenir, voici celle qui me paroît la plus ſimple & la plus commode, quoiqu'elle ſoit la moins uſitée ; peut-être parce qu'elle eſt la moins connue, ou parce qu'on a de la peine à ſe détacher des

routes ordinaires : on en jugera aiſément, ſi on veut bien la comparer aux pratiques qu'on ſuit communément.

I°. Soit donc le ſolide de la figure 335, qui repréſente un demi-baſtion & une partie de la courtine. Je meſure d'abord la longueur & la largeur de la muraille au ſommet : & comme ces deux dimenſions forment les trapézoïdes ABCD, DCEF, FEHI, qui ont tous la hauteur commune RT ; j'ajoute enſemble leurs longueurs moyennes SV, VX, XZ ; & multipliant la ſomme par la hauteur RT, le produit eſt la valeur des trois trapézoïdes. Je multiplie ce produit par la hauteur A*a* de la muraille ; & j'ai la valeur d'une muraille ſans talud, dont la baſe eſt compoſée de trois trapézoïdes *a*MN*b*, *b*NO*c*, O*cd*L égaux chacun à chacun aux trois trapézoïdes ſupérieurs.

II°. Maintenant pour meſurer le talud, je conſidere qu'il eſt compoſé de trois priſmes triangulaires tronqués M*e*BDN*f*, DN*fg*OF, *g*OFI*h*L. C'eſt pourquoi, je coupe l'un d'eux par un plan *rsi*, perpendiculaire ſur ſes trois longueurs : & comme cette coupe eſt la même dans les trois priſmes, j'ajoute enſemble leurs trois longueurs BDFI, MNOL, *efgh* ; & prenant le tiers de cette ſomme, je le multiplie par le plan *rsi* : ce qui me donne tout d'un coup le talud, lequel étant ajouté à la muraille ſans talud, me donne le revêtement entier.

Il eſt aiſé de voir qu'on pourroit faire les mêmes opérations quand même le flanc ſeroit rond & qu'il ſeroit couvert d'une orillon.

SPHERE, CYLINDRE.

PROPOSITION CXV.

510. *La ſphere eſt égale au deux tiers d'un cylindre de même hauteur, & qui auroit pour baſe le cercle du diametre de la ſphere, c'eſt-à-dire le plus grand cercle de la ſphere.* (fig. 337.)

DÉMONSTRATION. Soit le quart de cercle ABC, qui en tournant autour de ſon rayon fixe BC, décrit une demi-ſphere ABL. Je décris le quarré ACBM, du rayon BM ; & je coupe ce quarré par la diagonale MC qui forme le triangle rectangle iſoſcele MBC. Je conçois que le rayon BC ſoit coupé en une infinité de petites parties égales entre elles ; & que des points de diviſion O, T, &c, ſoient menées des perpendiculaires OQ, TX, ſur ce rayon, & qui ſe terminent ſur AM : ces droites ſeront les élémens du quarré AMBC : leurs parties OR, TZ, &c, qui ſe terminent ſur la circonférence du quart de cercle, ſeront les élémens de ce quart de cercle ; & les parties OS, TV,

TV, &c, qui ſe terminent ſur la diagonale MC, ſeront les élémens du triangle rectangle iſoſcele MBC. De façon que chaque élément OS, &c, de ce triangle, ſera égal à ſa diſtance OC, &c, du centre C: car les triangles ſemblables MBC, SOC, donnent MB. BC :: SO. OC. Mais MB = BC : donc SO = OC : & il eſt aiſé de voir que chaque élément OQ, TX, &c, du quarré ACBM, ſera égal au rayon BC. Cela poſé,

Si l'on conçoit que le quarré ACBM, le quart de cercle ABC, & le triangle MBC, tournent autour du rayon immobile BC; les élémens du quarré ACBM décriront des cercles tous égaux, qui formeront un cylindre AMHL : les élémens du quart de cercle décriront des cercles qui formeront une demi-ſphere ABL, & dont le plus grand ſera celui que le rayon AC décrira; lequel à cauſe de cela, ſe nomme le grand cercle de la ſphere : & les élémens du triangle MBC décriront des cercles qui formeront un cône MCH.

Or, ces cercles étant entre eux comme les quarrés de leurs rayons, mettons pour un moment les quarrés au lieu des cercles; & à cauſe de la propriété du cercle, nous aurons $\overline{OR} = \overline{BC} - \overline{OC}$ (284). Mais BC = OQ, & OC = OS : donc $\overline{OR} = \overline{OQ} - \overline{OS}$. Par la même raiſon, nous aurons $\overline{TZ} = \overline{TX} - \overline{TV}$, & ainſi des autres : c'eſt-à-dire que les quarrés des élémens du quart de cercle ſont égaux aux quarrés des élémens du quarré ACBM, moins les quarrés des élémens du triangle MBC. Donc en remettant les cercles au lieu des quarrés, nous aurons : les cercles décrits par les élémens du quart de cercle, ou la demi-ſphere ABL, eſt égale aux cercles décrits par les élémens du quarré ACBM, ou au cylindre AMHL, moins les cercles décrits par les élémens du triangle MBC, ou moins le cône MBC. Mais le cône MBC étant une pyramide d'une infinité de côtés, eſt le tiers du cylindre AMHL qui eſt un priſme d'une infinité de côtés de même hauteur & de même baſe que le cône : donc la demi-ſphere ABC eſt égale aux deux tiers du cylindre AMHL.

On prouvera de la même façon que la demi-ſphere AKL eſt égale aux deux tiers du cylindre APEL; & que par conſéquent la ſphere entiere eſt égale aux deux tiers du cylindre MPEH. Ce qu'il falloit démontrer.

511. COROLLAIRE I. *Tous les cercles élémentaires qui compoſent une ſphere* ABCD, *ſont au plus grand cercle* AC. *multiplié par le nombre qui exprime leur multitude, c'eſt-à-dire par le diametre* BD, *comme* 2 *eſt à* 3. (fig. 336.)

Démonstration. Le grand cercle AC, multiplié par BD, forme le cylindre MNOP. Or, la ſphere, ou la ſomme de ces cercles élémentaires, eſt les deux tiers du cylindre : donc la ſomme des cercles élémentaires, eſt au plus grand AC multiplié par BD, comme 2 eſt à 3. De ce qu'on vient d'établir & de démontrer, réſultent les vérités ſuivantes, (*fig.* 338.)

512. Corollaire II. I°. *Un ſegment* ABC *de ſphere, eſt égal à la portion* MPSR *du cylindre circonſcrit, laquelle a même hauteur que le ſegment, moins le cône tronqué* MHLP, *de même hauteur.*

II°. *La zone* QEFY, *qui a pour baſe le grand cercle, eſt égale à la portion cylindrique* QTVY *de même hauteur, moins le cône* XOZ *de même hauteur.*

III°. *La zone* EACF *eſt égale à la portion cylindrique* TRSV *de même hauteur, moins le cône tronqué* HXZL *de même hauteur.*

IV°. *La zone* aEFb *eſt égale à la portion cylindrique* mTVn *de même hauteur, moins le cône* XZO, *moins encore le cône* cOD.

V°. *Le ſecteur* ABCO *eſt égal au ſegment* ABC, *plus le cône* AOC.

Tout cela eſt évident par la propoſition précédente : mais on verra dans la ſuite que toutes ces portions de ſphere peuvent ſe meſurer par le moyen de leurs ſurfaces, beaucoup plus aiſément.

ONGLETS CYLINDRIQUES.

513. Définition. Si l'on coupe un cylindre ABCD, par un plan incliné MXN qui coupe ſa baſe en dedans ; la portion cylindrique MXNA coupée par ce plan ſe nomme *onglet cylindrique.* (fig 339).

I°. Si le plan coupant MXN paſſe par le centre O de la baſe ; l'onglet MXNA ſe nommera *onglet cylindrique de la premiere eſpece.*

II°. Si le plan coupant PZQ ou RTS ne paſſe pas par le centre O de la baſe ; l'onglet PZQA ou RTSA ſe nommera *onglet cylindrique de la ſeconde eſpece.*

Proposition CXVI.

Tout onglet cylindrique de la premiere eſpece, eſt compoſé d'une infinité de triangles rectangles qui ſont entre eux comme les cercles élémentaires d'une ſphere. (fig. 340.)

Démonstration. Soit l'onglet de la premiere eſpece ABCD : ſa baſe ADC eſt donc un demi-cercle ; puiſque le plan incliné ABC paſſe par le centre O de la baſe du cylindre dans lequel cet onglet eſt coupé ; & que par conſéquent la commune ſection AC du plan

incliné & de la baſe, eſt un diametre. Cela poſé,

Concevons quedans la baſe ou le demi-cercle ADC ſoient menées des lignes droites LP, RS, OD, &c, infiniment proches & perpendiculaires ſur le diametre AC; & que ſur chacune de ces lignes ſoient élevés des plans LQP, RTS, &c, perpendiculaires ſur la baſe ADC de l'onglet, & qui coupent l'onglet.

I°. Tous ces plans coupans, ſeront des triangles rectangles LPQ, RST, MKZ: la commune ſection de chacun d'eux & de la baſe ADC ſera une ligne droite (477), de même que la commune ſection de chacun d'eux & du plan ABC. Or comme la ſurface d'un onglet ABCD, ou du cylindre dans lequel il eſt coupé, n'eſt autre choſe qu'une ſuite de lignes droites élevées perpendiculairement ſur tous les points de la circonférence ADC de la baſe; il eſt clair que chaque plan coupant tel que LPQ, perpendiculaire ſur la baſe ADC, ne peut couper la ſurface de l'onglet que par une de ſes perpendiculaires PQ: & que par conſéquent ce plan LPQ doit être un triangle rectangle; à cauſe que QP étant perpendiculaire ſur la baſe ADC, doit l'être auſſi ſur LP qui eſt dans cette baſe, & qui paſſe par le point P. (463.)

II°. Les plans coupans ou triangles rectangles LPQ, RST, MKZ, & ainſi des autres, qui couperont l'onglet, ſeront ſemblables: car à cauſe qu'ils ſont paralleles entre eux, les droites QL, ZK, TR, dans leſquelles ils couperont le plan incliné ABC, ſeront paralleles (482); de même que les droites LP, RS, dans leſquelles ces mêmes triangles coupent la baſe ADC de l'onglet. Ainſi les angles aigus QLP, TRS, &c, de ces triangles, ayant leurs côtés paralleles chacun à chacun ſeront égaux (479); & par conſéquent tous les triangles rectangles QLP, TRS, &c, ſeront ſemblables entre eux.

Or, les triangles ſemblables ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues: donc tous les triangles rectangles QLP, TRP, &c, qui couperont l'onglet, ſont entre eux comme les quarrés de leurs baſes LP, RS, &c; ou comme les cercles que ces baſes décriroient en tournant autour du diametre AC. Or, tous ces cercles compoſeroient une ſphere: donc, &c. C. Q. F. D.

514. Corollaire I. *De tous les triangles rectangles qui compoſent un onglet; le plus grand eſt le triangle* ODB *qui paſſe par le centre* O *de la baſe du cylindre, & les autres ſont égaux deux à deux.* (fig. 349, 340.)

Démonstration. Les triangles qui compoſent l'onglet, ſont

entre eux comme les quarrés de leurs baſes LP, RS, &c. Or, ces baſes étant les élémens du demi-cercle ADC; la plus grande eſt le rayon OD; donc le plus grand triangle eſt le triangle ODB. De même les baſes RS, MN également éloignées de la baſe OD, ſont égales; à cauſe qu'elles ſont les moitiés des cordes SV, NE également éloignées du centre O : donc les triangles RST, MNZ ſont égaux; & ainſi des autres.

515. COROLLAIRE II. *Tout onglet de la premiere eſpece, eſt égal au produit de ſon plus grand triangle* OBD *multiplié par les deux tiers du diametre* AC *de ſa baſe.* (fig. 340.)

DÉMONSTRATION. Tous les triangles qui compoſent un onglet de la premiere eſpece, ſont entre eux comme les cercles que décriroient leurs baſes en tournant autour du diametre AC de la baſe. Or, ces cercles compoſeroient une ſphere, & ſeroient par conſéquent égaux au plus grand multiplié par les deux tiers du diametre AC : donc tous les triangles qui compoſent l'onglet, ſont égaux au plus grand triangle ABD multiplié par les deux tiers du diametre AC.

516. COROLLAIRE III. *La hauteur d'un onglet de la premiere eſpece, eſt égale à la hauteur du plus grand triangle.* (fig. 340.)

DÉMONSTRATION. Tous les triangles LPQ, RST, ODB, &c, qui compoſent l'onglet, étant ſemblables; leurs baſes LP, RS, OD, &c, ſont entre elles comme leurs hauteurs PQ, ST, DB, &c. Or, la baſe OD du plus grand triangle ODB, eſt la *plus grande : donc* ſa hauteur DB eſt la plus grande auſſi; & par conſéquent elle eſt la hauteur de l'onglet.

517. COROLLAIRE IV. *Les onglets de la premiere eſpece, qui ont leurs hauteurs égales & les baſes auſſi, ſont égaux; ceux qui ont les hauteurs inégales & les baſes égales, ſont entre eux comme leurs hauteurs : ceux qui ont les baſes inégales & les hauteurs égales, ſont entre eux comme leurs baſes; & ceux qui ont les baſes réciproques aux hauteurs, ſont égaux.*

DÉMONSTRATION. I°. Soient les deux onglets ABCD, AECF (*fig.* 341), dont les baſes ſont égales & les hauteurs auſſi. Les grands triangles BDO, EOF, de ces deux onglets ſont égaux; car la baſe DO eſt égale à la baſe OF, l'une & l'autre étant rayons de cercles égaux : la hauteur DB eſt égale à la hauteur FE, par la ſuppoſition. Or, l'un & l'autre onglet eſt le produit de ſon grand triangle multiplié par les deux tiers du diametre AC, qui eſt ici le même : donc les deux onglets ſont égaux.

II°. Maintenant, ſuppoſons que les deux onglets ABCD, *abcd*

(*fig.* 342.), aient leurs baſes ADC, *adc*, égales; & leurs hauteurs DB, *db*, inégales. Leurs grands triangles ODB, *odb*, ayant leurs baſes OD, *od*, égales; à cauſe qu'elles ſont rayons de cercles égaux, ſont entre eux comme leurs hauteurs BD, *bd*. Ainſi les onglets étant entre eux comme leurs grands triangles multipliés par les deux tiers des diametres AC, *ac*, de leurs baſes qui ſont égaux, ſeront entre eux comme les droites ou les hauteurs BD, *bd*.

III°. De même ſi les baſes ADC, *adc*, ſont inégales, & les hauteurs BD, *bd*, égales; les grands triangles OBD, *obd*, ſont entre eux comme leurs baſes OD, *od*. Ainſi les onglets étant entre eux comme les grands triangles multipliés par les deux tiers des diametres AC, *ac*, ſont entre eux comme OD × $\frac{2}{3}$ AC, *od* × $\frac{2}{3}$ *ac*. Mais les deux produits OD × AC, *od* × *ac*, qui ſont les moitiés des quarrés des diametres AC, *ac*, leſquelles moitiés ſont entre elles comme les quarrés de ces diametres, de même que les tiers de ces moitiés, & les baſes ADC, *adc*, ſont auſſi entre elles comme les quarrés de ces diametres: donc les onglets ſont entre eux comme leurs baſes ADC, *adc*.

IV°. Enfin ſi les baſes ADC, *adc*, ſont réciproques aux hauteurs DB, *db*; les onglets ſeront entre eux comme $\frac{1}{2}$ OD × DB × $\frac{2}{3}$ AC, $\frac{1}{2}$ *od* × *db* × $\frac{2}{3}$ *ac*; ou comme OD × DB × AC, *od* × *db* × *ac*. Or, les baſes ADC, *adc*, ſont entre elles comme OD × AC, *od* × *ac*, qui ſont les moitiés de quarrés de leurs diametres: donc les onglets ſeront entre eux comme ADC × DB, *adc* × *db*. Mais par la ſuppoſition, nous avons ADC. *adc* :: *db*. DB: donc en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous aurons ADC × CB = *adc* × *db*; & par conſéquent les deux onglets ſont égaux.

518. COROLLAIRE V. *Tout onglet cylindrique de la premiere eſpece, eſt à la ſphere que ſa baſe décriroit en tournant autour de ſon diametre* AC; *comme ſa hauteur eſt à la circonférence du grand cercle.* (fig. 340.)

DÉMONSTRATION. Si la hauteur DB du plus grand triangle OBD, eſt égale à la circonférence du grand cercle de la ſphere; ce triangle eſt égal au cercle (378): ainſi l'onglet étant le produit de ce triangle par les deux tiers du diametre, & la ſphere étant le produit du grand cercle égal au grand triangle, par les deux tiers du même diametre; l'onglet & la ſphere ſeront égaux. Mais ſi la hauteur DB du plus grand triangle OBD, eſt plus ou moins grande que la circonférence du grand cercle de la ſphere; ce grand triangle ne différera du triangle égal au grand cercle, que par la hauteur; & par conſéquent il ſera au grand cercle, comme la hauteur DB à la circonférence.

Ainſi l'onglet & la ſphere ſeront entre eux, comme la hauteur DB multipliée par les deux tiers de AC, eſt à la circonférence du grand cercle multipliée auſſi par les deux tiers de AC, & par conſéquent, comme la hauter DB eſt à la circonférence du grand cercle.

519. COROLLAIRE VI. *Si un onglet de la premiere eſpece eſt coupé par un plan* RST *perpendiculaire ſur la baſe* APC, *& ſur le plan incliné* ABC; *les parties coupées* ATSR, RSTBC, *ſeront entre elles comme les ſegmens correſpondans de la ſphere* VAS, VCS. C'eſt une ſuite évidente du corollaire précédent. (*fig.* 340.)

520. PROBLÊME I. *Un onglet cylindrique de la premiere eſpece étant coupé par un ou pluſieurs plans perpendiculaires ſur la baſe, mais qui ne ſont pas perpendiculaires ſur le plan incliné; trouver la ſolidité des différentes portions de cet onglet.* (fig. 342.)

SOLUTION. Soit l'onglet ABCD coupé par le plan HMNR perpendiculaire ſur la baſe ADC, & parallele au diametre AC. Ce plan coupe ſur la baſe ADC, une baſe ANRC; & je dis que la portion d'onglet ANHMRC coupée par ce plan, eſt à l'onglet, comme le ſolide décrit par la bande ANRC en tournant autour du diametre AC, eſt à la ſphere décrite par la baſe ADC, en tournant autour de AC : ce que je prouve ainſi.

Le plan HMNR étant perpendiculaire ſur la baſe ADC, eſt parallele à toutes les hauteurs des triangles qui compoſent l'onglet; à cauſe que ces hauteurs ſont auſſi perpendiculaires ſur la même baſe ADC : d'où il ſuit que ce plan coupe les triangles par des lignes paralleles à leurs hauteurs; & que les triangles qui compoſent la portion ANHMRC, ſont ſemblables entre eux & aux triangles qui compoſent l'onglet; & ſont par conſéquent comme les quarrés de de leurs baſes OZ, *ab*, &c; c'eſt-à-dire comme les quarrés des élémens de la bande ANCR de la baſe ADC, ou comme les cercles que ces élémens décrivent en tournant autour de AC. Ainſi puiſque chaque triangle OXZ de la portion ANHMRC, eſt à chaque triangle OBD de l'onglet, comme le cercle décrit par la baſe OZ, eſt au cercle décrit par la baſe OD; il eſt facile de conclure que tous les triangles qui compoſent la portion ANHMRC; c'eſt-à-dire la portion ANHMRC, eſt à tous les triangles qui compoſent l'onglet ou à l'onglet, comme tous les cercles des élémens de la bande ANRC ou le ſolide que cette bande décrit en tournant autour de AC, eſt à tous les cercles des élémens de la baſe ADR de l'onglet ou à la ſphere.

On prouvera de la même façon que la portion ANHMRC (*fig.*

343), coupée par un plan HNRM perpendiculaire à la baſe ADC de l'onglet, mais non parallele au diametre AC, eſt à l'onglet; comme le ſolide décrit par la portion ANRC de la baſe qui tourneroit autour de AC, eſt à la ſphere que la baſe ADC décriroit.

La portion ANHMRC étant connue; il eſt clair que ſi on la retranche de l'onglet, le reſte ſera l'autre portion NHBMRD.

521. COROLLAIRE VII. *Toute portion* ANHMRC *d'un onglet de la premiere eſpece* ABCD, *coupée par un plan* HNRM *perpendiculaire ſur la baſe* ADC, *eſt au ſolide décrit par la portion* ANRC *qui tourneroit autour du diametre* AC, *comme la hauteur* DB *de l'onglet; eſt à la circonférence du grand cercle de la ſphere..* (fig. 342, 343.)

DÉMONSTRATION. L'onglet eſt à la ſphere que ſa baſe décrit, comme la hauteur DB de ſon grand triangle, eſt à la circonférence du grand cercle de la ſphere (518). Mais l'onglet eſt à la ſphere, comme la portion ANHMRC eſt au ſolide décrit par la portion ANRC de la baſe ADC qui tourneroit autour du diametre AC (520); & par conſéquent la portion ANHMCR eſt à ce ſolide, comme la hauteur AB de l'onglet eſt à la circonférence du grand cercle.

522. PROBLÊME II. *Trouver la ſolidité d'un onglet de la ſeconde eſpece.* (fig. 344.)

SOLUTION. I°. Soit l'onglet ABCD, dont la baſe ADC eſt moindre qu'un demi-cercle. Il eſt certain que cet onglet ſera encore compoſé d'une infinité de triangles rectangles ſemblables, paralleles entre eux, & perpendiculaires ſur la baſe ADC, & ſur le plan incliné ABC. Ainſi ces triangles ſeront encore entre eux comme les quarrés de leurs baſes, ou comme les cercles que ces baſes décriroient; & par conſéquent l'onglet eſt au ſolide que ſa baſe ADC décrit en tournant autour de AC, comme la hauteur BD de ſon grand triangle, eſt à la circonférence du grand cercle du ſolide décrit par la baſe DO de ce triangle. Mais comme nous ne connoiſſons pas le ſolide que décrit la baſe ADC en tournant autour de AC, nous ne pouvons pas non plus connoître l'onglet, à moins que nous n'ayions recours à la méthode des centres de gravité, dont nous parlerons dans la ſuite. Or, en attendant, voici comme on peut faire:

Je prolonge le plan incliné ABC juſqu'à ce qu'il coupe l'axe LM du cylindre en un point R. Je coupe le cylindre & le plan incliné par un plan XSVT qui paſſe par le point R, & qui ſoit parallele à la baſe du cylindre, & ce plan eſt un cercle qui eſt coupé au centre par

le plan incliné SBT. Ainſi l'onglet SBTX eſt un onglet de la premiere eſpece; & par conſéquent retranchant de cet onglet la partie SXTCDA, le reſte ſera l'onglet de la ſeconde eſpece ABCD.

Je coupe l'onglet SBTX par un plan ACZQ perpendiculaire ſur la baſe SXT; & la portion ACZQST eſt au ſolide que ſa baſe ZQST décriroit en tournant autour de ST, comme l'onglet SBTX eſt à la ſphere que ſa baſe décriroit (520). Ainſi je puis connoître la partie ACZQST, & la retrancher de l'onglet SBTX : ce qui me donnera un reſte QXZCBA. Retranchant donc de ce reſte, la portion cylyndrique QXZCAD qui eſt égale au produit de ſa baſe QXZ par ſa hauteur XD; le reſte ſera la ſolidité de l'onglet ABCD.

II°. Soit l'onglet ABCD de la ſeconde eſpece (*fig.* 345), dont la baſe ADC eſt plus grande qu'un demi-cercle. Par le point O où ſon plan incliné ABC coupe l'axe, je fais paſſer un plan GEHF parallele à la baſe du cylindre; & par conſéquent j'ai un onglet EBFG de la premiere eſpece, que je puis aiſément connoître, & il faut ajouter à cet onglet la portion EGFCARDS. Or, la partie RDSFGE de cette portion, eſt facile à connoître, puiſqu'elle eſt le produit de ſa baſe RDS multipliée par ſa hauteur DG : il ne me reſte donc plus qu'à trouver l'autre partie REFSCA.

Pour cela, je prolonge le plan incliné juſqu'à ce qu'il coupe le côté oppoſé du cylindre en N : ce qui me donne un onglet renverſé de la premiere eſpece ENFH, qui eſt égal à l'onglet EBFG; à cauſe que les baſes de ces onglets ſont égales, & que l'inclinaiſon de leurs plans eſt la même. Je coupe l'onglet ENFH, par un plan AVTC perpendiculaire ſur la baſe; & ſa portion AVTCFE peut ſe connoître aiſément (520). Or, la portion cylindrique RACSFEVT étant le produit de ſa baſe RSCA par ſa hauteur RE, eſt connue : retranchant donc de cette portion, la partie AVTCFE, le reſte ſera la ſolidité de l'autre partie AREFSC : ainſi la ſolidité de l'onglet ABCD ſera connue.

CYLINDRE TRONQUÉ.

523. PROBLÊME I. *Trouver la ſolidité d'un cylindre* ABPDH, *tronqué par un plan incliné* DPHB *qui paſſe par l'extrémité* B *de la baſe.* (fig 346.)

SOLUTION. Je multiplie la baſe AB du cylindre tronqué, par la moitié de ſa hauteur; & le produit eſt la ſolidité demandée.

Car ſi par le point O où le plan incliné coupe l'axe RS, je fais paſſer un plan MDNH parallele à la baſe du cylindre; ce plan ſera un cercle coupé en deux parties égales par le plan incliné qui paſſe par ſon centre.

centre. Ainſi nous aurons deux onglets de la premiere eſpece PDHM, DBHN, qui ſeront égaux entre eux : à cauſe qu'ils ont les baſes égales ; & que les plans inclinés faiſant des angles égaux ſur les baſes, forment des hauteurs égales MP, NB. C'eſt pourquoi ajoutant à chacun de ces onglets, la portion cylindrique ABDHM ; nous aurons le cylindre AMNB, égal au cylindre tronqué ABDPH. Or, le cylindre AMNP a pour hauteur la droite AM qui eſt la moitié de la droite AP : donc, &c.

524. PROBLÊME II. *Trouver la ſolidité d'un cylindre* ABCD, *tronqué par un plan incliné* DC *qui coupe les deux côtés* DA, CB, *du cylindre.* (fig. 347.)

SOLUTION. Je prends la moitié MX de la différence DX de la plus grande hauteur DA du cylindre tronqué, à la moindre hauteur CB : j'ajoute cette différence à la moindre hauteur CB ou AX, ce qui donne la droite AM ; & multipliant la baſe AB du cylindre par AM, le produit eſt la ſolidité demandée.

Car ſi par le point O où le plan incliné coupe l'axe, je fais paſſer le cercle MN qui ſera coupé en deux également par ce plan ; j'aurai deux onglets de la premiere eſpece égaux PDHM, PCHN : & ajoutant à chacun d'eux la partie commune ABCHMP, j'aurai le cylindre ABNM égal au cylindre tronqué ABCD. Or, le cylindre ABNM a pour hauteur la droite AM : donc, &c.

PROPOSITION CXVII.

525. *Si un cercle* ABCD *tourne autour d'une tangente* HP *parallele à l'un de ſes diametres* BD ; *le ſolide qu'il aura décrit après ſa révolution entiere, ſera égal à un cylindre qui a pour baſe le cercle* ABCD, *& pour hauteur une ligne droite égale à ſa circonférence.* (fig. 348 & 349.)

DÉMONSTRATION. I°. Suppoſons que le cercle ABCD de la figure 349, ſoit égal au cercle ABCD de la figure 348. Je conçois que le diametre DB, parallele à la tangente PH, ſoit coupé en une infinité de parties égales ; & que de tous les points ſoient menées des perpendiculaires à la tangente PH, leſquelles aillent aboutir à la circonférence en A, S, &c. Quand le cercle tournera autour de PH, le diametre AC perpendiculaire à la tangente PH décrira un cercle : mais les autres élémens SV, &c, du cercle ABCD, décriront des couronnes. Car ST décrira un cercle, & ſa partie VT en décrira un autre, ainſi ce que SV décrira, ſera le cercle décrit par ST, moins le cercle décrit par VT, c'eſt-à-dire une couronne, & ainſi des autres élémens.

Enfin les extrêmités D, B, du diametre DB, parallele à la tangente BH, décriront des circonférences; & il eſt clair que le ſolide décrit par le cercle ABCD autour de cette tangente, ne ſera pas différent de la ſomme du cercle décrit par le diametre, des couronnes décrites par les autres élémens, & des circonférences décrites par les points D, B.

II°. Maintenant ſur l'extrêmité A du diametre AC, j'éleve une droite AR perpendiculaire ſur le plan du cercle ABCD; & faiſant cette droite égale à la circonférence que le diametre AC décriroit en tournant autour de PH, je mene la droite RC: ce qui me donne un triangle CAR, égal au cercle que le diametre AC décriroit autour de PH (378.) De même ſi ſur l'extrêmité de la droite ST, j'éleve une droite SZ, perpendiculaire au cercle, & par conſéquent parallele à AR; & que je faſſe SZ égale à la circonférence que ST décriroit autour de PH, le triangle TSZ que je formerai en menant ZT, ſera égal au cercle décrit par ST autour de PH: & menant dans ce triangle la droite VX, parallele à la droite SZ; le triangle TVX, ſemblable au triangle TSZ, ſera égal au cercle que TV décriroit autour de PH: car nous aurons ST. SZ :: TV. VX. Mais SZ eſt la circonférence du rayon ST: donc VX ſera la circonférence du rayon TV, & par conſéquent TVX ſera égal au cercle du rayon TV: ainſi le trapézoïde SZXV ſera égal à la couronne que décriroit SV en tournant autour de PH.

Faiſant donc la même choſe à l'égard des autres *élémens du cercle*, ainſi que la figure le fait voir; & élevant ſur les points D, B des perpendiculaires égales aux circonférences que ces points décriroïent autour de PH; le triangle ARC, joint aux trapézoïdes faits ſur les élémens du cercle, & aux deux perpendiculaires élevées ſur les points D, B, ſera égal au cercle que décriroit AC, joint aux couronnes que les élémens décriroient, & aux circonférences que décriroient les points D, B.

III°. Or, le ſolide compoſé par le triangle ARC, & par les trapézoïdes faits ſur les élémens du cercle joints aux droites ſur les points D, B, forme un cylindre tronqué qui a pour baſe le cercle ABCD, & qui a pour hauteur la droite AR égale à la circonférence que décriroit le diametre AC autour de PH. Car les triangles CAR, TSZ, TVX, &c, étant tous rectangles & ſemblables; les angles qu'ils forment ſur PH ſont égaux: par conſéquent leurs hypothénuſes, étant paralleles entre elles, forment un plan incliné; & leurs hauteurs AR, SZ, VX, &c, forment la ſurface d'un cylindre tronqué par ce plan: donc le ſolide compris ſous toutes ces lignes,

eſt un cylindre tronqué par un plan incliné qui paſſe par l'extrêmité de ſa baſe.

IV°. Suppoſant donc que ce cylindre ſoit repréſenté par la figure 350; ſa ſolidité eſt égale à ſa baſe multipliée par la moitié AM de ſa hauteur AR (523). Mais AR étant la circonférence du diametre; ſa moitié AM eſt la circonférence du rayon CO moitié du diametre, c'eſt-à-dire la circonférence de la baſe: donc le cylindre tronqué ACR, & par conſéquent le ſolide que décriroit la baſe AC autour de PH, eſt égal à la baſe AC multipliée par ſa circonférence. C. Q. F. D.

ANNEAU FERMÉ.

526. DÉFINITION. Lorſqu'un cercle ABCD (*fig.* 348), tourne autour d'une tangente PH; le ſolide qu'il décrit ſe nomme *anneau fermé*: parce que le vuide BHCSD qui ſe trouve au milieu, n'eſt point percé à jour. La partie de ce ſolide décrite par le demi-cercle BCD, ſe nomme *partie intérieure*; & la partie décrite par le demi-cercle BAD, ſe nomme *partie extérieure*; le cercle ABCD ſe nomme *cercle générateur* de l'anneau.

527. COROLLAIRE. I. *La partie extérieure d'un anneau, eſt égale à la moitié du cylindre qui a pour baſe le cercle générateur de l'anneau, & pour hauteur la circonférence, plus une ſphere qui auroit pour grand cercle le cercle générateur.* (fig. 350.)

DÉMONSTRATION. Le cercle AC, en tournant autour de PH, produit un anneau fermé égal au cylindre tronqué ACR: or, tous les points du diametre DB du demi-cercle DCB, étant également éloignés de PH, produiſent en tournant autour de PH des circonférences toutes égales à la circonférence du rayon CO, & par conſéquent à la droite AM ou DS: élevant donc ſur tous les points de ce diametre, des droites égales à DS, & perpendiculaires ſur le cercle AC; elles formeront un rectangle DSNB, & le ſolide DSNBC ſera égal à la partie intérieure de l'anneau: donc le ſolide DABRNS ſera égal à la partie extérieure de l'anneau. Mais ce ſolide eſt compoſé de la partie DABNMS, égale à la moitié du cylindre AT, qui a pour baſe le cercle générateur, & pour hauteur la circonférence de cette baſe; & d'un onglet SMNR, qui a pour baſe le demi-cercle SMN égal au demi-cercle de la baſe AC, & pour hauteur la droite MR, lequel onglet eſt égal à la ſphere que décriroit ſa baſe en tournant autour de ſon diametre (518): donc, &c.

528. COROLLAIRE II. *La partie intérieure d'un anneau fermé eſt égale à la moitié du cylindre qui auroit pour baſe le cercle générateur, & pour hauteur la circonférence, moins une ſphere dont le grand cercle ſeroit le cercle générateur.* (fig. 350.)

DÉMONSTRATION. La partie intérieure eſt égale au ſolide DSN-BC, c'eſt-à-dire au demi-cylindre DCBNTS, moins l'onglet renverſé SNTC égal à l'onglet SMNR. Donc, &c.

529. PROBLÊME I. *Trouver le vuide* BRCSD, *que laiſſe le cercle* ABCD *en tournant autour de ſa tangente* PH. (fig. 348.)

SOLUTION Des extrêmités B, D, du diametre BD, je mene les droites BO, DX, perpendiculaires ſur la tangente PH: ce qui forme un rectangle BOXD, lequel en tournant autour de PH, produit un cylindre BRSD; tandis que le demi-cercle inſcrit dans ce rectangle produit la partie intérieure de l'anneau. Retranchant donc du cylindre BRSD, la partie intérieure de l'anneau; le reſte ſera le vuide demandé BRCSD.

Remarquez que la moitié de ce vuide, c'eſt-à-dire la partie DCS, eſt un cône curviligne, dont le côté DC eſt un quart de circonférence de cercle; & que par conſéquent on peut meſurer ces ſortes de cônes, de même que les pyramides curvilignes dont les arêtes ſont des quarts de circonférences qui tournent leur convexité vers l'axe, ainſi qu'on va voir dans le problême ſuivant.

530. PROBLÊME II. *Trouver la ſolidité d'une pyramide* ABCDE, *dont les arêtes* AE, BE, &c, *ſont des quarts de circonférence de cercle qui tournent leur convexité vers l'axe* OE. (fig. 351.)

SOLUTION. Je circonſcris à la baſe de la pyramide, un cercle DABC: ce que je puis toujours faire, parce qu'il faut que les lignes AO, DO, OB, OC, menées des angles de la baſe au centre O, ſoient toujours égales entre elles, & à la hauteur OE; ſi l'on veut que les arêtes AE, BE, ſoient des quarts de circonférence: & je conçois un cône qui auroit pour baſe le cercle ABCD, & dont le côté ſeroit l'arête AE; & ce cône m'eſt connu par le problême précédent.

Je conçois auſſi que le cône & la pyramide ſoient *coupés* par une infinité de plans paralleles à leurs baſes, leſquels plans ſeront dans le cône des cercles, tels que le cercle LFGH; & dans la pyramide, des plans LFGH ſemblables à la baſe, à cauſe que leurs côtés & leurs diagonales ſont paralleles à celles de la baſe, ce qui fait que ces plans LFGH, &c, ſont ſemblablement inſcrits dans les

cercles LFGH, &c. Ainſi chaque plan LFGH de la pyramide, ſera au cercle correſpondant LFGH du cône; comme la baſe ABCD de la pyramide, eſt au cercle ABCD qui eſt la baſe du cône: & par conſéquent la pyramide eſt au cône, comme la baſe ABCD eſt au cercle ABCD. Je dis donc par regle de trois : comme le cercle ABCD eſt à la baſe ABCD; ainſi le cône eſt à un quatrieme terme qui ſera la pyramide cherchée.

ANNEAU OUVERT.

DÉFINITION. Si un cercle ABCD (*fig.* 352) tourne autour d'une droite PH perpendiculaire ſur le diametre AC prolongé en O, & parallele au diametre BD; le ſolide décrit après la circonvolution, ſe nomme *anneau ouvert :* parce qu'il laiſſe autour de PH un creux BCDSQR percé à jour. La partie de ce ſolide décrite par le demi-cercle BCD, ſe nomme *partie intérieure de l'anneau;* & la partie décrite par le demi-cercle BAD, ſe nomme *partie extérieure :* le cercle ABCD eſt le cercle générateur.

PROPOSITION CXVIII.

531. *La ſolidité d'un anneau ouvert, eſt égale à un cylindre qui auroit pour baſe le cercle générateur* ABCD, *& pour hauteur une ligne égale à la circonférence que décrit ſon centre* X *autour de* PH. (fig. 352 & 353.)

DÉMONSTRATION I°. Je conçois que le cercle ſoit diviſé en ſes élémens paralleles au diametre, leſquels ſoient prolongés juſqu'à PH. (*fig.* 353). Quand le cercle tournera, la ligne AO décrira un cercle autour de PH; & ſa partie OC en décrira un autre : & par conſéquent le diametre AC décrira une couronne, c'eſt-à-dire le cercle du rayon AO, moins le cercle du rayon CO. Par la même raiſon les autres élémens, tels que SV, décriront auſſi des couronnes : & les extrêmités D, B, décriront des circonférences, leſquelles jointes aux couronnes des élémens, formeront enſemble l'anneau.

II°. Je conçois que ſur l'extrêmité A, ſoit élevée une droite AR perpendiculaire ſur le plan du cercle ABCD, & égale à la circonférence que ce point décriroit autour de PH; & menant la droite RO, le triangle ARO eſt égal au cercle que la droite AO décriroit autour de PH. De même élevant ſur le point C, une droite CL, perpendiculaire ſur le cercle, & égale à la circonférence que décriroit la droite CO; le triangle COL eſt égal au cercle que décriroit CO; & comme ce triangle eſt ſemblable au triangle AOR, ſon hypothénuſe LO eſt une portion de l'hypothénuſe OR; ainſi le trapézoïde RACL eſt égal à la couronne que

décriroit AC : & faiſant la même choſe ſur les autres élémens SV, &c, on aura autant de trapézoïdes SZKV, &c, égaux aux couronnes de l'anneau chacun à chacune. Enfin, élevant ſur les extrêmités D, B, du diametre, des droites égales aux circonférences qu'elles décriroient; ces deux droites, jointes aux trapézoïdes, ſeront égales à l'anneau.

III°. Or, toutes les hauteurs de ces trapézoïdes forment la ſurface d'un cylindre ; & les hypothénuſes RO, ZT, &c, forment un plan incliné qui coupe cette ſurface, & qui ne paſſe pas l'extrêmité de la baſe ABCD : donc toutes ces lignes renferment un cylindre tronqué par un plan incliné qui coupe ſes côtés oppoſés.

IV°. Suppoſant donc que ce cylindre ſoit repréſenté par la figure 354; ſa ſolidité eſt égale à ſa baſe AC multipliée par la hauteur AM égale à la moindre hauteur AF, plus la moitié MF de la différence RF des hauteurs RA, LC (524). Mais AM = XQ ; & à cauſe des triangles ſemblables RAO, QXO, nous avons OA. AR :: OX. XQ : donc AR étant égal à la circonférence de AX, nous aurons XQ égal à la circonférence de OX ; & par conſéquent l'anneau eſt égal au cylindre qui a pour baſe le cercle générateur, & pour hauteur une droite égale à la circonférence que ſon centre X décriroit autour de PH. Ce qu'il falloit démontrer.

532. COROLLAIRE I. *La partie intérieure de l'anneau eſt égale à la moitié du cylindre* AMNEC *égal à l'anneau, moins un onglet* SNLE *égal à la ſphere dont le grand cercle ſeroit le cercle générateur.* (fig. 354.)

DÉMONSTRATION. Tandis que le demi-cercle BCD tourneroit autour de PH, tous les points du diametre DB étant également éloignés de PH décriroient des circonférences égales à la droite XQ. Elevant donc ſur tous ces points, des perpendiculaires égales à XQ; nous aurons le parallélogramme DSNB ; & par conſéquent le ſolide DCBNLS eſt égal à la partie intérieure de l'anneau. Or, il manque à ce ſolide, pour être égal au demi-cylindre DCBNES, un onglet NSLE qui a pour baſe le demi-cercle NES égal au demi-cercle générateur, & pour hauteur la droite EL égale à la moitié de la différence RF des hauteurs RA, LC. Mais RA étant égal à la circonférence du rayon AO; & CL, égal à la circonférence du rayon CO; la différence RF doit être égale à la circonférence que décriroit le diametre AC qui eſt la différence des rayons AO, CO : donc la moitié MF, eſt égale à la circonférence de la moitié CX du diametre, c'eſt-à-dire à la circonférence ABCD, & par conſéquent l'onglet

SNEL, eſt égal à la ſphere qui auroit pour grand cercle, le cercle générateur (518). Donc, &c.

533. Corollaire II. *La partie extérieure de l'anneau ouvert eſt égale à la moitié du cylindre* AMNEC *qui auroit pour baſe le cercle générateur* AC, *plus un onglet* SMNR *égal à la ſphere dont le grand cercle ſeroit le cercle générateur*, (fig. 354.)

Démonstration. Par le corollaire précédent, la partie intérieure de l'anneau, eſt égale à la partie cylindrique DBCNSL : donc puiſque l'anneau entier eſt égal au cylindre tronqué ACLR, la partie extérieure doit être égale au reſte DABNSR. Mais ce reſte eſt compoſé du demi-cylindre DABNSM, plus de l'onglet SMNR égal à l'onglet SENL. Donc, &c.

534. Problême I. *Trouver la ſolidité du vuide* BCDSQR *d'un anneau ouvert*, (fig. 352.)

Solution. Des extrêmités D, B, du diametre DB, parallele à la droite HP ; je mene les droites BF, DZ, perpendiculaires ſur HP : ce qui forme un rectangle BFZD. Or, tandis que le cercle ABCD tourne autour de HP, ce rectangle décrit un cylindre BRSD ; & le demi-cercle BCD décrit la partie intérieure de l'anneau : retranchant donc du cylindre BRSD, la partie intérieure ; le reſte eſt la ſolidité du vuide BCDSQR.

Remarquez que la moitié de ce vuide, c'eſt-à-dire CDSQ, forme un cône tronqué parallelement à ſa baſe par le cercle que CO décrit, & dont le côté eſt un quart de circonférence de cercle CD qui tourne ſa convexité vers l'axe OP ; & que par conſéquent on peut meſurer ces ſortes de cônes, de même que les pyramides tronquées, par un plan parallele à leurs baſes, & qui ont pour arêtes des quarts de circonférences de cercle : comme on va voir dans le problême ſuivant.

535. Problême II. *Trouver la ſolidité d'une pyramide* ABCDEFHG *tronquée par un plan* EFHG *parallele à ſa baſe* ABCD, *& dont les arêtes* AF, BH, &c, *ſont des quarts de circonférence de cercles convexes du côté de l'axe*, (fig. 355.)

Solution. Je circonſcris un cercle autour de la baſe ABCD, & je conçois un cône tronqué qui ait pour côté le quart de circonférence de cercle AF : je conçois encore que le cône & la pyramide ſoient coupés par une infinité de plans paralleles à leurs baſes qui ſeront des cercles dans le cône, & des plans ſemblables à la baſe ABCD dans la pyramide. Ainſi tous les cercles du cône ſeront entre eux comme tous les plans de la pyramide, ou comme le cercle de la

baſe du cône eſt au plan de la baſe de la pyramide : or, le cône m'eſt connu, ainſi qu'on vient de voir dans la remarque du corollaire précédent, (534). Donc je n'ai qu'à dire : la baſe du cône eſt au cône, comme la baſe de la pyramide eſt à un quatrieme terme qui ſera la pyramide.

536. PROBLÊME III. *Trouver la ſolidité d'un ſolide à calotte, c'eſt-à-dire d'une pyramide dont les arêtes ſont des quarts de circonférences concaves du côté de l'axe.* (fig. 356.)

SOLUTION. Soit le ſolide ABCDE, qui a pour baſe le parallélogramme ABCD, & dont les arêtes AE, BE, &c, ſont des quarts de circonférences dont la concavité eſt en dedans du ſolide. Je mene les diagonales AC, BD, de la baſe ; & du point O, où elles ſe coupent, j'éleve perpendiculairement ſur la baſe la droite OE, qui ſera l'axe du ſolide : car les droites AO, OE, étant perpendiculaires entre elles, doivent embraſſer un quart de circonférence AE ; & par la même raiſon les droites DO, OE, doivent embraſſer un quart de circonférence, & ainſi des autres.

Je conçois que le ſolide ſoit coupé par une infinité de plans paralleles à la baſe, tels que FGHL : tous ces plans ſeront ſemblables entre eux & à la baſe ; à cauſe que leurs côtés ſont paralleles chacun à chacun, & leurs diagonales auſſi : ce qui rend les angles égaux chacun à chacun (479), & par conſéquent les triangles formés par les diagonales, ſont ſemblables. Ainſi ces plans ſeront entre eux comme les quarrés de leurs diagonales FH, AC, ou de leurs demi-diagonales FR, AO : mais ces demi-diagonales ſont les élémens du quart de cercle AEO : donc tous les plans ſont entre eux comme les quarrés, ou comme les cercles décrits par les élémens FR, &c, qui tourneroient autour du rayon fixe EO. Or, ces cercles compoſeroient une demi-ſphere ; & pour avoir la valeur de leur ſomme, il faut multiplier le plus grand par les deux tiers de la hauteur OE : donc pour avoir le ſolide ABCD, il faut multiplier le plus grand plan ABCD, par les deux tiers de la hauteur OE.

REMARQUE. Ce que nous diſons ici doit s'entendre de toutes les calottes qui auroient pour baſe des polygones réguliers ; de même que ce que nous avons dit ci-deſſus (530, 535), touchant les pyramides qui ont pour arêtes des quarts de circonférence convexes vers l'axe, doit s'entendre de toutes les pyramides de cette nature qui auroient des polygones réguliers pour baſe.

SOLIDES SEMBLABLES.

537. *Definition.* Les ſolides qui ſont compoſés d'un même nombre de faces ſemblables chacune à chacune, ſont dits *ſolides ſemblables.*

Proposition CXIX.

538. *Les parallélepipedes, ou les priſmes, ou les cylindres ſemblables, ſont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou des côtés homologues de leurs baſes, ou des circuits de ces baſes, ou enfin de quelques lignes ſemblablement poſées.* (fig. 357.)

Démonstration. Soient les deux parallélepipedes ſemblables AE, *ae* : le premier eſt égal au produit de ſa baſe ABCD par ſa hauteur AH; & le ſecond eſt égal au produit de ſa baſe *abcd* par ſa hauteur *ah* : donc les deux ſolides ſont entre eux comme ces produits. Mais les baſes ABCD, *abcd*, étant ſemblables, ſont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues AB, *ab* : donc le premier ſolide eſt au ſecond, comme le quarré $\overline{AB}$ multiplié par la hauteur AH, eſt au quarré $\overline{ab}$, multiplié par la hauteur *ah*. Mais à cauſe que les faces HABN, *habn*, ſont ſemblables; les hauteurs AH, *ah*, ſont entre elles comme les côtés AB, *ab* : donc le premier ſolide eſt au ſecond, comme le quarré $\overline{AB}$ multiplié par AB, eſt au quarré $\overline{ab}$ multiplié par *ab;* c'eſt-à-dire comme le cube $\overline{AB}'$ du côté AB, eſt au cube $\overline{ab}'$ du côté homologue *ab*.

Mais les cubes $\overline{AB}'$, $\overline{ab}'$, des côtés homologues AB, *ab*, ſont entre eux comme les cubes des côtés homologues AH, *ah* : donc les ſolides ſemblabes AE, *ae*, ſont auſſi comme les cubes de leur hauteur. On prouvera de la même façon qu'ils ſont comme les cubes des circuits de leurs baſes, &c; à cauſe que les circuits des baſes ſemblables ſont entre eux comme leurs côtés homologues; & la démonſtration eſt la même pour les priſmes ſemblables, & pour les cylindres ſemblables : puiſque les baſes des cylindres ſont des polygones d'une infinités de côtés. C. Q. F. D.

539. Corollaire I. *Les pyramides ſemblables & les cônes ſemblables, ſont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs ou de leurs côtés homologues.*

Démonstration. Les pyramides ſont les tiers des priſmes de même hauteur : donc ſi les pyramides ſont ſemblables, leurs priſmes le ſont auſſi; puiſque les hauteurs doivent être entre elles comme les

côtés homologues des baſes. Mais les priſmes ſemblables ſont comme les cubes de leurs côtés homologues : donc les pyramides ſemblables, qui ſont le tiers des priſmes, ſont auſſi comme les cubes de leurs côtés homologues. Et la même choſe doit ſe dire des cônes ſemblables, qui ne ſont autre choſe que des pyramides dont les baſes ont une infinité de côtés.

540. COROLLAIRE II. *Toutes les ſpheres ſont ſemblables ; & par conſequent elles ſont entre elles, comme les cubes de leurs diametres.* (fig. 358.)

DÉMONSTRATION. La ſphere ABCD eſt égale à ſon grand cercle AC multiplié par les deux tiers du diametre BD (510) ; & la ſphere *abcd* eſt égale au produit de ſon grand cercle *ac* par les deux tiers du diametre *bd*. Mais les deux cercles AC, *ac*, étant ſemblables, ſont comme les quarrés de leurs diametres AC, *ac*, ou des diametres BD, *bd* : donc la ſphere ABCD, eſt à la ſphere *abcd* ; comme $\overline{AC}^3 \times \frac{2}{3}$ AC, eſt à $ac \times \frac{2}{3}\ ac$; ou comme $\overline{AC}^3$ eſt à $\overline{ac}^3$.

541. COROLLAIRE III. *Les onglets ſemblables ſont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou des diametres de leurs baſes*, &c. (fig. 359.)

DÉMONSTRATION. Si les onglets ſemblables ABCE, *abce*, ſont de la premiere eſpece ; le premier eſt égal à ſon grand triangle BED multiplié par $\frac{2}{3}$ AC (515) ; & le ſecond eſt égal à ſon grand triangle *bed* multiplié par $\frac{2}{3}\ ac$. Mais par la ſuppoſition, les deux grands triangles étant ſemblables, ſont entre eux comme les quarrés $\overline{BD}^2$, $\overline{bd}^2$, de leurs baſes BD, *bd* : donc les onglets ſont entre eux, comme $\overline{BD}^2 \times \frac{2}{3}$ AC eſt à $\overline{bd}^2 \times \frac{2}{3}\ ac$; ou comme $\overline{BD}^2 \times$ AC eſt à $\overline{bd}^2 \times ac$. Or, BD. *bd* :: AC. *ac* : donc les deux onglets ſont entre eux comme $\overline{BD}^2 \times$ BD. $\overline{bd}^2 \times bd$; ou comme $\overline{BD}^3$. $\overline{bd}^3$.

Si les onglets ſemblables ABCE, *abce*, ſont de la ſeconde eſpece (*fig.* 360) ; en ſorte que leurs baſes ABC, *abc*, ſoient moindres chacune qu'un demi-cercle : ou pourra toujours les regarder comme faiſant partie d'autres onglets ſemblables de la premiere eſpece NMRE, *nmre*, qui auront pour baſes des demi-cercles : & alors les deux onglets ABCE, *abce*, ſeront entre eux comme les onglets NMRE, *nmre*. Car les baſes ou ſegmens ſemblables ABC, *abc*, ſeront entre eux comme les baſes ou demi-cercles NMR, *nmr* : & les hauteurs BE, *be*, comme les hauteurs ME, *me* : donc les onglets ABCE, *abce*,

ſeront entre eux comme $\overline{ME}^3 . \overline{me}^3$, ou comme $\overline{BE}^3 . \overline{be}^3$.

Et par un ſemblable raiſonnement on prouvera que les onglets ſemblables de la ſeconde eſpece qui ont pour baſes des ſegmens plus grands que le demi-cercle, ſont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs.

542. COROLLAIRE IV. *En général tous les ſolides ſemblables, de quelque façon qu'ils ſoient compoſés, ſont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues.*

DÉMONSTRATION. Si l'on prend dans ces ſolides des points ſemblablement poſés, & que de tous les angles de leurs faces on mene de droites à ces points; on décompoſera les ſolides en autant de pyramides ſemblables entre elles, qui ſeront comme les cubes de leurs côtés homologues: & par conſéquent les ſolides compoſés de ces pyramides ſeront dans la même raiſon.

DU CHANGEMENT DES SOLIDES.

543. De tout ce que nous venons de dire, il eſt aiſé de voir qu'on peut changer une pyramide en un parallélepipede ou en un priſme qui auroit même baſe, & pour hauteur le tiers de la hauteur de la pyramide; qu'un priſme ou un parallélepipede ſe peut changer en pyramide; qu'une ſphere peut être transformée en un cylindre ou en un onglet, &c. C'eſt pourquoi je me contenterai de donner ici quelques regles générales, pour changer un ſolide en un autre, ou pour faire un ſolide égal à pluſieurs autres; ou enfin pour rendre un ſolide ſemblable à un autre.

544. PROBLÊME I. *Un parallélepipede* AB *étant donné; trouver un autre parallélepipede qui lui ſoit égal, & qui ait pour hauteur une droite donnée* ae. (fig. 361.)

SOLUTION. Puiſque le parallélepipede que je cherche doit être égal au parallélepipede AB; ſa hauteur *ae* doit être à la hauteur AE, réciproquement comme la baſe ACHD, eſt à la baſe *achd* que je cherche (497). Je donne à la baſe que je cherche la dimenſion *ad* égale à la dimenſion AD de la baſe ADCH; & alors la baſe ABCD ſera à la baſe *abcd* cherchée, comme l'autre dimenſion AC, eſt à la dimenſion cherchée *ac*. C'eſt pourquoi je dirai: la hauteur *ae* eſt à la hauteur AE, réciproquement comme AC eſt à un quatrieme terme, lequel étant trouvé par les regles ordinaires, ſera la droite *ac*. Faiſant donc un parallélepipede ſur la baſe *dach*, avec la hauteur *ae*; le parallélepipede *ab* ſera égal au parallélepipede AB.

545. PROBLÊME II. *Un parallélepipede* AB *étant donné; trouver*

un autre parallélepipede qui lui ſoit égal & qui ait une baſe donnée. (fig. 361.)

SOLUTION. Si la baſe donnée *achd* a une dimenſion *da*, égale à la dimenſion DA de la baſe DACH; alors les deux baſes ſont entre elles comme les dimenſions *ac*, AC. C'eſt pourquoi je dis: la baſe *dach* eſt à la baſe DACH, c'eſt-à-dire la dimenſion *ac* eſt à la dimenſion AC, réciproquement comme la hauteur AE, eſt à un quatrieme terme, lequel étant trouvé par les regles ordinaires, donne la hauteur *ae* que je dois donner au parallélepipede *ab*, qui ſera égal au parallélepipede AB.

Mais ſi la baſe donnée *dpqr* n'a pas une dimenſion commune avec la baſe DACH; je la change en une autre *dach*, qui ſoit égale à *dpqr*, & qui ait la dimenſion *da* égale à la dimenſion DA, en diſant: *da* eſt à *dp*, réciproquement comme *dr* eſt à *dh*: après quoi j'acheve le reſte comme auparavant.

Remarquez que par le mot de dimenſion on doit toujours entendre une ligne perpendiculaire ſur l'autre dimenſion: car on ſçait bien que les dimenſions des plans ſont longueur & largeur, & que ces quantités doivent être perpendiculaires entre elles.

546. PROBLÊME III. *Deux parallélepipedes* AC, ac, *étant donnés; trouver un parallélepipede qui leur ſoit égal.* (fig. 362.)

SOLUTION. Je cherche à donner au parallélepipede *ac* une hauteur égale à la hauteur AM du parallélepipede AC; & pour cela je change d'abord ſa baſe *an* en une autre *pq* qui ait la dimenſion *dp* égale à la dimenſion DA: & le parallélepipede *ph*, fait ſur la baſe *pq* avec la hauteur *am*, eſt égal au parallélepipede *ac*. Maintenant, je dis; la hauteur AM que je veux donner au parallélepipede *ph*, eſt à la hauteur *am* qu'il a, réciproquement comme *pr* eſt à un quatrieme terme RF: & faiſant avec RF une baſe RT, qui ait la dimenſion RN = *dp*, le parallélepipe RS fait ſur la baſe RT, & avec la hauteur RQ = AM, ſera égal au parallélepipede *ph* ou *ac*; & par conſéquent le parallélepipede AS ſera égal aux deux parallélepipedes donnés.

547. COROLLAIRE I. On peut de la même façon, *faire un parallélepipede égal à pluſieurs autres, ou à pluſieurs cubes.*

548. COROLLAIRE II. *Pour faire un parallélepipede égal à la ſomme d'un parallélepipede & d'un priſme*, qui auroit, par exemple, pour baſe, un pentagone; je changerois la baſe du priſme en triangle, & le triangle en rectangle: & par conſéquent la parallélepipede qui auroit pour baſe ce rectangle, & pour hauteur la hauteur du

prisme, seroit égal au prisme. C'est pourquoi je n'aurois plus qu'à faire un seul parallélepipede égal aux deux, comme ci-dessus.

On peut de la même façon *faire un parallélepipede égal à deux ou plusieurs pyramides*; en changeant auparavant les pyramides en parallélepipedes.

De même encore, on peut *faire une pyramide égale à plusieurs pyramides*, en changeant d'abord toutes les pyramides en parallélepipedes; en faisant ensuite un parallélepipede égal à la somme des parallélepipedes; puis en faisant une pyramide égale au parallélepipede total, c'est-à-dire triplant la hauteur de ce parallélepipede. Car une pyramide de même base qu'un parallélepipede & qui a le triple de la hauteur, est égale au parallélepipede.

Je laisse aux commençans le plaisir de trouver une infinité d'autres changemens qu'on peut faire sur les solides, en suivant ce qui vient d'être dit.

549. PROBLÊME IV. *Exprimer en lignes la raison de plusieurs solides.*

SOLUTION. Je change les solides donnés en autant de parallélepipedes, dont les bases aient une dimension commune, & qui aient la même hauteur; & alors tous ces parallélepides seront entre eux comme les dimensions inégales de leurs bases. C'est pourquoi ces dimensions exprimeront le rapport des solides donnés.

550. PROBLÊME V. *Faire un cube qui soit à un autre cube, dans telle raison que l'on voudra.* (fig. 363.)

SOLUTION. I°. Supposé qu'on demande un cube double du cube AB; je prends une droite AH, double du côté de AC; & ensuite deux moyennes proportionnelles entre AH & AC; ce qui se fait par le moyen du compas de proportion, comme on verra sur la fin de ce chapitre: & le cube fait sur la premiere des deux moyennes proportionnelles, est double du cube AB (*).

Car nommant *b* la premiere des deux moyennnes, & *c* la seconde; nous avons :: AC. *b*. *c*. AH : donc $\overline{AC}.b3$ :: AC. AH (*Calc.* 327). Mais AC est la moitié de AH, par la construction : donc le cube $\overline{AC}$ ou $\overline{AB}$ est la moitié du cube fait sur *b*.

(*) La solution que donne ici l'abbé Deidier, du fameux *problême de la duplication du cube*, problême qu'on n'a pu encore résoudre par la géométrie élémentaire, c'est-à-dire par le seul secours de la regle & du compas, est plutôt une solution approchée & pratique, qu'une solution rigoureusement géométrique (214).

II°. Si l'on demande un cube qui ne ſoit que le tiers du cube AB, je prends le tiers AD du côté AC, enſuite deux moyennes proportionnelles m, n, entre AC & AD : ce qui me donne :: AC . m . n . AD : donc $\overline{AC}^3 . m^3 ::$ AC . AD. Mais AC eſt triple de AD : donc le cube $\overline{AC}^3$ ou AB eſt triple du cube fait ſur la premiere moyenne proportionnelle m.

III°. Enfin ſi l'on demande un cube qui ſoit au cube AB, comme une ligne donnée a eſt à une ligne donnée b; je cherche une quatrieme proportionnelle x aux deux lignes données b, a, & au côté AC : ce qui me donne $b . a ::$ AC . x; ou x . AC :: $a . b$; ou AC . $x :: b . a$. Je cherche deux moyennes proportionnelles entre AC & x; & j'ai :: AC . m . n . x : donc $\overline{AC}^3 . m^3 ::$ AC . $x :: b . a$; & par conſéquent le cube fait ſur AC, c'eſt-à-dire le cube AB eſt au cube fait ſur la premiere moyenne proportionnelle m, comme b eſt à a.

551. PROBLÊME VI. *Faire un cube égal à un parallélepipede donné* AB. (fig. 364.)

SOLUTION. Je change la baſe AC du parallélepipede en un quarré MP qui lui ſoit égal, & multipliant MP par la hauteur MQ égale à la hauteur AE du parallélepipede donné, j'ai le parallélepipede MN égal au parallélepipede AB. Je cherche deux moyennes proportionnelle m, n, entre le côté MR du quarré MP & la hauteur MQ ou AE; & le cube fait ſur la premiere proportionnelle m, eſt égal au parallélepipede MN, & par conſéquent au parallélepipede AB.

Car par la conſtruction, nous avons :: MR . m . n . MQ : donc $\overline{MR}^3 . m^3 ::$ MR . MQ; & faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, nous avons $\overline{MR}^3 \times MQ = m^3 \times MR$; & diviſant tout par MR, nous aurons $\overline{MR}^2 \times MQ = m^3$. Mais $\overline{MR}^2 \times MQ$ eſt le paparallélepipede MN ou AB : donc ce parallélepipede eſt égal au cube de m^3.

552. COROLLAIRE. On peut par ce moyen *faire un cube égal à pluſieurs cubes, ou à pluſieurs parallélepipedes, ou à pluſieurs pyramides, ou à pluſieurs figures de différente eſpece* : en réduiſant d'abord toutes les figures en un parallélepipede égal à toutes les figures, & enſuite à un cube égal à ce parallélepipede.

553. PROBLÊME VII. *Deux ſolides ſemblables* AC, ac, *étant donnés; trouver un autre ſolide* PX *qui ſoit égal à la ſomme des deux, & qui leur ſoit ſemblable.* (fig. 365.)

Solution. Je cherche un cube aux deux ſolides donnés, & je ſuppoſe que la ligne *s* ſoit le côté de ce cube : je cherche auſſi un cube égal à l'un des ſolides donnés, par exemple, au ſolide *ac* ; & je ſuppoſe que le côté de ce cube ſoit la droite *r:* enſuite je dis le côté *r* eſt au côté *ad* du ſolide *ac*, comme la droite *s* eſt à un quatrieme terme que je nomme PQ, & qui ſera le côté homologue du ſolide que je cherche. Je dis de même le côté *r* eſt au côté *am*, comme le côté *s* à un quatrieme terme que je nomme PR, & qui ſera un autre côté homologue du ſolide que je cherche. Enfin je dis le côté *r* eſt à la hauteur *ae*, comme le côté *s* eſt à un quatrieme terme que je nomme PT, & qui ſera la hauteur du ſolide cherché. Faiſant donc avec les trois dimenſions PQ, PR, PT, le ſolide PX ; ce ſolide ſera égal aux deux donnés, & leur ſera ſemblable.

Car, par la conſtruction, nous avons $r . ad :: S. PQ$: puis $r . am ::$ S. PR : enfin $r . ae :: s .$ PT : & multipliant ces trois proportions les unes par les autres, c'eſt-à-dire les antécédens par les antécédens, les conſéquens par les conſéquens ; nous aurons $r^3 . ad \times am \times ae ::$ $s^3 .$ PQ × PR × PT. Mais $r^3 = ad \times am \times ae$: donc $s^3 =$ PQ × PR × PT.

Or, s^3 eſt le cube égal aux deux ſolides donnés : donc PQ × PR × PT, ou le ſolide PX, eſt auſſi égal à ces deux ſolides ; & de plus, il leur eſt ſemblable ; puiſque ſes dimenſions PQ, PR, PT, ſont ſemblables aux dimenſions du petit ſolide *ac*.

Je laiſſe grand nombre d'autres problêmes ſur cette matiere, qui peuvent ſe réſoudre aiſément en ſuivant les principes que je viens d'établir.

DES SURFACES DES SOLIDES.

554. Dans les ſolides qui ont une ou deux baſes, tels que ſont les pyramides, les cônes, les demi-ſpheres, les parallélepipedes, les priſmes, les cylindres, &c ; on entend par le mot de *ſurface*, la valeur des plans montans ou des côtés courbes qui montent, ſans y comprendre les baſes ; & quand on veut que les baſes ſoient compriſes, on ſe ſert du mot de *ſurface totale*.

Proposition CXX.

555. *La ſurface d'un parallélepipede droit, d'un priſme droit, ou d'un cylindre droit, eſt égale au circuit de ſa baſe multiplié par la hauteur du ſolide.* (fig. 361.)

Démonstration. Soit le parallélepipede AB : ſa ſurface n'eſt autre choſe que la ſomme des quatre rectangles montans compris entre ſes

deux baſes. Or, ces rectangles ſont chacun le produit de ſa baſe par ſa hauteur ; & la hauteur eſt la même dans chacun d'eux : donc ces quatre rectangles ſont le produit de leurs quatre baſes AC, CH, HD, DA, par la hauteur AE ; c'eſt-à-dire le produit du circuit ou contour ACHD, par la hauteur AE.

On démontrera la même choſe pour les priſmes droits, & pour les cylindres droits. Car les baſes des cylindres étant des polygones d'une infinité de côtés ; leurs ſurfaces, lorſqu'ils ſont droits, ne ſont autre choſe qu'une infinité de rectangles qui ont tous pour hauteur la hauteur du cylindre. C. Q. F. D.

556. COROLLAIRE I. *Pour meſurer la ſurface d'un parallélepipede incliné* AC ; *il faut néceſſairement meſurer à part les plans montans*, (fig. 366.)

DÉMONSTRATION. Car quoi qu'il puiſſe arriver que les deux faces AEFD, & ſa parallele BHCO, ſoient encore des rectangles ; cependant la face ABHE, & ſa parallele DOCF ſeront toujours des parallélogrammes, dont les côtés ſeront inclinés : de façon que la face ABHE ne ſera pas le produit de ſa baſe AC par la longueur AE ; au lieu que la face AEFD ſera égale à ſa baſe AD multipliée par la longueur AE.

La même choſe doit ſe dire de tous les priſmes inclinés.

557. COROLLAIRE II. *La même difficulté ſubſiſte pour les cylindres inclinés ; il ſemble cependant qu'on puiſſe aiſément les meſurer en cette façon.* (fig. 367.)

Soit le cylindre incliné ABCD. Je le coupe par un plan EB perpendiculaire entre les côtés AD, BC, & qui paſſe par l'extrêmité B de la baſe inférieure AB : je conçois que le cylindre ſoit prolongé du côté de D, & je le coupe par un autre plan FC parallele au plan EB : ce qui me donne un cylindre droit EBCF égal au cylindre incliné ABDC. Car la partie cylindrique ABE, étant égale à la partie cylindrique DCF ; ſi l'on ajoute de part & d'autre la partie commune EBCD, on aura ABCD = EBCF. Multipliant donc la circonférence de la baſe EB du cylindre droit EBCF, par le côté BC ; le produit ſera la ſurface du cylindre droit EBCF, & par conſéquent du cylindre incliné ABCD. Mais la queſtion conſiſte à trouver le circuit de la baſe EB : car cette baſe n'eſt plus un cercle comme la baſe AB, mais une ellipſe, comme nous ferons voir dans la ſuite. C'eſt pourquoi le plus court eſt de meſurer avec un fil le contour de la baſe EB.

PROPOSITION CXXI.

558. *La ſurface de toute pyramide droite & dont la baſe eſt un polygone*

lygone régulier, eſt égale au contour de ſa baſe multipliée par la moitié d'une droite menée du ſommet E *perpendiculairement ſur le côté ou ſur la baſe de l'une des faces.* (fig. 368.)

DÉMONSTRATION. Soit la pyramide quarrée & droite ABCD: ſa ſurface eſt compoſée de quatre triangles ſemblables & égaux, & par conſéquent elle eſt égale à quatre fois le triangle AEB. Or, ce triangle eſt égal à ſa baſe AB multipliée par la moitié de la hauteur FE: donc la ſurface de la pyramide eſt égale à quatre fois la baſe AB, ou au circuit ABCD, multiplié par la moitié de AE. Ce qu'il falloit démontrer.

569. REMARQUE. Si on coupoit la pyramide par un plan MNOQ parallele à la baſe, & qui coupât les quatre arêtes chacune en deux également; le contour MNOQ ſeroit égal à la moitié du contour ABCD de la baſe. (fig. 368.)

Car les triangles ſemblables EAB, EMN, donnent EA . EM :: AB . MN. Mais par la conſtruction, nous avons EM $= \frac{1}{2}$ EA: donc MN $= \frac{1}{2}$ AB; & ainſi des autres faces. Or, comme le produit du contour ABCD par la moitié de EF, eſt la même choſe que le produit de la moitié du contour ABCD par la droite EF toute entiere; il s'enſuit que la ſurface de toute piramide droite & réguliere, eſt égale au produit du contour moyen pris entre le ſommet & la baſe à égale diſtance, multiplié par la droite EF.

570. COROLLAIRE I. *La ſurface de tout cône droit* ABC, *eſt égale au produit de la circonférence* AB *de ſa baſe, multipliée par la moitié du côté* CB; *ou à la circonférence moyenne* MN, *multipliée par le côté* CB. (fig. 369.)

DÉMONSTRATION. Car tout cône régulier eſt une pyramide réguliere d'une infinité de côtés; & la droite menée du ſommet C ſur la baſe infiniment petite de l'un des triangles qui compoſent les faces, n'eſt pas différente du côté CB. Donc, &c.

571. COROLLAIRE II. Pour *meſurer les ſurfaces des pyramides droites qui ne ſont pas régulieres, & des pyramides inclinées dont les baſes ſont régulieres ou irrégulieres;* il faut néceſſairement meſurer chaque face des triangles à part, à cauſe qu'ils n'ont pas tous la même hauteur. De-là vient qu'*on n'a pas encore trouvé la maniere de meſurer la ſurface d'un cône incliné* ABC. (fig. 370.)

Quelques auteurs donnent pour regle, de multiplier la circonférence de la baſe AB, par la moitié du côté CD moyen entre le plus grand côté AC & le moindre BC: ce qui n'eſt fondé ſur aucune

preuve géométrique, & ne peut faire tout au plus qu'une approximation.

PROPOSITION CXXII.

572. *La ſurface d'une pyramide droite & réguliere tronquée parallélement à ſa baſe, eſt égale à la ſomme des circuits* ABCD, HGFE, *de ſes baſes, multipliée par la moitié de la ligne droite* RS *perpendiculaire entre les deux côtés paralleles* AB, HG *de l'une de ſes faces* ABGH: *ou bien cette ſurface eſt égale au circuit* MNOQ *qui coupe les arêtes* AH, GB, &c, *chacune en deux également, multiplié par la droite* RS. (fig. 371.)

DÉMONSTRATION. La pyramide étant droite & réguliere; ſa ſurface tronquée eſt compoſée d'autant de trapézoïdes égaux, que la baſe a de côtés: or, le trapézoïde ABGH eſt égal à la ſomme de ſes deux côtés paralleles AB, HG, multipliée par la moitié de ſa hauteur RS; ou à la droite MN qui coupe ſes deux côtés non paralleles en deux également, multipliée par la hauteur RS (386): donc la ſurface de la pyramide tronquée eſt égale à autant de fois l'un ou l'autre de ces produits, que la baſe a de côtés; c'eſt-à-dire, dans cette figure, à quatre fois l'un ou l'autre produit. Or, 4 fois les côtés AB, HG, forment les deux circuits ABCD, HGFE; & quatre fois MN forme le circuit MNOQ. Donc, &c.

573. COROLLAIRE I. *La ſurface d'un cône droit tronqué parallélement à ſa baſe, eſt égale aux circonférences de ſes deux baſes* AB, DC, *multipliées par la moitié du côté* CB; *ou à la circonférence moyenne* EF *qui coupe les côtés* DA, CB, *chacun en deux également, multipliée par le côté* CB. (fig. 372.)

Cela eſt évident: à cauſe qu'un cône droit tronqué parallélement à ſa baſe, eſt une pyramide droite réguliere, d'une infinité de côtés, & tronquée parallélement à ſa baſe.

574. COROLLAIRE II. *La ſurface d'une pyramide droite irréguliere tronquée parallélement à ſa baſe, ne peut ſe meſurer qu'en prenant chaque face à part;* & il faut dire la même choſe des pyramides inclinées tronquées, à cauſe que leurs faces ſont toutes différentes.

PROPOSITION CXXIII.

575. *Si l'on inſcrit dans un demi-cercle* ACDF, *un polygone régulier* ABCDEF *dont deux de ſes côtés* AB, EF, *ſe terminent ſur les extrêmités* A, F, *du diametre* AF; *& que l'on faſſe tourner ce polygone autour du diametre fixe* AF; *la ſurface que les côtés* AB, BC,

CD, &c, *de ce polygone décriront, ſera égale à la circonférence qui auroit pour rayon l'apothême* OR *multipliée par le diametre* AF. (fig. 373.)

Démonstration. Il eſt viſible que les côtés AB, EF, décriront des ſurfaces de cônes : que les côtés BC, DE, qui ne ſont pas paralleles à l'axe & qui ne le touchent point, décriront des ſurfaces de cônes tronqués parallélement à leurs baſes ; & que s'il ſe trouve un côté CD parallele au diametre, ce côté décrira une ſurface de cylindre. Je mene de tous les angles, des droites BH, CM, DT, EV, perpendiculaires ſur le diametre : & ſi je démontre que la ſurface de cône que décrit AB, eſt égale à la droite AH compriſe entre le point A & la perpendiculaire BH, multipliée par la circonférence dont le rayon eſt l'apothême OR ; que la ſurface de cône tronqué que décrit BC, eſt égale à la droite HM compriſe entre les deux perpendiculaires BH, CM, multipliée par la même circonférence, & ainſi de ſuite ; j'aurai démontré auſſi que la ſomme de toutes les ſurfaces, eſt égale à la ſomme des parties AH, HM, MT, &c, du diametre AF ; c'eſt-à-dire au diametre AF multiplié par la circonférence dont le rayon ſeroit l'apothême OR ; & que par conſéquent la ſurface totale décrite par les côtés du polygone, eſt égale à la ſurface d'un cylindre qui auroit pour baſe le cercle dont le rayon ſeroit OR, & pour hauteur le diametre AF. Pour en venir donc à la démonſtration,

I°. La *ſurface de cône*, décrite par le côté AB, eſt égale à la circonférence de ſa baſe ou à la circonférence que la perpendiculaire BH décriroit autour du diametre AF multipliée par la moitié du côté AB (570) : ou bien en coupant AB en deux également en R, la ſurface du cône eſt égale à la circonférence que décriroit la droite RS perpendiculaire ſur AF multipliée par le côté AB. Or, l'apothême OR étant perpendiculaire ſur AB, les triangles rectangles SOR, RAS, ſont ſemblables ; & à cauſe des paralleles RS, BH, les triangles rectangles RAS, BAH ſont auſſi ſemblables : donc le triangle SOR eſt ſemblable au triangle BAH ; & par conſéquent BA. AH :: RO . RS : & au lieu des deux derniers termes RO, RS, mettant les circonférences dont ils ſeroient les rayons, leſquelles circonférences ſont entre elles comme leurs rayons ; & nommant ces circonférences (RO, (RS ; nous aurons BA . AH :: (RO . (RS : & faiſant le produit des extrêmes, & celui des moyens, nous aurons BA × (RS = AH × (RO ; c'eſt-à-dire, la droite AH multipliée par la circonférence de l'apothême RO, eſt égale à la droite AB multipliée par la circonférence du rayon RS, ou à la ſurface conique que décriroit AB.

II°. Pour démontrer la même choſe à l'égard des *ſurfaces de cône tronqué* que décriroient les droites BC, DE, &c, qui ne ſont point paralleles au diametre AF, & qui n'y aboutiſſent point; je diviſe DE en deux également en P : & menant au centre la droite PO, cette droite eſt encore l'apothême du polygone. Du point E, je mene EL parallele au diametre; & du point P, la droite PX perpendiculaire ſur le même diametre. Le triangle rectangle OPX, eſt ſemblable au triangle *m*P*n*, lequel eſt ſemblable au triangle *n*PE; & celui-ci eſt ſemblable au triangle LED : donc les triangles OPX, LDE, étant ſemblables ; nous avons DE . LE ou TV :: OP . PX : & au lieu de OP, PX, mettant les circonférences dont elles ſeroient rayons, & que nous nommerons (OP, (PX ; nous aurons DE . TV :: (OP . (PX ; d'où l'on tire DE × (PX = TV × (OP. Mais DE × (PX, eſt la ſurface de cône tronqué que décriroit DE, en tournant autour de AF (573) : donc cette ſurface eſt égale à la partie TV du diametre multipliée par la circonférence dont le rayon ſeroit égal à l'apothême OP, ou OR, & ainſi des autres.

III°. Quant à la *ſurface cylindrique*, que décriroit le côté CD parallele au diametre ; il eſt clair qu'elle ſeroit égale à la droite CD ou MT multipliée par la circonférence dont le rayon ſeroit l'apothême OZ, ou OR. Donc, &c. C. Q. F. D.

576. COROLLAIRE. Si l'on fait donc un cylindre *abmn*, dont la baſe *ab* ſoit le cercle qui auroit pour rayon l'apothême RO, & dont la hauteur *bm* ſoit égale au diametre AF, *la ſurface de ce cylindre ſera égale à la ſurface que décriroit le polygone en tournant autour de* AF. (fig. 373.)

De plus, chaque ſurface particuliere décrite par l'un des côtés, tel que BC, ſera égale à la ſurface de la portion du cylindre qui auroit pour hauteur la partie HM du diametre correſpondante au côté BC, & ainſi des autres.

PROPOSITION CXXIV.

577. *La ſurface d'une ſphere* ABCD *eſt égale à la ſurface du cylindre circonſcrit* EFGH. (fig. 374.)

DÉMONSTRATION. La ſphere ABCD eſt décrite par la circonvolution du demi-cercle DAB autour du diametre BD. Or, ce demi-cercle pouvant être regardé comme un polygone d'une infinité de côtés ; la ſurface de la ſphere ne differe point de la ſomme des ſurfaces que les côtés infiniment petits du polygone décrivent en tournant autour de BD : & comme la ſomme de ces ſurfaces eſt égale à

la circonférence qui auroit pour rayon l'apothême du polygone, multipliée par le diametre BD (575); il s'enſuit que la ſurface de la ſphere eſt égale à ce produit. Mais l'apothême d'un polygone d'une infinité de côtés, ne differe pas du rayon OA du demi-cercle : donc la ſurface de la ſphere eſt égale à la circonférence du rayon OA multiplié par le diametre BD, & par conſéquent elle eſt égale à la ſurface du cylindre circonſcrit EFGH. Ce qu'il falloit démontrer.

578. COROLLAIRE I. *La ſurface d'un ſegment* MBN *de ſphere eſt égale à la ſurface de la portion* TVGH *du cylindre circonſcrit, laquelle a la hauteur* TH *égale à la hauteur* XB *du ſegment.* (fig. 374.)

DÉMONSTRATION. Les côtés infiniment petits du polygone compris entre le point B & la perpendiculaire MX, décrivent des ſurfaces égales aux ſurfaces des portions cylindriques qui ont pour hauteur les parties du diametre correſpondantes à ces côtés (575) : donc toutes ces ſurfaces ſont enſemble égales à la ſurface cylindrique qui a pour hauteur la partie BX du diametre correſpondante à la ſomme des côtés.

579. COROLLAIRE II. *La ſurface d'une zone* AMNC *eſt égale à la ſurface* ACVT *de la portion cylindrique qui a pour hauteur la hauteur* OX *de la zone.* Ce qui ſe démontre de la même façon, & ainſi des autres parties de la ſurface de la ſphere. (*fig.* 374.)

580. COROLLAIRE III. *La ſurface d'une ſphere eſt quadruple de ſon grand cercle* AC.

DÉMONSTRATION. La ſurface de la ſphere eſt égale à celle du cylindre circonſcrit EFGH ; & celle-ci eſt égale à la circonférence EF ou AC du grand cercle, multipliée par le diametre. Or, le grand cercle AC eſt égal à ſa circonférence multipliée par la moitié du rayon ou le quart du diametre (378) : donc la ſurface de la ſphere eſt à ſon grand cercle, comme la circonférence du grand cercle multipliée par le diametre, eſt à la même circonférence multipliée par le quart du diametre ; & par conſéquent, comme le diametre eſt à ſon quart, ou comme 4 eſt à 1.

581. REMARQUE. Pour trouver la *ſolidité d'une ſphere*, on fera attention qu'une ſphere peut être conſidérée comme étant compoſée d'une infinité de pyramides dont les baſes infiniment petites, ſont ſur la ſurface de la ſphere, & dont les ſommets ſont au centre de la ſphere. D'où il ſuit que toutes ces pyramides ayant la même hauteur, c'eſt-à-dire le rayon de la ſphere ; leur ſomme ſera égale à la ſomme

de leurs baſes, ou à la ſurface de la ſphere multipliée par le tiers du rayon. Cela poſé, il eſt facile de meſurer la ſolidité de telle partie que l'on voudra de la ſphere (fig. 374):

Par exemple, pour *meſurer le ſecteur* MBNO, je multiplie la ſurface MBN qui eſt la baſe de toutes les pyramides que ce ſecteur contient, par le tiers du rayon BO; & le produit eſt la ſolidité cherchée.

De même, pour *meſurer le ſegment ſphérique* MBN, je meſure le ſecteur, & j'en retranche le cône MON.

De même encore, pour *meſurer la zone ſphérique* AMNC, j'en retranche le cône MON; & le reſte eſt la ſomme des pyramides qui auroient leurs ſommets en O, & dont les baſes ſeroient ſur la ſurface de la zone. Je multiplie donc la ſurface de la zone, par le tiers du rayon; & j'ajoute au produit le cône MON : ce qui me donne la ſolidité de la zone, & ainſi des autres.

PROPOSITION CXXV.

582. *La ſurface d'un onglet* ABCE *eſt à la ſurface de la ſphere que ſa baſe* ABC *décriroit en tournant autour du diametre* AC, *comme la plus grande hauteur* EB *de l'onglet, eſt à la circonférence du grand cercle de la ſphere.* (fig. 375.)

DÉMONSTRATION. I°. Suppoſons que l'*onglet ſoit égal à la ſphere*: la plus grande hauteur EB ſera donc égale à la circonférence du grand cercle (518). Or, la ſurface de cet onglet eſt compoſée d'une infinité de droites élevées perpendiculairement ſur tous les points de la circonférence ABC de la baſe, & égales chacune à chacune aux circonférences que tous les points de ABC décriroient en tournant autour de AC : car par-tout où l'on voudra couper l'onglet par un plan HPL parallele au grand triangle EBO, on aura HP. PL :: EB. BO. Mais EB eſt la circonférence du rayon BO : donc HP ſera auſſi la circonférence du rayon PL, & ainſi des autres. Or, toutes les circonférences décrites par tous les points de la circonférence CBA, qui tourneroient autour de CA, forment la ſurface de la ſphere : donc la ſurface de l'onglet eſt égale à celle de la ſphere.

II°. Que *ſi l'onglet eſt moindre ou plus grand que la ſphere;* la plus grande hauteur EB ſera auſſi moindre ou plus grande que la circonférence du grand cercle : & par conſéquent HP ſera auſſi moindre ou plus grand que la circonférence du rayon PL, & ainſi des autres. D'où il ſuit que la ſurface de l'onglet ſera moindre ou plus grande que la ſurface de la ſphere, ſelon que EB ſera moindre ou plus grande que la circonférence du grand cercle; & que par conſéquent la ſurface de l'onglet ſera à celle de la ſphere, comme la

hauteur EB eſt à la circonférence du grand cercle. C. Q. F. D.

583. Corollaire I. *Si l'on coupe un onglet de la premiere eſpece par un plan* HPL *parallele à ſon grand triangle ; la ſurface de la portion* HPLC *coupée par ce plan, eſt à la ſurface que ſa baſe* PCL *décriroit en tournant autour du diametre, comme la hauteur* EB *de l'onglet, eſt à la circonférence du grand cercle.* C'eſt une ſuite évidente de cette propoſition.

584. Corollaire II. *La ſurface d'un onglet de la premiere eſpece* ABCD, *eſt égale à un rectangle qui auroit pour baſe le diametre* AC, *& pour hauteur une droite égale à la plus grande hauteur* EB *de l'onglet.* (fig. 375.)

Démonstration I°. *Si l'onglet eſt égal à la ſphere ;* ſa ſurface eſt auſſi égale à celle de la ſphere. Or, la ſurface de la ſphere eſt égale à celle du cylindre circonſcrit ; & celle-ci eſt égale à la circonférence du grand cercle multipliée par le diametre CA : ſi l'on prend donc une ligne droite CT égale à la circonférence du grand cercle, ou égale à la hauteur EB de l'onglet ; le rectangle fait ſous CT & le diametre AC, ſera égal à la ſurface du cylindre, ou de la ſphere, ou de l'onglet.

II°. Que *ſi l'onglet eſt moindre ou plus grand que la ſphere ;* ſa ſurface ſera à celle de la ſphere, ou au rectangle AT, comme la hauteur EB eſt à la circonférence du grand cercle, ou à la droite CT. Prenant donc une ligne moindre ou plus grande que CT, & faiſant avec cette ligne & avec le diametre AC un rectangle AX ; ce rectangle ſera égal à la ſurface de l'onglet : puiſque le rectangle AX ſera au rectangle AT, comme la hauteur BE eſt à la circonférence du grand cercle égale à AT.

585. Corollaire III. *La ſurface des onglets de la ſeconde eſpece* ſe trouvera aiſément, en obſervant ce que nous avons dit touchant leur ſolidité. Par exemple, (*fig.* 344.)

I°. *Pour trouver la ſurface de l'onglet* ADCB *de la ſeconde eſpece,* qui fait partie de l'onglet SXTB de la premiere eſpece ; je vois qu'il faut retrancher de la ſurface de l'onglet SXTB, 1°. la ſurface de l'eſpece de priſme triangulaire QSACZT : 2°. la ſurface de la portion cylindrique QXZCAD. Or, en ſuppoſant que l'onglet ſoit égal à la ſphere que ſa baſe décriroit, ſa ſurface ſeroit égale à la ſurface de cette ſphere : & la ſurface de l'eſpece de priſme QSACZT, eſt égale à la ſurface des deux ſegmens ſphériques QSζ, ZTy : en-

fin, la ſurface de la portion cylindrique QXZCAD, eſt égale à la circonférence QXZ multipliée par la hauteur XD. Or, tout cela eſt facile à connoître : donc il eſt facile auſſi de connoître la ſurface de l'onglet DACB.

II°. Que *ſi l'onglet* SXTB *n'eſt pas égal à la ſphere ;* ſa ſurface ſera toujours à celle de la ſphere, comme la hauteur BX à la circonférence du grand cercle : & la ſurface de l'eſpece de priſme QSACTZ, ſera à la ſurface de deux ſegmens ſphériques QSz, ZTy, auſſi comme la hauteur BX à la circonférence du grand cercle. Ainſi la ſurface de l'onglet ADCB ſera facile à connoître.

Il eſt aiſé de connoître auſſi la ſurface de l'onglet ADCB (*fig.* 345), dont la baſe eſt plus grande qu'un demi-cercle, en obſervant ce qui a été dit touchant ſa ſolidité.

586. Remarque I. C'eſt auſſi en faiſant attention à ce qui a été dit touchant la ſolidité des anneaux ouverts ou fermés, qu'on trouvera :

I°. Que la ſurface d'un anneau fermé (*fig.* 348) fait par la circonvolution d'un cercle ABCD qui tourne autour d'une tangente immobile HP, eſt égale à la ſurface d'un cylindre AMTC (*fig.* 350) qui auroit pour baſe le cercle générateur de l'anneau, & pour hauteur DS la circonférence de ce cercle.

II°. Que la ſurface de la partie extérieure de l'anneau fermé, eſt égale à la ſurface du demi-cylindre DABMNS (*fig.* 350), plus la ſurface de l'onglet SMNR égale à la ſurface de la ſphere qui auroit pour grand cercle le cercle générateur.

III°. Que la ſurface de la partie intérieure du même anneau eſt égale à la ſurface du demi-cylindre DCBNTS, moins la ſurface de l'onglet NTSC égal à l'onglet SMNR.

IV°. Enfin, que la ſurface du vuide BRCSD (*fig.* 348) eſt la même que celle de la partie intérieure de l'anneau, & que par conſéquent la moitié de cette ſurface eſt égale à la ſurface du cône DCS qui a pour côté le quart de circonférence DC du cercle générateur.

587. Remarque II. On trouvera de même, & d'après les mêmes principes,

I°. Que la ſurface d'un anneau ouvert (*fig.* 352) fait par la circonvolution d'un cercle ABCD qui tourne autour d'une ligne extérieure immobile HP, eſt égale à la ſurface d'un cylindre ACEM (*fig.* 354) qui a pour baſe le cercle générateur, & pour hauteur la droite XQ égale à la circonférence que le centre X du cercle générateur décrit autour de HP.

II°.

II°. Que la ſurface de la partie extérieure du même anneau eſt égale à la ſurface du demi-cylindre DABNS, plus la ſurface d'un onglet SMNR égal à une ſphere qui auroit pour grand cercle le cercle générateur.

III°. Que la ſurface de la partie intérieure eſt égale à la ſurface du demi-cylindre DCBNES, moins la ſurface de l'onglet NESL égal à l'onglet SMNR.

IV°. Enfin, que la ſurface du vuide BCDSQR (*fig.* 352.) eſt égale à la ſurface de la partie intérieure de l'anneau; & que par conſéquent la moitié de cette ſurface eſt égale à celle d'un cône tronqué CDSQ qui auroit pour arête le quart CD de la circonférence du cercle générateur.

588. Remarque III. On a vu comment on peut trouver la ſolidité d'une pyramide ABCDE, dont les arêtes ſont des quarts de cercles convexes du côté de l'axe AO : il n'eſt pas auſſi aiſé de trouver la ſurface de cette même pyramide. (fig. 351.)

Comme il n'eſt pas moins important de détruire ou de prévenir une erreur, que d'établir une vérité; nous allons montrer comment on peut s'égarer en cherchant la ſurface d'une telle pyramide, ou en cherchant à réſoudre par la géométrie élémentaire, ce problême : *trouver la ſurface d'une pyramide* ABCDE, *dont les arêtes ſont des quarts de cercles convexes du côté de l'axe.*

I°. Fausse Solution. Pour trouver cette ſurface, pourroit-on dire; je circonſcris autour de la baſe, une circonférence de cercle ABCD; & je conçois un cône qui ait ce cercle pour baſe, & pour côté l'arête AE. La ſurface de ce cône ne ſera autre choſe que la ſomme des circonférences que tous les points du quart de cercle AE, décriroient en tournant autour de l'axe EO; & la ſurface de la pyramide n'eſt auſſi autre choſe qu'une ſomme de circuits, tels que FGHL ſemblables au circuit de la baſe ABCD, & qui ſeroient inſcrits ſemblablement dans les circonférences correſpondantes. Ainſi chaque circuit FGHL eſt à la circonférence correſpondante; comme le circuit ABCD de la baſe de la pyramide, eſt à la circonférence ABCD de la baſe du cône. Donc comme la circonférence ABCD de la baſe du cône, eſt au circuit ABCD de la baſe de la pyramide; ainſi la ſomme des circonférences qui compoſent la ſurface, c'eſt-à-dire la ſurface du cône, eſt à la ſomme des circuits qui compoſent la ſurface de la pyramide, ou à la ſurface de la pyramide. Or, la circonférence ABCD, & le circuit ABCD ſont

connus; & la ſurface du cône eſt auſſi connue : donc on connoîtra aiſément la ſurface de la pyramide.

II°. Vice de cette Solution. Le raiſonnement par lequel on ſemble réſoudre le problême, eſt un raiſonnement totalement vicieux, dont il eſt facile de faire ſentir la fauſſeté, en l'appliquant à un exemple qui ait pour objet deux ſurfaces dont le rapport eſt connu, & où il menera à une erreur manifeſte.

Par un raiſonnement tout ſemblable, on concluroit que la ſurface d'une pyramide droite & quadrangulaire ſeroit à celle du cône circonſcrit, comme le contour du quarré inſcrit à la baſe du cône, eſt à la circonférence de cette baſe. Car dans chaque ſection de l'un & de l'autre corps, on trouve dans le cône, un cercle; & dans la pyramide, un quarré inſcrit. Cette concluſion eſt cependant très-fauſſe : car la ſurface de la pyramide eſt le demi-produit du contour du quarré, par la perpendiculaire menée du ſommet de la pyramide ſur le quarré; & la ſurface du cône eſt le demi-produit de la circonférence de la baſe, par le côté du cône; côté égal à l'arête de la pyramide inſcrite, & plus grand que la perpendiculaire menée ſur la baſe de cette pyramide.

D'ailleurs ſi la ſolution dont nous attaquons le vice, étoit valide; rien ne ſeroit ſi aiſé que de trouver la ſurface d'un cône oblique. Car inſcrivant dans le cône une pyramide quadrangulaire, on trouveroit que la ſurface de cette pyramide ſeroit à celle du cône, comme le contour du quarré inſcrit, un cercle, eſt à la circonférence de ce cercle : ce qui eſt cependant totalement faux.

Le raiſonnement dont on vient de montrer le vice, conduit évidemment à l'erreur dans la ſurface de la pyramide plane : donc il mene ou il peut mener également à l'erreur dans la ſurface de la pyramide ABCDE : donc ce raiſonnement eſt vicieux & antigéométrique.

III°. La vraie ſolution d'un tel problême, ou une méthode propre à faire trouver géométriquement la ſurface de la pyramide ABCDE, ne ſauroit trouver ici ſa place : parce qu'elle ſuppoſe néceſſairement & la connoiſſance des ſections coniques, & quelques autres connoiſſances d'un genre encore plus relevé.

DE QUELQUES USAGES DU COMPAS DE PROPORTION, NÉCESSAIRES POUR L'INTELLIGENCE DE CE QUI A ÉTÉ DIT DANS LE COURS DE CE LIVRE.

589. Tout le monde ſait que le *compas de proportion* eſt com-

posé de deux lames de cuivre ou d'argent, qui tournent autour d'une charniere qui est à leur extrêmité; & que du centre de cette charniere on a mené de part & d'autre, des lignes sur les deux lames qui ont différens noms. Je n'entreprends pas d'expliquer ici tous les usages de ces différentes lignes : cela a été fait par M. Ozanam, dans un petit traité intitulé : *Usage du compas de proportion*, qui se vend à Paris chez Jombert, fils aîné, libraire. Ainsi je me contenterai de parler de la maniere de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données; & de la façon d'inscrire dans un cercle, un polygone qui n'excede pas douze côtés.

La *ligne des parties égales* est ainsi nommée, parce qu'elle est divisée en un certain nombre de petites parties toutes égales, & par conséquent elle peut servir d'échelle.

La *ligne des solides* a été formée de cette sorte. On a fait 64 solides semblables, ou 64 cubes qui étoient entre eux comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c, jusqu'à 64; & l'on a porté les côtés de ces cubes sur la ligne des solides de part & d'autre, en commençant toujours depuis le centre de la charniere : de sorte, par exemple, qu'en prenant la longueur depuis le centre de la charniere jusqu'au nombre 15, & la longuenr depuis la charniere jusqu'au nombre marqué 20; ces deux longueurs expriment les côtés de deux solides semblables, ou de deux cubes, qui seroient entre eux comme 15 à 20.

La *ligne des polygones* a été formée ainsi. On a décrit un cercle dans lequel on a inscrit les polygones réguliers depuis le triangle jusqu'au dodécagone; & l'on a porté les côtés de ces polygones sur la ligne des poligones, à commencer toujours depuis le centre de la charniere: de façon que la longueur prise, par exemple, depuis le centre jusqu'au nombre marqué 5; la longueur prise depuis le centre jusqu'au nombre marqué 7, expriment les côtés du pentagone & de l'eptagone, inscrits dans le même cercle. Cela posé,

590 PROBLÊME I. *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes droites données* a, b. (fig. 376.)

SOLUTION. Je prends avec le compas ordinaire la grandeur de la ligne *a*, & je la porte sur l'une des lignes des parties égales, mettant l'une des pointes sur le centre de la charniere, & laissant tomber l'autre sur cette ligne; pour savoir combien la ligne *a* contient de parties égales. Je fais la même chose à l'égard de la ligne *b*, & trouvant, par exemple, que la ligne *a* contient 30 parties, & que la ligne *b* en contient 17; ces deux lignes sont donc entre elles comme 30

eſt à 17. Je prends encore la grandeur de la ligne *a* avec le compas ordinaire, & j'ouvre le compas de proportion repréſenté ici par l'angle BAC, juſqu'à ce que l'une des pointes du compas ordinaire étant miſe ſur l'un des points 30 de la ligne des ſolides, l'autre pointe tombe ſur l'autre point 30 : cela fait, & le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, je prends la diſtance des points 17, 17 de la ligne des ſolides ; & cette diſtance eſt la premiere des deux moyennes proportionnelles *m*, *n* cherchées. Or, celle-ci étant trouvée, il n'y a plus qu'à prendre une moyenne proportionnelle *n*, entre *m* & *b*, pour avoir la ſeconde.

On comprendra la raiſon de ceci, ſi l'on fait attention que les quatre lignes *a*, *m*, *n*, *b* étant en proportion continue ; on doit avoir $a^3, m^3 :: a. b ::$ 30. 17 : ainſi les lignes *a*, *m* doivent être entre elles comme les côtés de deux cubes ou de deux ſolides ſemblables, qui ſeroient entre eux comme 30 eſt à 17. Or, les lignes *a*, *m* ſont égales par la conſtruction, aux diſtances 30, 30 ; & 17, 17 : & à cauſe des triangles ſemblables 30 A 30, & 17 A 17, nous avons 30, 30 . 17 . 17 :: 30, A. 17, A : donc *a*. *m* :: 30, A ; 17, A. Mais 30, A, & 17, A ſont les côtés de deux ſolides ſemblables ou de deux cubes, qui ſont entre eux comme 30 à 17 : donc les cubes de *a m* ſont auſſi comme 30 eſt à 17 ; & par conſéquent *m* eſt la premiere des deux moyennes proportionnelles cherchées.

591. PROBLÊME II. *Un cercle* ABCD *étant donné ; trouver le côté d'un polygone régulier qu'on veut lui inſcrire.* (fig. 377.)

SOLUTION. Je prends avec le compas ordinaire la grandeur OH du rayon du cercle donné : j'ouvre le compas de proportion, juſqu'à ce que la pointe du compas ordinaire étant miſe ſur l'un des points 6 de la ligne des polygones, l'autre pointe tombe ſur l'autre point 6. Cela fait, & le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, ſi l'on demande le côté du pentagone qu'il faut inſcrire dans le cercle donné ; je prends avec le compas ordinaire, la diſtance 5, 5 des points 5, 5 de la ligne des polygones ; & cette diſtance eſt le côté demandé AB. Car, par la conſtruction, le rayon OH & la ligne AB ſont entre eux comme les diſtances 6, 6 ; & 5, 5 : or, à cauſe des triangles ſemblables 6R6, 5R5 ; on a 6, 6. 5, 5 :: 6R. 5R : donc OH. AB :: 6R. 5 R ; c'eſt-à-dire le rayon OH du cercle donné eſt à la corde AB, comme le côté 6R de l'exagone inſcrit dans le cercle qui a ſervi à la diviſion de la ligne des polygones, eſt au côté 5R du pentagone inſcrit dans le même cercle. Mais le côté 6R de l'exagone eſt égal au rayon du cercle dans lequel l'exagone eſt inſcrit : donc

nous avons le rayon OH du cercle donné, eſt à ſa corde AB, comme le rayon du cercle qui a ſervi pour la conſtruction de la ligne des polygones, eſt à la corde R5 de ce cercle. Mais la corde R5 eſt le côté du pentagone inſcrit dans le cercle qui a ſervi à conſtruire la ligne des polygones : donc le côté AB doit être le côté du pentagone inſcrit dans le cercle donné.

592. Remarque. Tout ce que nous avons dit dans ce chapitre touchant les ſolides & leurs ſurfaces, fait aſſez entrevoir que nous aurions encore beaucoup de choſes à dire ſur cette matiere. Mais comme les méthodes particulieres dont il faudroit ſe ſervir, ſeroient trop longues & trop embarraſſantes; je renvoie ce ſujet au livre ſuivant, où je donnerai des méthodes générales & faciles pour trouver la ſolidité & la ſurface d'une infinité de ſolides.

CHAPITRE XII.

DU TOISÉ DE LA MAÇONNERIE, ET DU TOISÉ DES BOIS.

593. La meſure dont on ſe ſert pour meſurer les longueurs, eſt une longueur nommée *toiſe* ou *toiſe courante*, que l'on diviſe en ſix parties égales nommées *pieds*. Chaque pied ſe diviſe en douze parties égales nommées *pouces* : chaque pouce contient douze parties égales nommées *lignes*; & chaque ligne ſe diviſe encore en douze parties égales nommées *points*, qui ſont des grandeurs extrêmement petites qu'on néglige ordinairement dans la pratique. Ainſi la toiſe courante contenant ſix pieds, & chaque pied douze pouces; il eſt clair que chaque toiſe courante contient 6 fois 12 ou 72 pouces : de même chaque pouce contenant 12 lignes, la toiſe courante doit contenir 72 fois 12, ou 864 lignes.

594. La toiſe quarrée eſt un quarré ABCD (*fig.* 378) dont la baſe AB & la hauteur AD valent chacune une toiſe. Or, comme chaque côté contient 6 pieds; il eſt viſible qu'en multipliant l'un par l'autre, le produit 36 marque que la toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés, ou 36 petits quarrés qui ont un pied de baſe & un pied de hauteur, comme la figure le fait voir. De même chaque pied quarré ayant 12 pouces de baſe & 12 de hauteur, contient 12 fois 12 ou 144 pouces quarrés; & par conſéquent la toiſe quarrée doit contenir 36 fois 144 ou 5184 pouces quarrés. Enfin chaque pouce quarré ayant 12 lignes de baſe & 12 de hauteur, contient 12 fois 12 ou

144 lignes quarrées : d'où il ſuit que la toiſe quarrée contient 5184 fois 144 ou 746496 lignes quarrées.

La toiſe quarrée ſert pour meſurer les ſurfaces : car, ſi une ſurface a trois toiſes de longueur & deux toiſes de largeur ; multipliant l'un par l'autre, on aura 6 toiſes quarrées : c'eſt-à-dire que cette ſurface contiendra ſix fois un quarré dont la baſe & la hauteur ſont chacune une toiſe courante.

595. La toiſe cube AB eſt un cube (*fig.* 379) dont les dimenſions AC, AD, de la baſe & la hauteur AE, valent chacune une toiſe courante. Or, la baſe de ce cube étant une toiſe quarrée, contient 36 pieds quarrés, leſquels étant multipliés par la hauteur AE qui vaut 6 pieds, donnent 216 pieds cubes pour la valeur de la toiſe cubique : ainſi la toiſe cubique contient 216 petits cubes tels qu'on les voit dans la figure, & dont les trois dimenſions ont chacune un pied de longueur. De même les deux dimenſions de la baſe de chaque pied, étant chacune de 12 pouces ; leur produit donne 144 pouces quarrés de baſe, leſquels étant multipliés par la hauteur un pied ou douze pouces, donnent 1728 pouces cubiques pour la valeur du pied cube : d'où il ſuit que la toiſe cube contient 216 fois 1728 ou 373248 pouces cubiques. Enfin les dimenſions de la baſe d'un pouce cubique, étant chacune de 12 lignes de longueur ; leur produit leur donne 144 lignes quarrées, leſquelles multipliées par la hauteur 12 lignes, donnent 1728 lignes cubiques pour la valeur d'un pouce cubique : d'où il ſuit que la toiſe cubique contient 373248 fois 1728, ou 644972544 lignes.

La toiſe cube ſert à meſurer les ſolides : car ſi les deux dimenſions de la baſe d'un ſolide ſont 4, 3, & la hauteur du ſolide 5 ; la baſe ſera quatre fois 3 ou 12 toiſes quarrées, leſquelles multipliées par les 5 toiſes de la hauteur donneront 60 toiſes cubes.

596. La diviſion de la toiſe quarrée en pieds, pouces, & lignes quarrés, étant trop embarraſſante pour le calcul, de même que la diviſion de la toiſe cube en pieds, pouces, & lignes cubiques ; on a trouvé le moyen de faire que les diviſions de ces deux ſortes de toiſes fuſſent les mêmes que celles de la toiſe courante qui facilitent davantage le calcul : & voici comme on a fait.

597. Soit la toiſe quarrée AC, (*fig.* 380). Je diviſe le côté AB en ſix parties égales qui valent par conſéquent chacune un pied ; & des points de diviſion, je mene des paralleles à l'autre côté BC : ce qui diviſe la toiſe en ſix rectangles égaux, qu'on nomme *pieds de toiſe quarrée*, parce qu'ils ont chacun un pied de hauteur & une toiſe de baſe. Je diviſe de même la hauteur de chaque pied de toiſe quar-

rée en 12 parties égales, à cauſe que chaque pied contient 12 pouces; & des points de diviſion, menant des paralleles à la baſe, chaque pied de toiſe quarrée ſe trouve diviſé en 12 rectangles qu'on nomme *pouces de toiſes quarrées*, parce qu'ils ont un pouce de hauteur & une toiſe de baſe. Enfin, diviſant la hauteur de chaque pouce de toiſe quarrée en 12 parties égales, & menant des points de diviſion des paralleles à la baſe; chaque pouce de toiſe quarrée ſe trouve diviſé en 12 petits rectangles qui ont une ligne de hauteur, & une toiſe de baſe, & qui à cauſe de cela, ſont nommés *lignes de toiſe quarrée.* De façon que la toiſe quarrée contient 6 pieds de toiſe quarrée, ou 72 pouces de toiſe quarrée, ou enfin 864 lignes de toiſe quarrée, & cette maniere de diviſer la toiſe quarrée convient très-bien non-ſeulement au calcul, mais encore à la nature des choſes: car il eſt viſible que lorſqu'on multiplie, par exemple, une toiſe par un pied, le produit n'eſt ni un pied ni une toiſe, mais une toiſe de baſe & un pied de hauteur; & ainſi des autres.

598. Soit de même, la toiſe cubique BE, (*fig.* 381). Je diviſe ſa hauteur AB en ſix parties égales; & par les points de diviſion, je fais paſſer des plans paralleles à la baſe: ce qui diviſe la toiſe cubique en 6 parallélepipedes égaux, nommés *pieds de toiſe cubique*, à cauſe qu'ils ont chacun un pied de hauteur, & une toiſe quarrée de baſe. Je diviſe de même la hauteur de chaque pied de toiſe cubique en douze parties égales; & par les points de diviſion, faiſant paſſer des plans paralleles à la baſe, chaque pied de toiſe cubique ſe trouve diviſé en 12 parallélepipedes nommés *pouces de toiſe cubique*, parce qu'ils ont un pouce de hauteur & une toiſe quarrée de baſe. Enfin diviſant la hauteur de chaque pouce de toiſe cubique en 12 parties égales, & par les points de diviſion, faiſant paſſer des plans paralleles à la baſe; chaque pouce de toiſe cubique ſe trouve diviſé en 12 parallélepipedes égaux, nommés *lignes de toiſe cubique*, à cauſe qu'ils ont une ligne de hauteur, & une toiſe quarrée de baſe: de façon que la toiſe cubique contient 6 pieds de toiſe cubique, ou 72 pouces de toiſe cubique, ou 864 lignes de toiſe cubique.

On va voir dans les exemples & dans les problêmes ſuivans, de quelle maniere le calcul ſe ſert des diviſions dons nous venons de parler.

599. Problême I. *Un mur a 23 toiſes 3 pieds 6 pouces 6 lignes de longueur, & 2 toiſes 3 pieds 6 pouces 9 lignes de hauteur: combien contient-il de toiſes quarrées?*

Solution. J'écris le nombre à multiplier, & le multiplicateur à

la façon ordinaire, les toiſes ſous les toiſes, les pieds ſous les pieds, &c : & comme le nombre 2 des toiſes du multiplicateur, n'a qu'un caractere : je multiplie les toiſes, pieds, pouces, & lignes du nombre à multiplier, par 2, en diſant : 2 fois 6 lignes font 12 lignes de toiſe quarrée, ou un pouce. J'écris zéro ſous les lignes, & je retiens 1 : 2 fois 6 pouces, font 12 & 1 de retenu font 13, ou 1 pied de toiſe quarrée & 1 pouce ; j'écris 1 pouce, & je retiens 1 : 2 fois 3 pieds font 6 & 1 de retenu, font 7 ou une toiſe quarrée, & 1 pied que j'écris en retenant une toiſe ; & achevant le reſte à l'ordinaire, j'ai 47 toiſes 1 pied 1 pouce 0 lignes pour le produit de 2 toiſes.

23 *toiſ.* 3 *pieds* 6 *pouc.* 6 *lign.*				
2	3	6	9	
47	1	1	0	
11	4	9	3	
1	5	9	6	$\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$
	1	5	8	$\frac{5}{16} = \frac{5}{16}$
61	1	1	5	$\frac{13}{16}$

Pour multiplier par 3 pieds, je dis : ſi j'avois à multiplier par une toiſe, le produit ſeroit 23 toiſes quarrées 3 pieds 6 pouces 6 lignes de toiſe quarrée : donc 3 pieds qui ne ſont que la moitié d'une toiſe ne doivent donner que la moitié de ce produit, & cette moitié eſt 11 toiſes, 4 pieds, 9 pouces 3 lignes.

Six pouces ſont le ſixieme de 3 pieds ou 36 pouces : or, trois pieds ont produit 11 toiſes 4 pieds 9 pouces 3 lignes ; donc 6 pouces ne doivent donner que le ſixieme de ce produit, & ce ſixieme eſt 1 toiſe 5 pieds 9 pouces 6 lignes $\frac{1}{2}$.

Enfin, 9 lignes ſont le huitieme de 6 pouces ou de 72 lignes : donc 9 lignes ne doivent produire que la huitieme partie du produit que 6 pouces ont donné : ainſi prenant le huitieme de 1 toiſe 5 pieds 9 pouces 6 lignes $\frac{1}{2}$; j'ai 1 pied, 5 pouces, 8 lignes $\frac{3}{16}$.

J'ajoute enſemble tous les produits que je viens de trouver ; & le produit total 61 toiſes 1 pied 1 pouce 5 lignes $\frac{13}{16}$ eſt la ſurface du mur propoſé.

600 PROBLÊME II. *Trouver le contenu d'une ſurface plane qui a* 34 *toiſes* 2 *pieds* 9 *pouces* 8 *lignes de largeur, &* 23 *toiſes* 4 *pieds* 6 *pouces* 8 *lignes de hauteur.*

SOLUTION. Je néglige les 2 pieds 9 pouces 8 lignes de la largeur ; à cauſe qu'il ſeroit trop embarraſſant de les multiplier par les 23 toiſes de la hauteur. Multipliant donc 34 par 23, j'ai les deux produits 102 & 68 rangés comme on voit ici.

Quatre pieds ſont les deux tiers d'une toiſe. Or, ſi je multiplois

34 par une toiſe, le produit ſeroit 34 : donc en multipliant par 4 pieds, le produit doit être les deux tiers de 34. Mais le tiers de 34 eſt 11 toiſes 2 pieds : c'eſt pourquoi j'écris deux fois ce produit 11 toiſes 2 pieds.

34 *toiſ.*	2 *pieds*	9 *pouc.*	8 *lign.*	
23	4	6	8	
102				
68				
11	2			
11	2			
2	5			
0	1	10	8	
7	5	6	2	$\frac{2}{3}$
1	5	10	6	$\frac{2}{3}$
0	5	11	3	$\frac{1}{3}$
0	0	11	10	$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
0	0	3	11	$\frac{14}{27}$
818	5	6	8	$\frac{20}{27}$

Six pouces ſont le quart de deux pieds ou de 24 pouces : prenant donc le quart de ce que deux pieds m'ont rendu, c'eſt-à-dire de 11 toiſes 2 pieds, j'ai deux toiſes 5 pieds.

Huit lignes ſont la neuvieme partie de 6 pouces ou de 72 lignes : ainſi prenant le neuvieme de ce que m'ont produit 6 pouces, c'eſt-à-dire de 2 toiſes 5 pieds; j'ai 0 toiſes 1 pied 10 pouces 8 lignes.

Je reviens maintenant aux 2 pieds 9 pouces 8 lignes, que j'avois d'abord négligés; & je dis, ſi j'avois à multiplier une toiſe par 23 toiſes 4 pieds 6 pouces 8 lignes; le produit ſeroit 23 toiſes 4 pieds 6 pouces 8 lignes. Mais je n'ai à multiplier que par deux pieds, qui eſt le tiers d'une toiſe : donc je ne dois avoir que le tiers de ce produit, & ce tiers eſt 7 toiſes 5 pieds 6 pouces 2 lignes $\frac{2}{3}$.

Neuf pouces ne ſont pas exactement contenus dans deux pieds; c'eſt pourquoi je partage 9 en deux parties 6 & 3, dont l'une 6 eſt le quart de deux pieds ou vingt-quatre pouces, & l'autre 3 eſt la moitié de 6. Or, puiſque 6 pouces eſt le quart de 2 pieds; prenant le quart de ce que 2 pieds ont produit, c'eſt-à-dire de 7 toiſes 5 pieds 6 pouces 2 lignes $\frac{2}{3}$, j'ai une toiſe 5 pieds 10 pouces 6 lignes $\frac{2}{3}$.

Pour 3 pouces, je prends la moitié de ce dernier produit : ce qui donne 5 pieds 11 pouces 3 lignes $\frac{1}{3}$.

Huit lignes n'étant pas exactement contenues dans trois pouces ou 36 lignes, je partage 8 en 2 parties 6 & 2, dont la premiere 6 eſt le ſixieme de 3 pouces, & l'autre 2 eſt le tiers de 6. Ainſi prenant le ſixieme de ce que trois pouces ont produit, j'ai 11 pouces 10 lignes $\frac{2}{3}$, & prenant le tiers de ce dernier produit, j'ai 3 pieds 11 lignes $\frac{14}{27}$.

Enfin, ajoutant tous les produits enſemble; le produit total 818 toiſes 5 pieds 6 pouces 6 lignes $\frac{20}{27}$ eſt le contenu de la ſurface propoſée.

601. Pour faciliter le calcul, il eſt quelquefois néceſſaire de faire de fauſſes ſuppoſitions, ainſi qu'on va voir dans l'exemple ou dans le problême ſuivant.

602. PROBLÊME III. *Trouver la valeur d'une ſurface qui a 32 toiſes de largeur, & 25 toiſes 9 pouces de hauteur.*

SOLUTION. Je multiplie d'abord 32 par 25 : ce qui donne les deux produits 160 & 64, diſpoſés comme on les voit ici.

Maintenant comme il ſeroit trop embarraſſant de chercher ce que 9 pouces eſt à l'égard d'une toiſe; je ſuppoſe que j'aie à multiplier 32 toiſes par un pied qui eſt le ſixieme d'une toiſe. Or, ſi j'avois à multiplier par une toiſe, le produit ſeroit 32 toiſes : donc en multipliant par un pied, je dois avoir le ſixieme de 32, c'eſt-à-dire 5 toiſes 2 pieds que j'écris, mais que j'effacerai enſuite, parce qu'il n'y a point de pieds dans le nombre à multiplier.

32 *toiſes*		
25 *toiſes*	0 *pieds*	9 *pouces*
160		
64		
5	2	
2	4	
1	1	
804	0	

Enſuite 9 pouces n'étant pas exactement contenus dans un pied ou 12 pouces, je diviſe 9 en deux parties 6 & 3, dont la premiere 6 eſt la moitié d'un pied, & l'autre 3 eſt la moité de 6. Après quoi je prends pour 6 pouces, la moitié de 5 toiſes 2 pieds; ce qui donne 2 toiſes 4 pieds; & pour 3 pouces je prends la moitié de 2 toiſes 4 pieds: ce qui donne 1 toiſe 2 pieds.

J'efface le produit 5 toiſes 2 pieds qui vient d'une fuſſe ſuppoſition; & ajoutant enſemble les autres produits, j'ai 804 toiſes pour la valeur de la ſurface propoſée.

603. REMARQUE. Il eſt bon d'obſerver que ſi l'on demandoit d'extraire la racine quarrée d'un produit ou d'une ſurface plane compoſée de toiſes quarrées, de pieds, pouces, & lignes de toiſe quarrée, il ne ſuffiroit pas de réduire tout en lignes de toiſe quarrée, mais qu'il faudroit outre cela réduire ces lignes en lignes quarrées, c'eſt-à-dire, multiplier les lignes de toiſe quarrée par le nombre de lignes quarrées qu'elles contiennent.

Soit le produit 6 toiſes 4 pieds 0 pouces 6 lignes de toiſe quarrée dont on demande d'extraire la racine quarrée. Je réduis tout en

lignes, ce qui donne 5766 lignes de toiſe quarrée. Or, comme chacune de ces lignes eſt le produit d'une toiſe de longueur par une ligne de hauteur, & qu'une toiſe contient 864 lignes, il s'enſuit que chaque ligne de toiſe quarrée contient 864 lignes quarrées : multipliant donc 5766 par 864, le produit eſt 4981824 lignes quarrées, dont la racine eſt 2232 lignes qui font 2 toiſes 3 pieds 6 pouces ; & en effet ſi l'on multiplie 2 toiſes 3 pieds 6 pouces par 2 toiſes 3 pieds 0 pouces, le produit ſera 6 toiſes 4 pieds 0 pouces 6 lignes, comme il étoit propoſé.

La raiſon de ceci eſt, que les lignes de toiſe quarrée étant compoſée de deux quantités de différente eſpece, c'eſt-à-dire, d'une toiſe de longueur & d'une ligne de hauteur ; l'extraction de leur racine ne peut donner ni des lignes ni des toiſes : & que par conſéquent ſi l'on veut faire cette extraction, il faut néceſſairement réduire les lignes de toiſe quarrée en lignes quarrées, dont la hauteur & la longueur ſont de même eſpece.

Et il faut faire la même remarque à l'égard des pieds de toiſe quarrée.

604. PROBLÊME IV. *Trouver le contenu d'un ſolide qui a* 12 *toiſes* 3 *pieds* 4 *pouces de longueur*, 6 *toiſes* 2 *pieds* 6 *pouces de largeur*, & 13 *toiſes* 4 *pieds de hauteur.*

SOLUTION. Je multiplie la longueur par la largeur : ce qui donne 80 toiſes quarrées 3 pieds 9 pouces 11 lignes de toiſe quarrée & $\frac{1}{3}$ de ligne. Je multiplie ce produit par la hauteur 13 toiſes 4 pieds : ce qui donne 1102 toiſes cubiques 0 pieds 3 pouces 11 lignes de toiſe cubique, & $\frac{1}{9}$ de ligne pour la ſolidité demandée.

12 *toiſes*	3 *pieds*	4 *pouces*		
6	2	6	6 *lignes*	
75	2	0		
4	1	1	4	
1	0	3	4	
0	0	6	3 *lign.* $\frac{1}{3}$	
80 *toiſes*	3 *pieds*	9 *pouces*	11	$\frac{1}{3}$
13	4			
240				
80				
26	4			
26	4			
6	5			
1	4	3		
ϕ	x	x	x	
0	0	6	10	
0	0	3	5	
0	0	2	3	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
0	0	0	4	$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$
1102	0	0	11	$\frac{9}{9}$

605. Il faut encore remarquer ici, que ſi l'on demandoit d'extraire la racine cubique d'un produit compoſé de toiſes cubiques, de pieds, pouces, & lignes

de toiſe cubique ; il faudroit non-ſeulement tout réduire en lignes de toiſe cubique, mais encore multiplier ces lignes par le nombre de lignes cubiques qu'elles contiennent, ou par 746496 : car la ligne cubique ayant une toiſe quarrée de baſe, laquelle vaut 746496 lignes quarrées (594), & une ligne de hauteur, vaut par conſéquent 746496 lignes cubiques. Après quoi, on feroit l'extraction de la racine cubique à l'ordinaire.

Que ſi outre les lignes de toiſe cubique, il ſe trouvoit une fraction de ligne, par exemple $\frac{1}{6}$; on prendroit le ſixieme de 746496 lignes quarrées, qui eſt la valeur d'une ligne de toiſe cubique, & on l'ajouteroit aux lignes cubiques qu'on auroit trouvé en faiſant la réduction : & ſi en faiſant cette addition il ſe trouvoit une fraction de ligne cubique, on réduiroit tout en cette fraction &c.

DU TOISÉ DES BOIS DE CHARPENTE, DE MENUISERIE, DE CHARRONNAGE, &c.

606. Le bois qui a encore toute ſon écorce ſe nomme *bois en grume* : celui dont on a ôté l'écorce avec la hache, & qu'on a équarri en forme de parallélepipede aſſez défectueux, ſe nomme *bois de brin* : enfin celui qu'on équarrit avec la ſcie, ſe nomme *bois de ſciage*.

Tout bois équarri avec la hache ou avec la ſcie étant fait en forme de parallélepipede, a pour baſe une figure de quatre côtés dont les deux dimenſions, qui ſont la largeur & la hauteur du bois, ſe nomment *dimenſions de l'équarriſſage* ; & quand ces deux dimenſions ſont inégales, le bois ſe nomme mi-plat ou à deux faces.

Le *bois en grume*, c'eſt-à-dire, le tronc d'un arbre, ou ſes branches, étant toujours fait comme une eſpece de colonne qui va en diminuant, a par conſéquent deux baſes circulaires, l'une inférieure & l'autre ſupérieure, laquelle eſt moindre que l'inférieure. C'eſt pourquoi on prend ordinairement ſon diametre vers le milieu de la longueur, pour faire une juſte compenſation. Mais comme l'écorce eſt inutile pour les ouvrages qu'on veut faire avec ces ſortes de bois, on retranche trois pouces du diametre & l'on quarre le reſte ; ce qui donne à la vérité un équarriſſage plus grand qu'il ne faut, puiſque le quarré du diametre eſt plus grand que ſon cercle : mais ce défaut ſe trouve compenſé d'un autre côté par les trois pouces que l'on ôte pour l'écorce, n'y ayant gueres d'arbres qui en ait un pouce & demi. Après-tout, dans ces ſortes de marchés, il vaut mieux ſuivre l'uſage établi parmi les Marchands, que de vouloir les aſſujettir à une exactitude géométrique à laquelle ils n'entendroient rien,

& qui par-là les mettroit ſans ceſſe dans la crainte qu'on ne voulût les tromper.

607. La meſure dont on ſe ſert pour les bois ſe nomme *ſolive*. C'eſt un ſolide AB (fig. 382) dont la longueur AC eſt d'une toiſe ou 6 pieds; la largeur AD de 12 pouces ou 1 pied; & la hauteur AH de 6 pouces. Ainſi ce ſolide eſt de 3 pieds cubiques : car multipliant la longueur 6 pieds par la largeur un pied; le produit eſt ſix pieds quarrés, leſquels multipliés par la hauteur 6 pouces ou un demi-pied, donnent trois pieds cubiques.

Si l'on coupe la hauteur AH en ſix parties égales, & que par les points de diviſion on coupe la ſolive parallelement à ſa baſe ou dans toute ſa longueur; la ſolive ſe trouvera partagée en 6 parties égales qu'on nomme *pieds de ſolive* : de même diviſant la hauteur d'un pied de ſolive en 12 parties égales, & coupant le pied dans toute ſa longueur ſelon ces diviſions; le pied de ſolive ſera diviſé en 12 parties égales qu'on nomme *pouces de ſolive* : enfin diviſant la hauteur d'un pouce de ſolive en 12 parties égales, & coupant le pouce dans toute ſa longueur ſelon ces diviſions, on aura 12 *lignes de ſolive*. Les dimenſions de l'équarriſſage dans la ſolive, ſont la largeur AD, & la hauteur AH.

608. La toiſe cube, comme nous avons dit ci-deſſus (595) contient 216 pieds cubes, & la ſolive en contient 3 : diviſant donc 216 par 3, le quotient 72 fait voir que la toiſe cube contient 72 ſolives, ou qu'elle eſt 72 fois plus grande que la ſolive. Or, comme la toiſe cubique contient 6 pieds de toiſe cubique, le pied 12 pouces de toiſe cubique, & le pouce 12 lignes de toiſe cubique; de même que la ſolive contient 6 pieds de ſolive, le pied 12 pouces de ſolive, & le pouce 12 lignes; il s'enſuit que les pieds, pouces, & lignes de toiſe cubique ſont auſſi 72 fois plus grands que les pieds, pouces, & lignes de ſolive.

609. Après ce qui vient d'être dit, il eſt aiſé de voir que ſi l'on toiſe une piece de bois à la façon ordinaire, pour avoir ſa ſolidité en toiſes, pieds, pouces, & lignes de toiſe cubique, & qu'on multiplie enſuite cette ſolidité par 72; le produit fera voir combien cette piece de bois contient de ſolives : en voici un exemple.

610. PROBLÊME. *Trouver le nombre de ſolives qu'on peut tirer d'un tronc d'arbre dont la longueur eſt de 4 toiſes 3 pieds, & le diametre pris dans le milieu de la longueur eſt de 3 pieds 9 pouces, 6 lignes.*

SOLUTION I. Je retranche du diametre 3 pouces, pour la raiſon

que j'en ai apportée ci-deſſus ; & j'ai o toiſes, 3 pieds, 6 pouces 6 lignes, dont je fais le quarré en diſant : s'il falloit multiplier par une toiſe, le produit ſeroit o toiſes 3 pieds 6 pouces 6 lignes : donc en multipliant par 3 pieds, qui eſt la moitié d'une toiſe, je dois avoir la moitié de ce produit ; & cette moitié eſt 1 pied, 9 pouces, 3 lignes.

Six pouces ſont le ſixieme de trois pieds : c'eſt pourquoi je prends le ſixieme de ce que 3 pieds ont produit, & ce ſixieme eſt 3 pouces 6 lignes & $\frac{1}{2}$.

Pour 6 lignes, qui ſont le douzieme de 6 pouces, je prends le douzieme de ce que 6 pouces ont produit : ce qui donne 3 lignes & $\frac{13}{24}$. J'ajoute tous ces produits enſemble ; & le produit total o toiſes 2 pieds de toiſe quarrée 1 pouce une ligne & $\frac{1}{24}$, eſt le quarré du diametre.

Je multiplie ce quarré par la longueur 4 toiſes 3 pieds, à la façon ordinaire ; & le produit 1 toiſe cubique 3 pieds 4 pouces 10 lignes de toiſe cubique, & $\frac{35}{48}$, eſt la ſolidité du tronc.

Pour ſçavoir combien ce produit contient de ſolives ; je le multiplie par 72, à cauſe que la toiſe cubique contient 72 ſolives, en diſant : une fois 72 fait 72 ſolives. Pour 3 pieds je prens 36, qui eſt la moitié de 72 : pour 4 pouces qui ſont le neuvieme de 3 pieds, je prends le neuvieme de 36 qui eſt quatre : je partage 10 lignes en 2 parties 8 & 2, dont la premiere 8 eſt le ſixieme de 4 pouces, & la ſeconde 2 eſt le quart de 8 : ainſi je prends le ſixieme de 4 ſolives, ce qui donne 4 pieds de ſolive, & prenant enſuite le quart de 4 pieds, j'ai un pied de ſolive.

o *toiſes*	3 *pieds*	6 *pouces*	6 *lignes*	
o	3	6	6	
o	1	9	3	
	o	3	6	$\frac{1}{2}$
		o	3	$\frac{13}{24}$
o	2	1	1	$\frac{1}{24}$
4	3			
1	2	4	4	$\frac{1}{6}$
	1	o	6	$\frac{25}{48}$
1	3	4	10	$\frac{35}{48}$
72				
72 *ſoliv.*				
36				
4				
o *ſoliv.*	4 *pieds*			
	1			
		4 *pouces*		
		4	1 *lign.*	$\frac{1}{2}$
112	5	4	1	$\frac{1}{2}$

Pour $\frac{35}{48}$ je dis : deux lignes m'ont rendu un pied de ſolive, donc une ligne doit rendre un demi pied ou 6 pouces : & ceci n'eſt qu'une

fauſſe ſuppoſition que j'effacerai, parce quelle ne doit pas entrer en ligne de compte. Or, 6 pouces ſont 72 lignes, dont la quarante-huitieme partie eſt 1 ligne $\frac{1}{2}$: multipliant donc 1 ligne & $\frac{1}{2}$ par 33, le produit 49 lignes $\frac{1}{2}$, ou 4 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ eſt ce que doit produire la fraction $\frac{33}{48}$. J'ajoute tous ces produits enſemble, & j'ai 112 ſolives 5 pieds 4 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ contenues dans le tronc propoſé.

611. Si la piece de bois à meſurer étoit équarrie avec la hache ou la ſcie, & que ſes trois dimenſions fuſſent inégales ; on multiplieroit ſes trois dimenſions les unes par les autres pour avoir ſa ſolidité, & l'on multiplieroit ſa ſolidité par 72 : ce qui donneroit le nombre de ſolives contenues dans la piece.

612. Il eſt indifférent de multiplier d'abord les trois dimenſions les unes par les autres, & enſuite la ſolidité par 72 ; ou de multiplier l'une des dimenſions de l'équarriſſage par 72, & enſuite par les autres dimenſions ; car le produit total ſera toujours le même, puiſque les multiplicateurs ſeront toujours les mêmes. Or, de-là on a tiré une autre méthode qui abrege beaucoup le calcul, ainſi qu'on va voir.

613. SOLUTION II. Suppoſons le même tronc d'arbre de l'exemple précédent : ſon diamétre eſt 0 toiſe 3 pieds, 6 pouces, 6 lignes. Or, avant de le multiplier par lui-même, je réduis les pieds en pouces, & les ajoutant aux 6 pouces, j'ai 42 pouces 6 lignes. Je mets les 42 pouces au rang des toiſes, & par-là je fais la même choſe que ſi je multipliois 42 pouces par 72 ; à cauſe que la toiſe eſt 72 fois plus grande que le pouce. Quant aux ſix lignes, je vois que ſi je les mets au rang des pieds, elles deviendroient 144 fois plus grandes ; à cauſe que le pied contient 144 lignes ; & par conſéquent ces lignes, au lieu d'être multipliées par 72, ſe trouveroient multipliées par 144 ou 2 fois 72 ; ce qui eſt la moitié trop : c'eſt pourquoi au lieu de 6, je ne mets au rang des pieds que la moitié de 6, c'eſt-à-dire 3. J'ai donc 42 toiſes 3 pieds, qui ſont la même choſe que 42 pouces ſix lignes, multipliées par 72.

Je multiplie 42 toiſes 3 pieds, par 0 toiſes 3 pieds 6 pouces 6 lignes ; & le produit 25 toiſes 0 pieds 6 pouces 3 lignes eſt 72 fois plus grand qu'il ne faut pour être le quarré du diametre : & par conſéquent ce produit eſt le quarré du diametre multiplié par 72.

Je multiplie ce produit par la lon-

42 *toiſes*	3 *pieds*	6 *pouces*	6 *lignes*	
0	3	6		
21	1	6		
3	6	3		
0	1	19	3	
25	0	6	3	
4	3			
100	2	1	0	
12	3	3	3	$\frac{1}{2}$
112	5	4	1	$\frac{1}{2}$

gueur 4 toiſes 3 pieds; & le produit 112 toiſes, 5 pieds, 4 pouces, 1 ligne $\frac{1}{2}$, eſt 72 fois plus grand qu'il ne faut pour être la ſolidité du tronc : donc ce produit eſt le nombre de ſolives contenues dans ce tronc.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

614. Si au lieu de diviſer la toiſe en pieds, pouces & lignes ; on la diviſe d'abord en dix parties, chacune deſquelles ſera $\frac{1}{10}$; puis chaque dixieme en dix parties, qui ſeront des dixiemes de dixiemes, ou des centiemes ; puis chaque centieme en dix parties qui ſeront des dixiemes de centiemes, ou des milliemes, & ainſi de ſuite ; les fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, &c, ſeront ce qu'on appelle *Fractions décimales.*

615. Les dixiemes ſe nomment *Primes* : les centiemes ſe nomment *Secondes*, les milliemes *Tierces*, les dix milliemes *Quartes*, &c.

616. Pour n'avoir pas l'embarras des dénominateurs & des numérateurs, on écrit $1'$, $2'$, $3'$, &c ; au lieu de $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, &c. De même au lieu de $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, &c ; on écrit $1''$, $2''$, $3''$, &c. Au lieu de $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, &c ; on écrit $1'''$, $2'''$, $3'''$, &c, & ainſi de ſuite. De façon que pour dire un dix millieme ou une quarte, on écrit 1^{iv} : pour dire une quinte, on marque 1^{v}, &c : & enfin, pour marquer un entier, ou deux, ou 3, on écrit 1°, 2°, 3°, &c.

617. Au moyen de ceci, il eſt aiſé d'éviter les difficultés & l'ennui que l'on éprouve ſouvent dans le calcul ordinaire des fractions, ainſi qu'on va voir dans les exemples ſuivans.

618. Exemple I. *Pour réduire* 3°, $5'$ *à la derniere eſpece, c'eſt-à-dire en primes ;* il n'y a qu'à écrire $35'$: car 3° $5'$ ſont la même choſe que $3\frac{5}{10}$.

Mais *pour réduire* $3\frac{5}{10}$ *en dixiemes*, il faut multiplier l'entier 3 par 10, ce qui fait 30 ; & y ajouter 5, ce qui fait 35 ; puis écrire $\frac{35}{10}$: car $\frac{35}{10}$ ſont la même choſe que $35'$. Donc, &c.

Par la même raiſon, *ſi l'on veut réduire* 2°, $3'$, $4''$ *en ſa derniere eſpece, c'eſt-à-dire en ſecondes* ; on écrit $234''$. Car pour réduire les primes ou dixiemes $3'$, en centiemes ; il faut les multiplier par 10 : ce qui ſe fait en écrivant $34''$; à cauſe que le nombre 3 devient par-là dix fois plus grand que s'il étoit ſeul : & pour réduire l'entier 2°, en ſecondes ou centiemes ; il faut le multiplier par 100 ; ce qui ſe fait encore en écrivant $234''$, à cauſe que le nombre 2 devient par-là 100 fois plus grand qu'il ne faut. Donc, &c.

619. Exemple II. *Pour réduire* $35'$ *en entier*, on écrit 3°. $5'$: car 35 ſont la même choſe que $\frac{35}{10}$. Or pour réduire $\frac{35}{10}$ en entier ; il faut diviſer

diviſer 35 par 10, & le quotient 3 marque trois entiers avec un reſte $\frac{5}{10}$. Donc, &c.

De même *pour réduire* 234″ *en entier*, on écrit 2°. 3′. 4″. Car par-là le nombre 3 devient dix fois plus petit, puiſqu'il eſt ſeul ; & le nombre 2 devient 100 fois plus petit. Ainſi c'eſt la même choſe que ſi on avoit diviſé 234 par 100, ce qui eût donné 2 entiers ; & qu'on eût diviſé les 34 reſtans par 10, ce qui auroit donné 3 dixiemes, & 4 centiemes.

620. Exemple III. *Pour ajouter* 2°. 3′. 4″. *avec* 3°. 2′. 3″ ; on réduit l'un & l'autre nombre à ſa derniere eſpece ; ce qui donne 234″ & 323″ : puis ajoutant l'un à l'autre, on a la ſomme 557″ ou 5°. 5′ 7″.

Pour ajouter 2°. 3′. 4″ 5‴, *avec* 3°. 2′. 3″ ; on réduit l'un & l'autre à ſa derniere eſpece : ce qui donne 2345‴ & 323″. Mais comme ces deux nombres ne ſont pas de la même eſpece, on ajoute un zero au dernier : ce qui fait 3230‴ qui eſt encore le même que 323″ ; à cauſe que 323″ eſt la même choſe que $\frac{323}{100}$, & que 3230‴ eſt la même que $\frac{3230}{1000}$, & que les deux fractions $\frac{323}{100}$ & $\frac{3230}{1000}$, ne ſont pas différentes ; c'eſt pourquoi ajoutant enſemble 2345‴ & 3230‴, la ſomme ſera 5575‴ ou 5°. 5′ 7″ 5‴.

621. Exemple IV. *Pour ſouſtraire* 2°. 3′. 4″ *de* 4°. 5′. 3″, on réduit tout aux dernieres eſpeces ; ce qui donne 234″ & 453″ : puis en faiſant la ſouſtraction, le reſte eſt 219″ ou 2°. 1′. 9″.

Pour ſouſtraire 2345‴ de 654″, on ajoute un zéro à ce dernier ; ce qui donne 6540‴ : puis faiſant la ſouſtraction, le reſte eſt 4195‴ ou 4°. 1′. 9′. 5‴.

622. Exemple V. *Pour multiplier* 235″ *par* 32′, on multiplie à l'ordinaire, ce qui donne 7520 ; & ajoutant le caractere du prime avec celui des ſecondes, on écrit 7520‴ : car 235″ ſont la même choſe que $\frac{235}{100}$; & 32′ ſont la même choſe que $\frac{32}{10}$. Or, pour multiplier des centiemes par des dixiemes ou 100 par 10, il n'y a qu'à ajouter un zéro ; ce qui donne des $\frac{1}{1000}$: & pour exprimer des milliémes, par exemple 3, on écrit 3‴ ; donc &c.

De même pour multiplier 235″ par 2351‴, on multiplie à l'ordinaire ; ce qui donne 552481 : & ajoutant enſemble le caractere des ſecondes avec celui des tierces, on écrit 552481ᵛ, & ainſi des autres : car des ſecondes ou $\frac{1}{100}$, multipliées par des tierces ou des $\frac{1}{1000}$, donnent $\frac{1}{100000}$ ou des quintes.

623. Exemple VI. *Pour diviſer* 2784‴ *par* 232″, on fait la diviſion à l'ordinaire ; & le quotient eſt 12 : puis retranchant du ca-

ractere des tierces le caractere des secondes, on écrit 12′ ou 1°. 2′. Car des tierces ou des $\frac{1}{1000}$ divisés par des secondes ou des $\frac{1}{100}$, donnent des dixiemes ou des primes, &c.

624. Remarque. Ce calcul seroit aussi beau qu'il paroît brillant, s'il pouvoit se faire qu'on réduisît toutes les mesures en dixiemes; puis en dixiemes de dixiemes, &c. Mais tant que les divisions ou soudivisions ordinaires subsisteront, on n'y gagnera rien : par la raison qu'on sera toujours obligé d'évaluer les primes, secondes, ou tierces qu'on trouvera.

625. Par exemple, supposons qu'une surface ait 2°. 3′. 2″ de largeur, & 3°. 2′. 3″ de hauteur.

Si je veux trouver la valeur de cette surface, il faut que je multiplie 232″ par 323″ : ce qui donne 74936^{iv}, ou 7°. 4936^{iv}, ou 7 toises quarrées $\frac{4936}{10000}$.

Maintenant si je veux savoir combien cette fraction vaut de pieds de toise quarrée; il faut que je dise par regle de trois : la toise étant divisée en 10000 parties, j'en ai 4936; la même toise étant divisée en six pieds, combien aurai-je? Et la Regle faite, je trouve 2 pieds & une fraction $\frac{9616}{10000}$.

Pour évaluer cette seconde fraction, il faut que je multiplie le numérateur 9616 par 12, & que je divise le produit par 10000, ce qui donne 11 pouces, & une fraction $\frac{5393}{10000}$, qu'il faut que j'évalue encore, & ainsi de suite.

Or il est visible que ces évaluations sont plus pénibles que celles que j'aurois faites, si je m'étois servi du calcul des divisions & soudivisions ordinaires; à cause que les numérateurs & dénominateurs sont beaucoup plus grands : donc il est clair aussi qu'on ne gagne rien par le calcul des décimales, & que si l'on paroît éviter d'abord quelques difficultés, on se jette nécessairement dans de plus grandes sur la fin du calcul.

FIN du premier Volume.

TABLE DES MATIERES

CONTENUES DANS CE PREMIER VOLUME.

LIVRE PREMIER,

Contenant les Elémens de l'Arithmétique, de l'Algebre, de l'Analyſe, & des Proportions.

CHAP. I. *DE L'ARITHMÉTIQUE. Définitions & principes*, pag. 1
Idée générale & diviſion des Nombres, 4

CHAP. II. *Contenant l'explication des quatre premieres Regles d'Arithmétique. Addition ſimple*, 6
Addition compoſée, 7
Souſtraction ſimple, 8
Souſtraction compoſée; 10
Multiplication ſimple, 11
Diviſion ſimple, 14

CHAP. III. *DES FRACTIONS*, 19
Réduire deux ou pluſieurs fractions à un même dénominateur, 22
Réduire un entier en fraction dont le dénominateur ſoit donné, 23
Réduire en entier une fraction improprement dite, ou dont le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, ibid.
Réduire une fraction aux plus petits nombres qui puiſſent l'exprimer, 24
Evaluer une fraction, 25
Ajouter enſemble deux ou pluſieurs fractions, 26
Souſtraire une fraction d'une autre, 27
Multiplier une fraction par une autre, 28
Diviſer une fraction par une autre, ibid.
Des fractions de fractions, 29

CHAP. IV. *De la Multiplication & de la Diviſion compoſée*, ibid.
De la Diviſion compoſée, 35

CHAP. V. *DE L'ALGEBRE*, 40
Des ſignes de l'Algebre, 41
Des grandeurs complexes & incomplexes, poſitives & négatives, 42
De l'Addition des grandeurs littérales, 43
De la Souſtraction des grandeurs littérales, 45

De la Multiplication des grandeurs littérales, 46
De la Diviſion des grandeurs littérales, 49
Des Puiſſances des grandeurs incomplexes, 53
Des Puiſſances des grandeurs complexes, 54
Table des Puiſſances d'un Binome, 55
De l'Extraction des Racines des grandeurs littérales, 59
De l'Extraction de la Racine quarrée des grandeurs numériques, 63
Formation du quarré, & éclairciſſemens ſur les fractions; 64 & 69
De l'Extraction de la racine quarrée des grandeurs numériques par approximation, 74
De l'Extraction de la racine cubique des quantités numériques, 76
De l'Extraction de la Racine cubique des grandeurs numériques par approximation, 80
Du Calcul des grandeurs radicales, 82
Changer une grandeur non radicale en une autre qui ſoit radicale & dont l'Expoſant ſoit donné, 84
Tirer une grandeur hors du ſigne radical, 85
Réduire à un même ſigne deux ou pluſieurs grandeurs radicales qui ont différens ſignes, 86
Ajouter les grandeurs radicales, 87
Souſtraire les grandeurs radicales, 88
Multiplier les grandeurs radicales, ibid.
Diviſer les grandeurs radicales, 89
Du Calcul des Expoſans, 90
Du Calcul des Expoſans des puiſſances des multinomes, 94

CHAP. VI. *DE L'ANALYSE*, 96
Principes ou axiomes, ibid.
De la nature des Problêmes, & de la façon de les réſoudre par l'Analyſe, 97
Maniere de dégager une inconnue qui ſe trouve ſeule dans une équation, 100
Exemples des Problêmes déterminés, 103
Des Equations compoſées qui ne contiennent qu'une inconnue, 109
De la formation des Equations compoſées, 111
De la Réſolution des Equations du ſecond degré, 114
De la Réſolution des Equations du troiſieme, quatrieme, cinquieme degré, &c. 119
Des Problêmes indéterminés, & des Equations compoſées, 123

CHAP. VII. *LES PROPORTIONS. Des Raiſons, Proportions & Progreſſions arithmétiques*, 130

De la maniere de compter les Piles de Boulets, 141

CHAP. VIII. *Des Raiſons, Proportions, & Progreſſions Géométriques*, 150
De la Proportion inverſe, 158
De la Regle de Trois directe, ibid.
De la Regle de Trois indirecte, 159
De la Regle de Compagnie ou de Société, ibid.
De la Regle d'Alliage, 160
Des Progreſſions géométriques, 165

CHAP. IX. *Des Raiſons compoſées*, 170
Des Regles que les Arithméticiens nomment Regles de Cinq, de Sept, de Neuf, &c, 176

CHAP. X. *Des incommenſurables*, 177

CHAP. XI. *Des Logarithmes*, 181

LIVRE SECOND,

Qui contient les Elémens de la Géométrie théorique & pratique des Lignes, des Surfaces, & des Solides, de la Trigonométrie, des Sections coniques, du Toiſé de la Maçonnerie & des Bois, & du Calcul des Fractions décimales.

DE L'ETENDUE EN LONGUEUR, OU DES LIGNES.

CHAP. I. *DÉFINITIONS & PRINCIPES. Origine & propriété des Lignes*, 189

CHAP. II. *Des Lignes droites, des angles qu'elles forment, des lignes perpendiculaires & des lignes paralleles*, 197
Des Angles, & de leur valeur, 200
Des Lignes perpendiculaires, 284
Des Lignes paralleles, 214

CHAP. III. *Des Triangles & des Figures de pluſieurs côtés, conſidérés par rapport à leurs côtés & à leurs angles*, 225
Des Figures compriſes ſous plus de trois côtés : Quadrilateres, Polygones, 235

CHAP. IV. *De la Puiſſance des Lignes : leurs produits*, 243

CHAP. V. *Des Raiſons, Proportions & Progreſſions géométriques des Lignes : leurs rapports*, 253

De l'Hypothénuſe, 263
Des Lignes directement proportionnelles, 268
Des Lignes réciproquement proportionnelles, 270
Section des Lignes ſelon des raiſons données, 273
Sections harmoniques des Lignes, 279

CHAP. VI. *Des Propriétés du Cercle : Cordes, Angles inſcrits*, 289
Propriétés du Cercle, utiles pour l'intelligence des Sections coniques : Tangentes, Sécantes, 322

CHAP. VII. *De l'Inſcription des Polygones réguliers dans un cercle, & de leur circonſcription autour du cercle.* 333

CHAP. VIII. *De la Trigonométrie, de la Longimétrie, & du Nivellement*, 338
De la Réſolution des triangles rectangles, 342
De la Réſolution des Triangles obliquangles, ou qui ne ſont pas rectangles, 344
De la Longimétrie : divers Problêmes, 346
Du Nivellement : divers Problêmes, 352
Table des hauſſemens du Niveau apparent, 356

DE L'ETENDUE EN LONGUEUR ET EN LARGEUR, OU DES SURFACES.

CHAP. IX. *De la Planimétrie ou Meſure des Surfaces planes, & de leur rapport entre elles : figures ſemblables, figures égales*, 358
Du changement des Figures & de leur réduction de grand en petit & de petit en grand : leur égalité, leurs rapports, 372
De la Géodéſie ou diviſion des Figures ſur le terrein, 382
Des Figures iſopérimetres, 387

CHAP. X. *Des différentes poſitions des Lignes à l'égard des Plans, & de celle des Plans entre eux*, 397

DE L'ETENDUE EN LONGUEUR, LARGEUR, ET PROFONDEUR, OU DES SOLIDES.

CHAP. XI. *De la Stéréométrie : ou de la Meſure des ſolides, de leurs Surfaces, & de leurs rapports*, 405
Polidité des Priſmes, des Cylindres, & des Cubes, 407
Solidité des Pyramides & des Cônes, 409
Solidité des Spheres, 416
Solidité des Onglets cylindriques, 418
Solidité d'un Anneau fermé, d'un Anneau ouvert, 427

Du Rapport des Solides, & de leur changement, 433
De la ſurface des différens Solides. 439
De quelques Uſages du Compas de proportion néceſſaires pour l'intelligence de ce qui a été dit dans le cours de ce Livre. 450
CHAP. XII. *Du Toiſé de la Maçonnerie, & du Toiſé des Bois,* 453
Du Toiſé des Bois de charpente, de menuiſerie, de charronnage, &c, 460
Des Fractions décimales, 464

Fin de la Table.

REMARQUES.

IL eſt à propos de préſenter ici au Public le tableau abrégé des additions & des changemens qui ont été faits à l'Ouvrage de M. l'Abbé Deidier dans cette nouvelle édition.

I°. Dans le premier volume, on n'a ajouté aucun article notable au corps de l'Ouvrage. On a changé pour le fond des choſes, d'abord la maniere de faire la diviſion compoſée, page 17; enſuite la définition de la Raiſon géométrique, pages 130 & 131; enfin l'article de la troiſieme remarque de la page 449. Quant aux changemens de correction, de ponctuation, de goût typographique, & quelquefois de goût géométrique, qui n'alterent en rien le fond de l'Ouvrage, ils ſont ſans nombre & dans le premier & dans le ſecond volume.

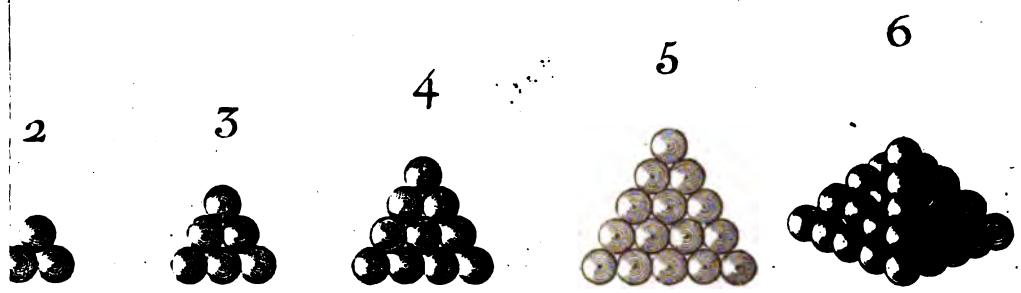
II°. Les principales additions qui ont été faites au même Ouvrage dans le ſecond volume, ſont d'abord tout l'article des Equations aux Sections coniques, depuis le commencement de la page 116 juſqu'à la page 122; enſuite l'article qui a pour objet l'angle d'inclinaiſon d'un Mortier ou d'un Canon, depuis la fin de la page 202 juſqu'au commencement de la page 205; enfin l'article du Thermometre, depuis le milieu de la page 374, juſqu'au milieu de la page 378. La plupart des autres additions ſont dans des notes, telles que celles des pages 123, 159, 170, 351, 370, 372, 381.

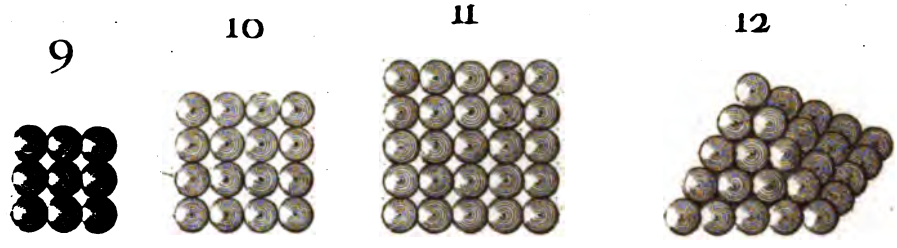
III°. On trouve auſſi un petit nombre de ſemblables notes, répandues dans ce premier volume, pages 130, 247, 338, 437: mais il y en manque une que nous allons placer ici, & qui eſt relative à l'article 219 de la page 114.

Il y a un défaut d'exactitude dans ce que dit M. l'Abbé Deidier,

concernant la Regle de Deſcartes, ſur l'eſpece des Racines d'une équation déterminée par la ſucceſſion ou le changement des ſignes. Car il n'eſt pas vrai qu'il y ait toujours autant de Racines poſitives, que d'alternations de ſignes de + en —, ou de — en +; & autant de négatives, que de ſucceſſions du même ſigne. Cela eſt ſeulement vrai, lorſque l'Equation ne contient aucunes racines imaginaires; & Deſcartes lui-même l'a reconnu : car il ne dit pas *tot ſunt*, mais ſeulement *tot eſſe poſſunt*, &c.

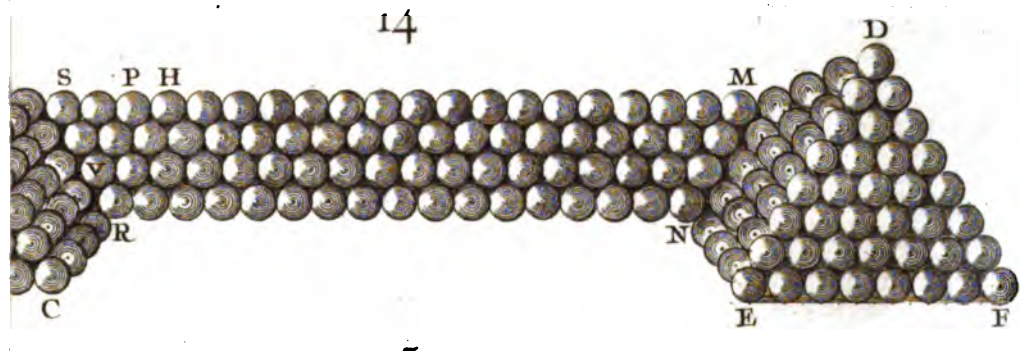
FIN.



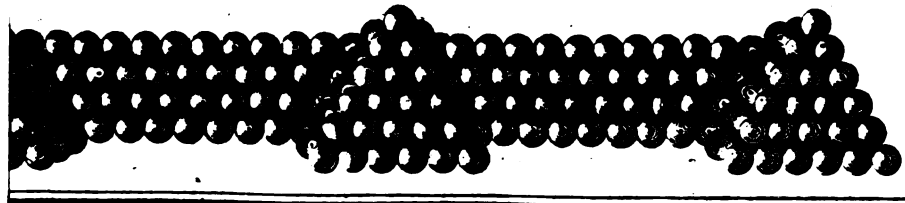


13

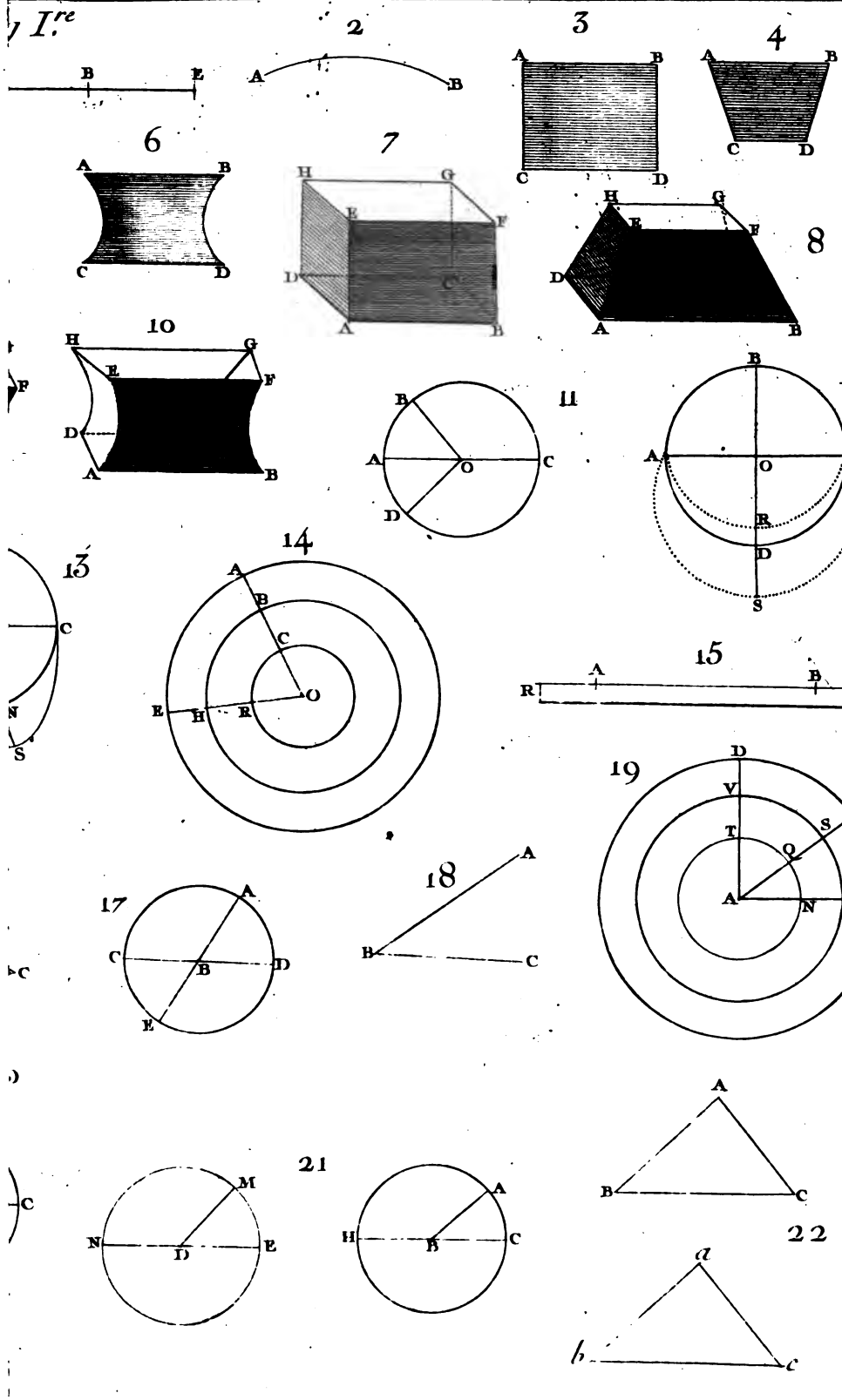
14

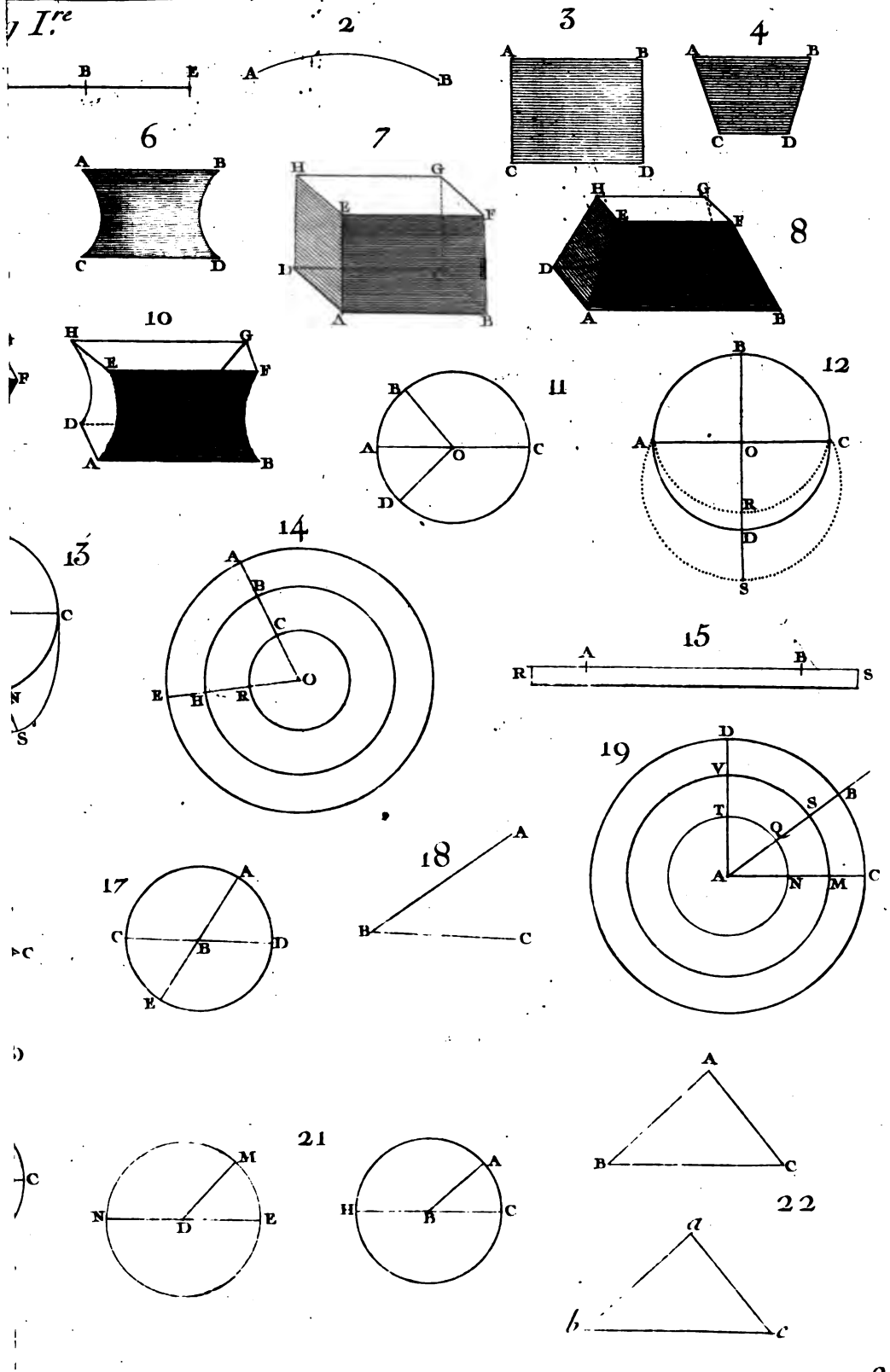


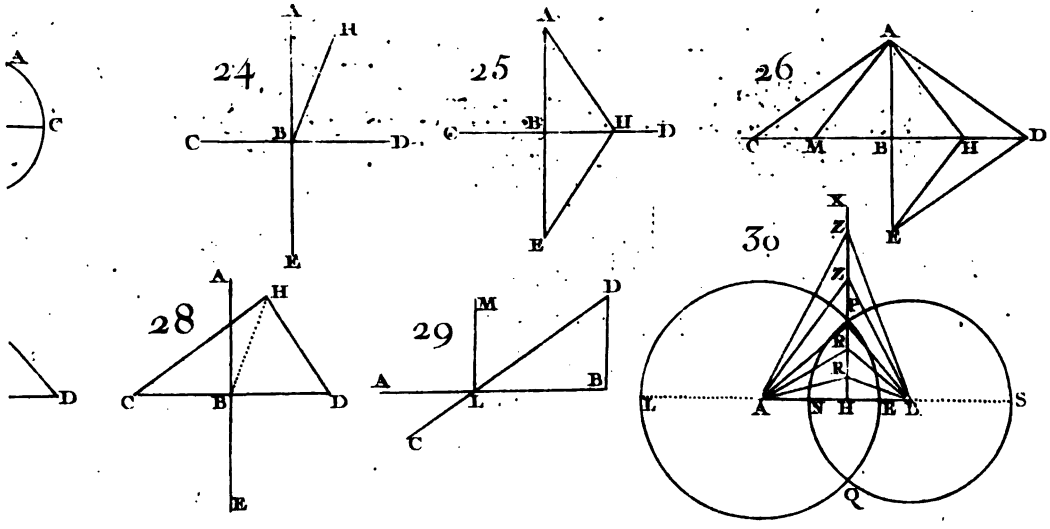
15

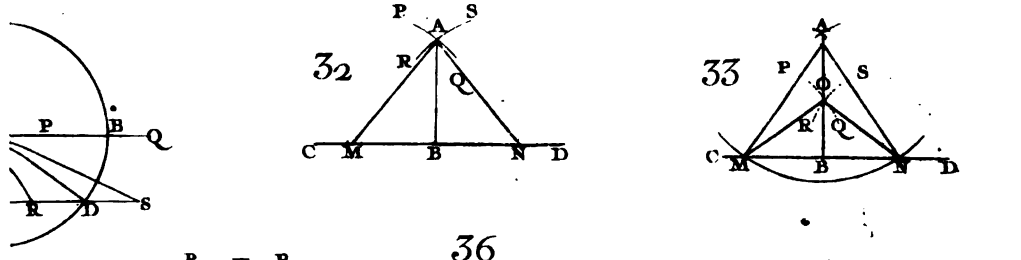


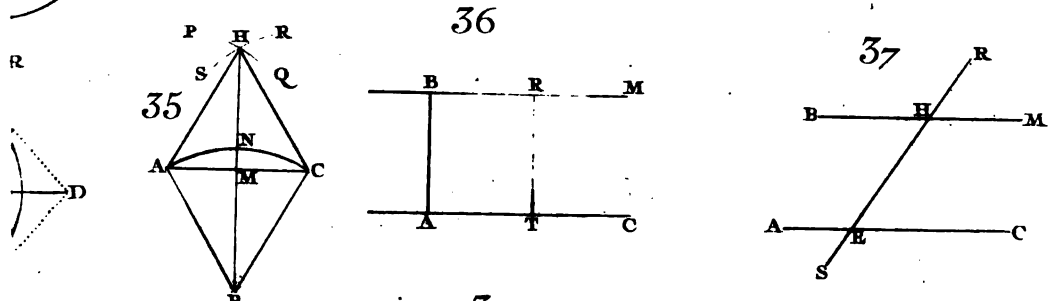
N.° I

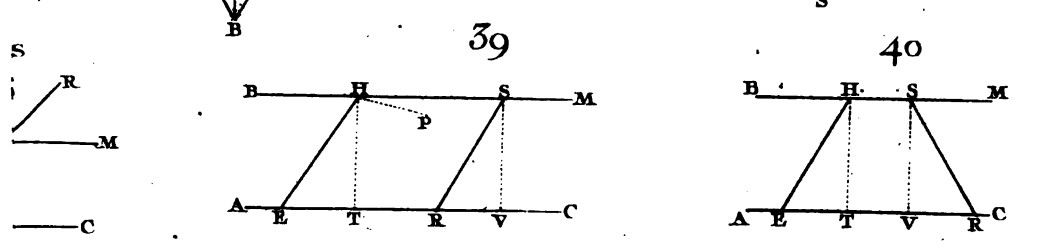

I.re
2
3
4
6
7
8
10
11
12
13
14
15
17
18
19
21
22
A
B
C
D
E
F
G
H
O
M
N
R
S
T
V
a
b
c

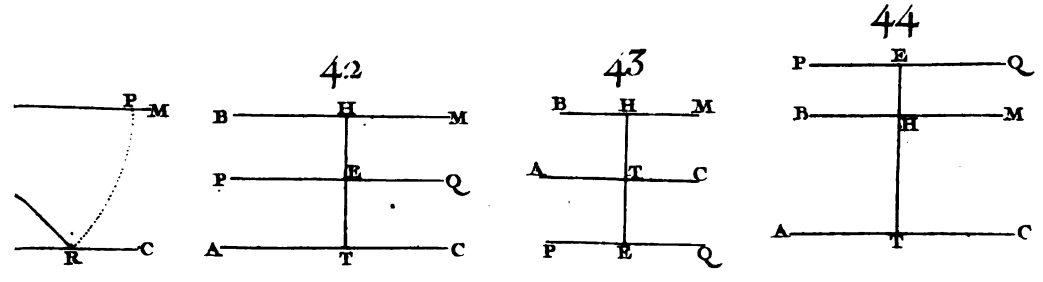

I.re
2
3
4
6
7
8
10
11
12
13
14
15
17
18
19
21
22
A
B
C
D
E
F
G
H
O
R
S
T
V
M
N
a
b
c


24
25
26
28
29
30


32
33


35
36
37


39
40


42
43
44

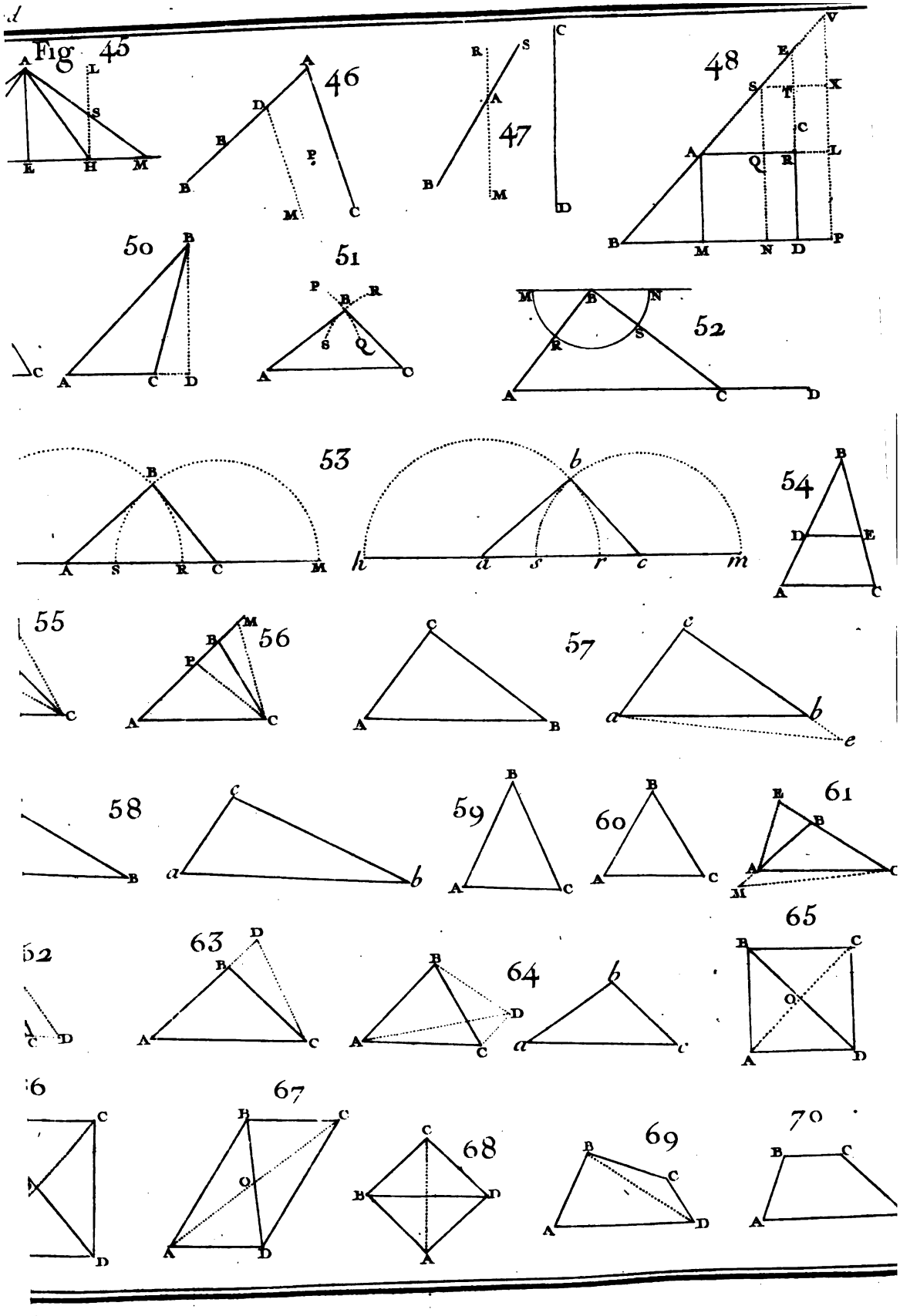
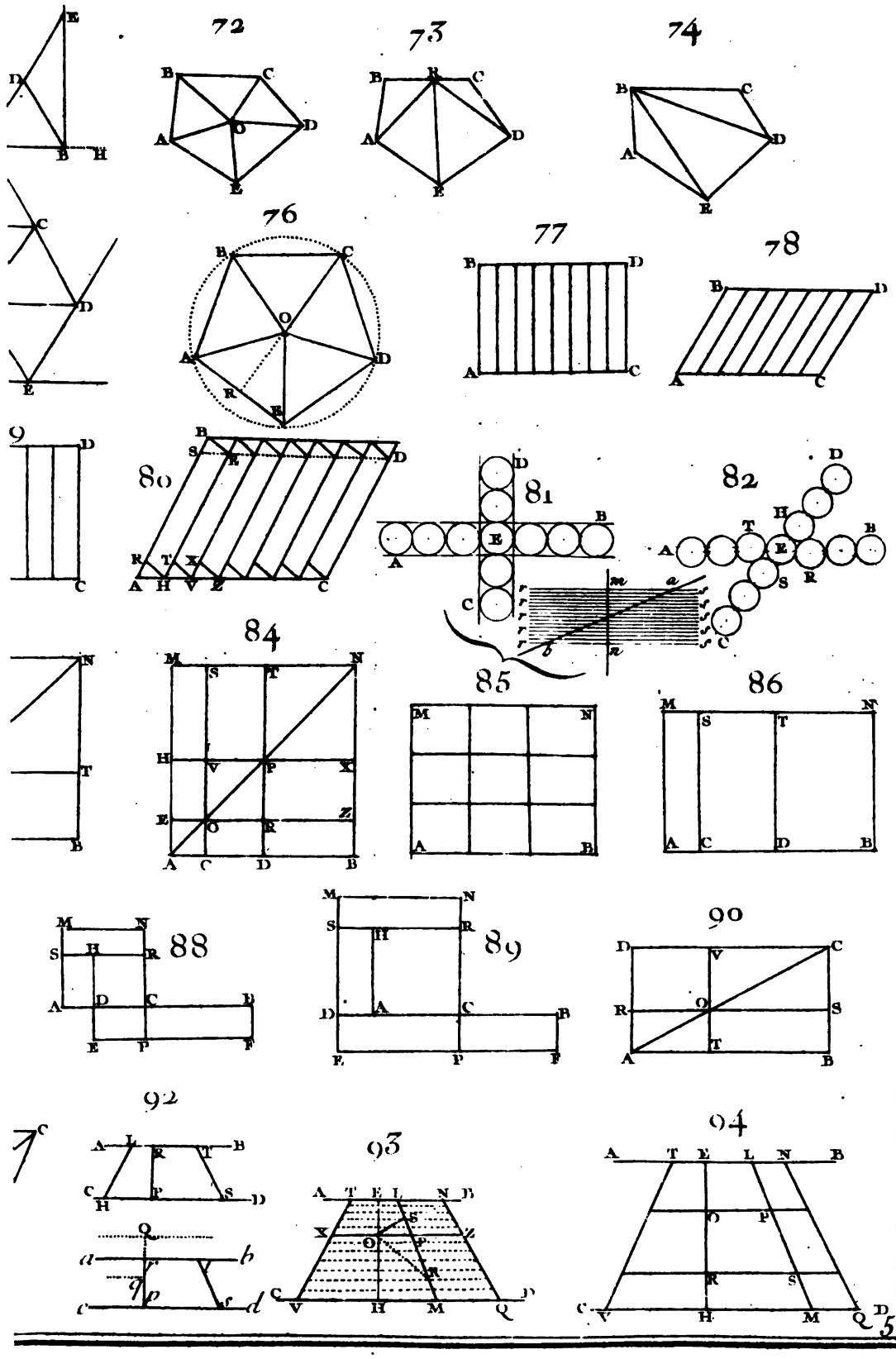
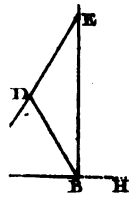
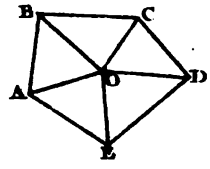


Fig 45
A
L
S
E
H
M
46
A
D
B
P
B
M
C
R
S
A
47
B
M
C
D
48
V
E
S
T
X
C
A
Q
R
L
B
M
N
D
P
50
B
C
A
C
D
51
P
B
R
S
Q
A
C
52
M
B
N
R
S
A
C
D
53
B
A
S
R
C
M
b
h
a
s
r
c
m
54
B
D
E
A
C
55
C
56
M
B
P
A
C
C
A
B
57
c
a
b
e
58
B
c
a
b
59
B
A
C
60
B
A
C
61
E
B
A
C
M
62
C
D
63
D
B
A
C
B
A
C
D
64
b
a
c
65
B
C
O
A
D
66
C
D
67
B
C
O
A
D
C
68
B
D
A
69
B
C
A
D
70
B
C
A

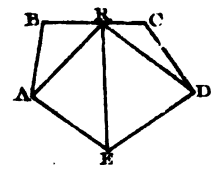

72
73
74
76
77
78
9
80
81
82
84
85
86
88
89
90
92
93
94



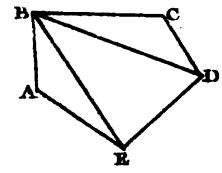
72

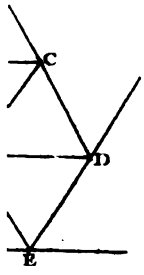


73

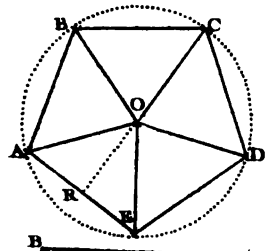


74

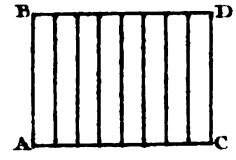




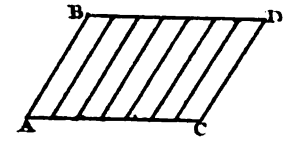
76



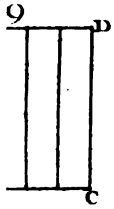
77



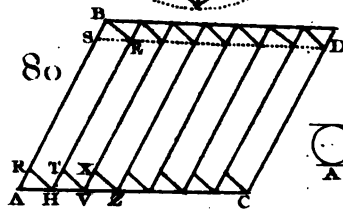
78



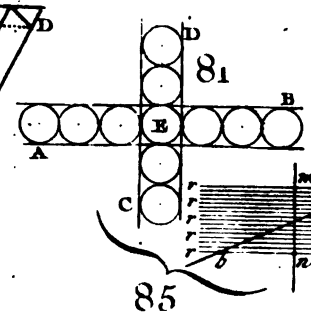
9



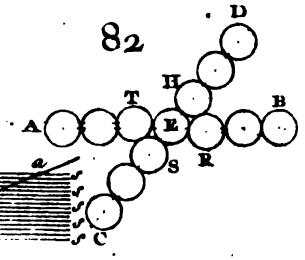
80

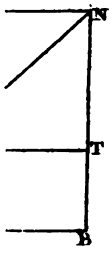


81

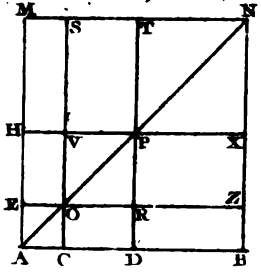


82

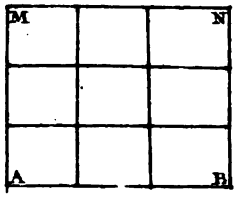




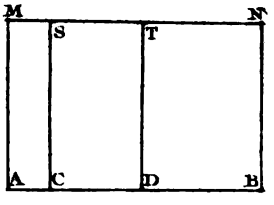
84

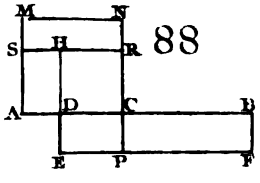


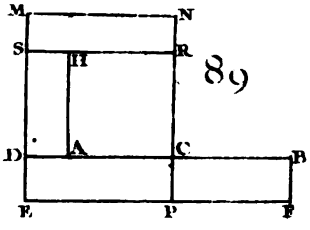
85



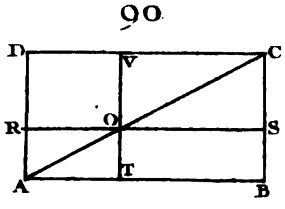
86



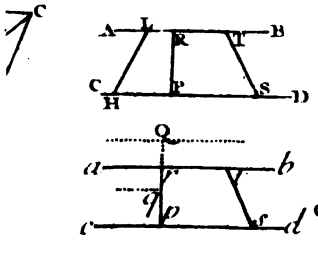




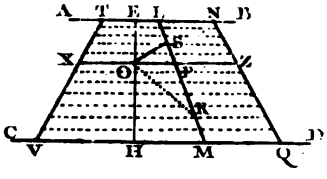
90



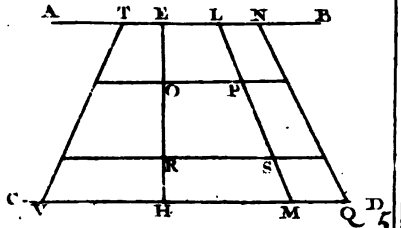
92

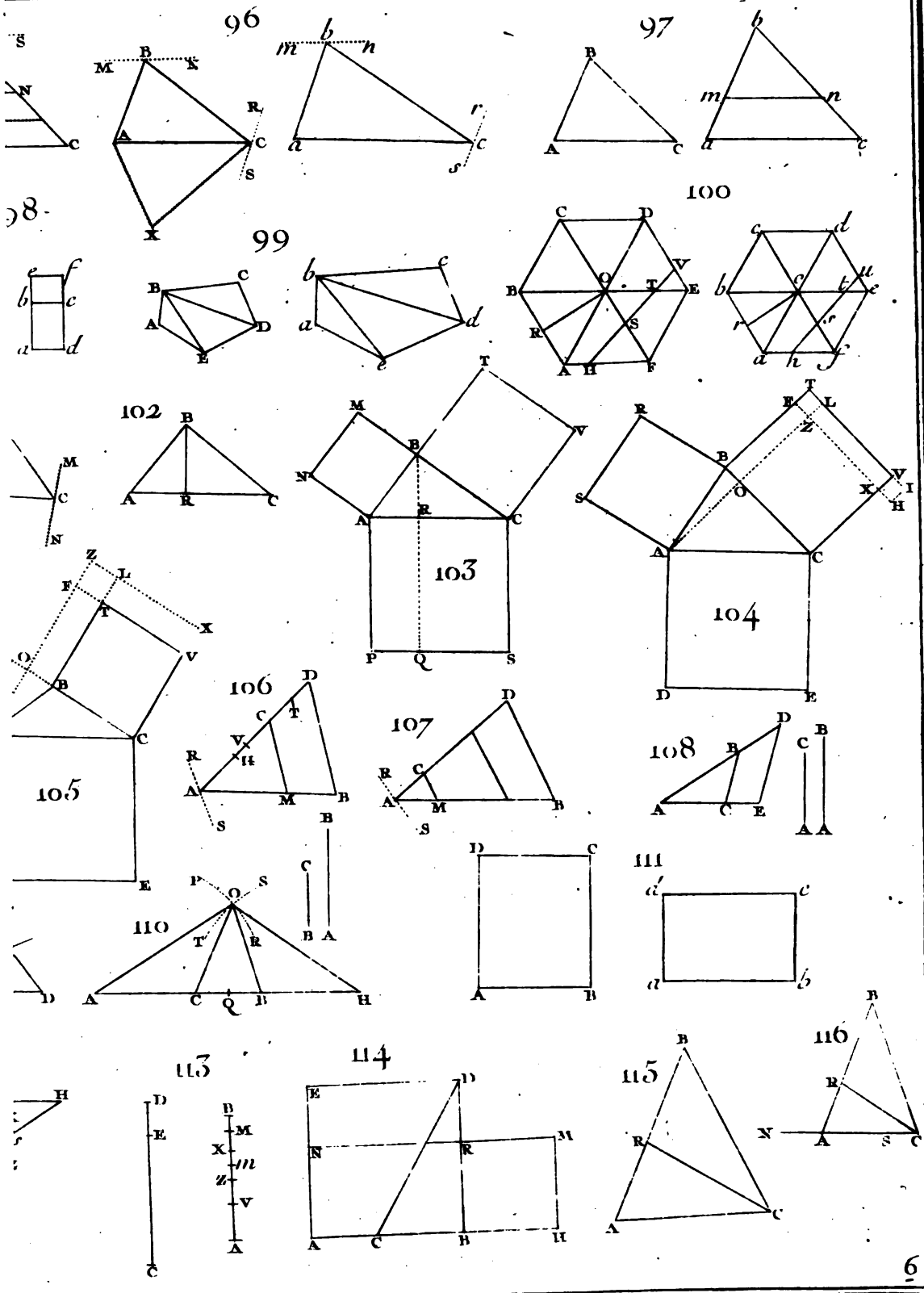


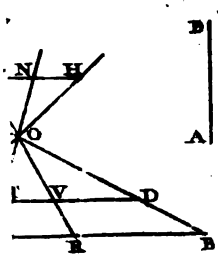
93

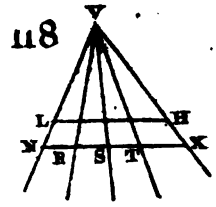


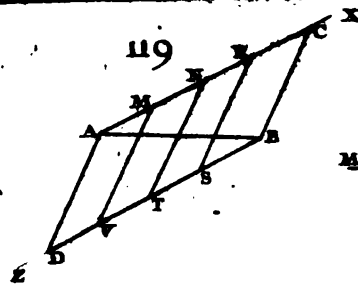
94

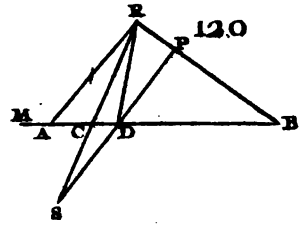


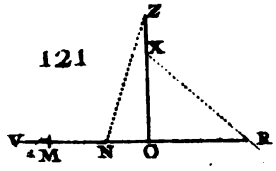

96
97
98
99
100
102
103
104
105
106
107
108
110
111
113
114
115
116

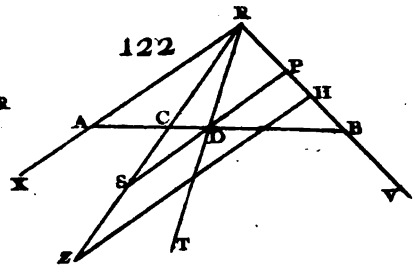


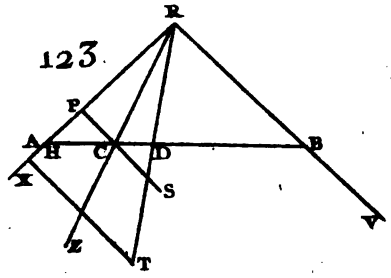

118

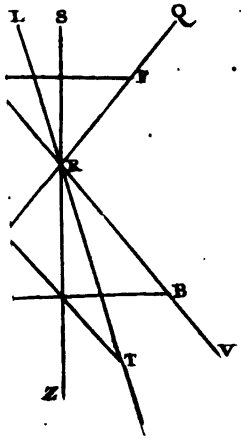

119

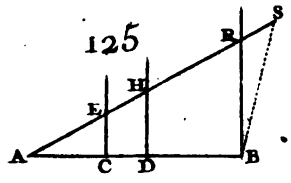

120

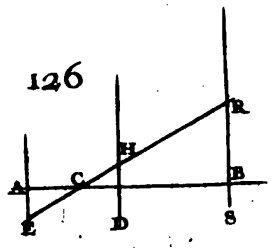

121

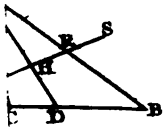

122

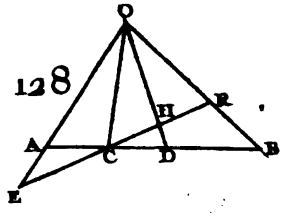

123

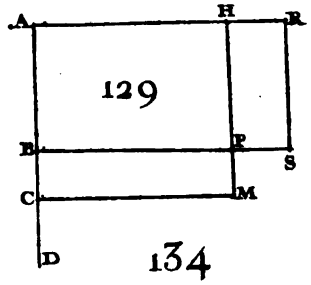


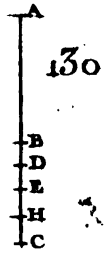

125

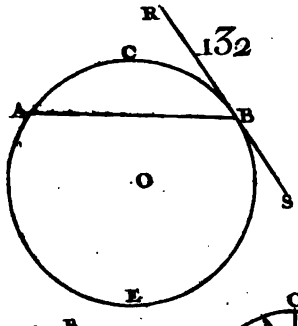

126

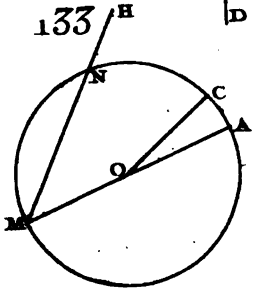


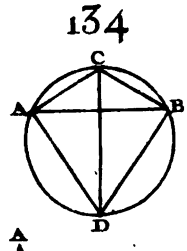

128

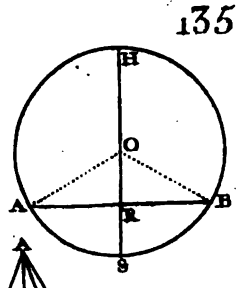

129

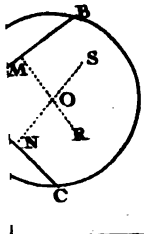

130

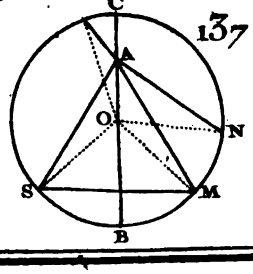

132

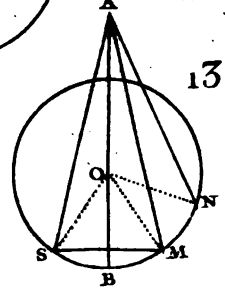

133

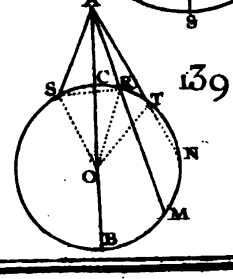

134

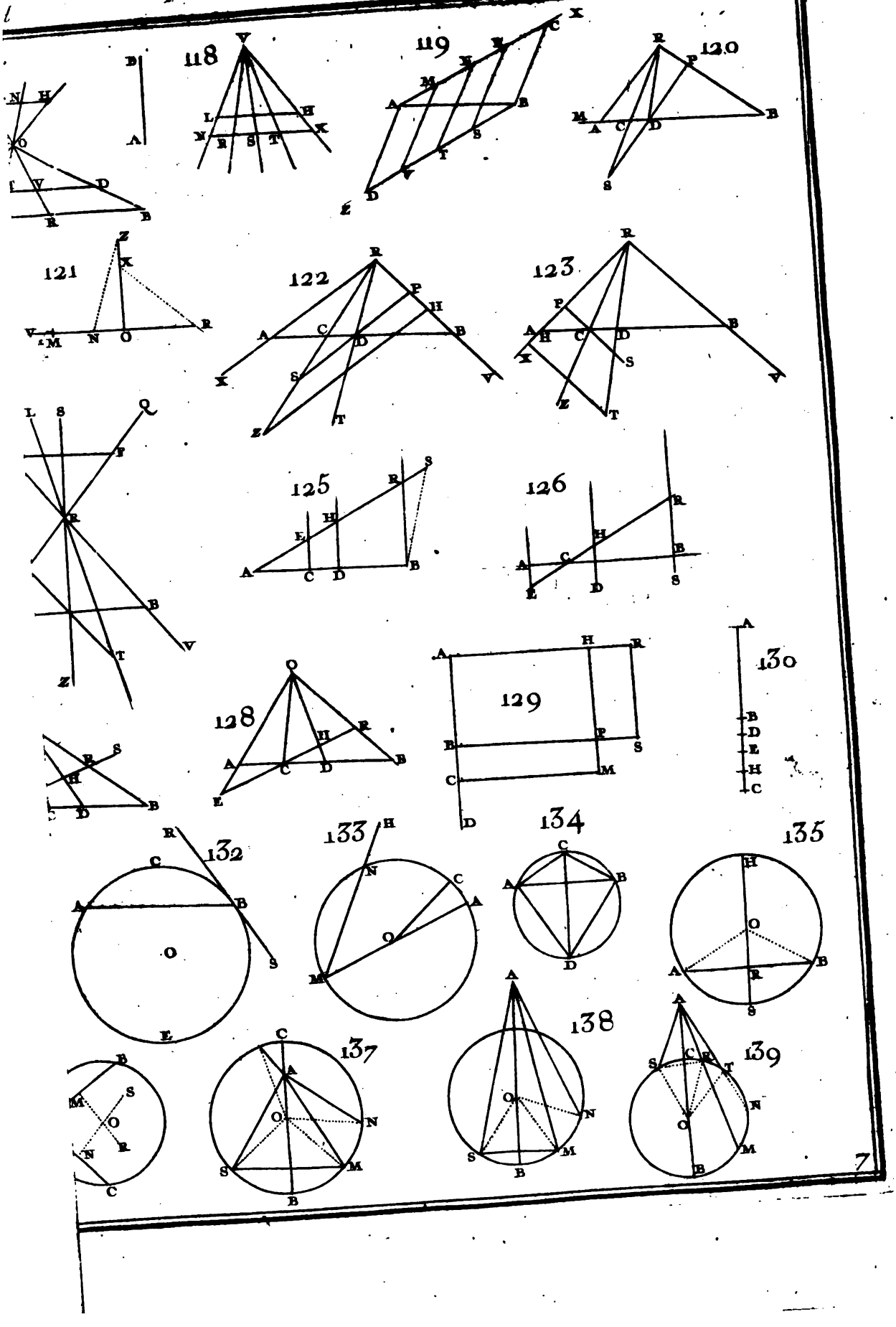

135

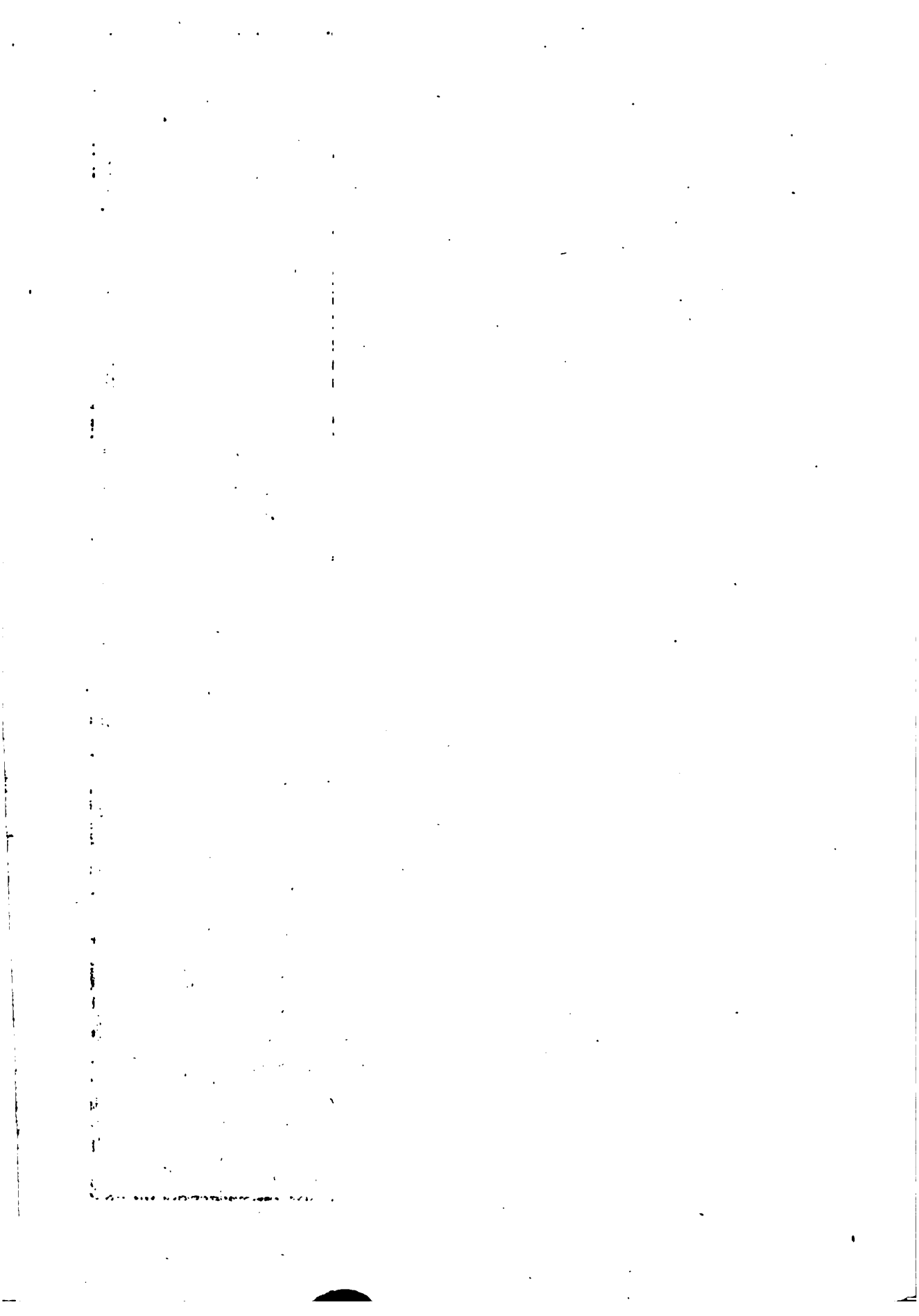


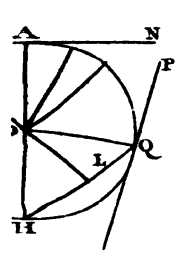

137


138

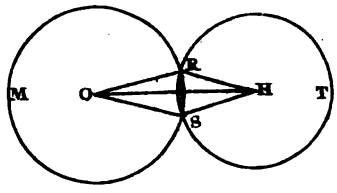

139


118
119
120
121
122
123
125
126
128
129
130
132
133
134
135
137
138
139

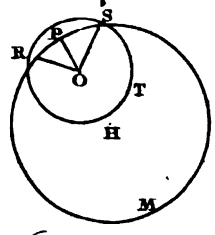




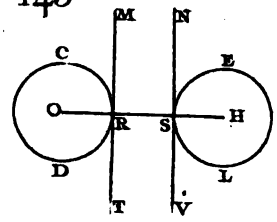
141



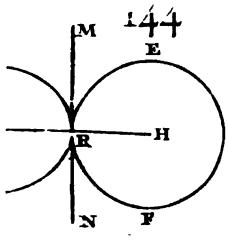
142



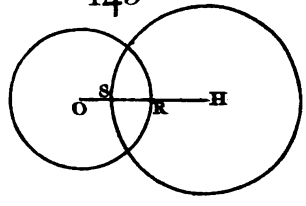
143



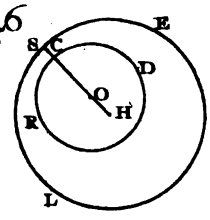
144



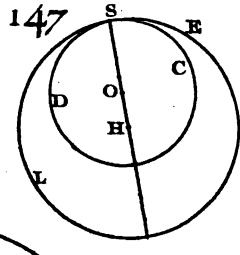
145

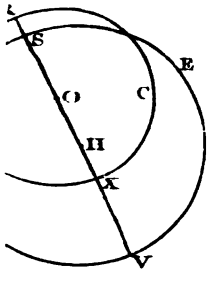


146

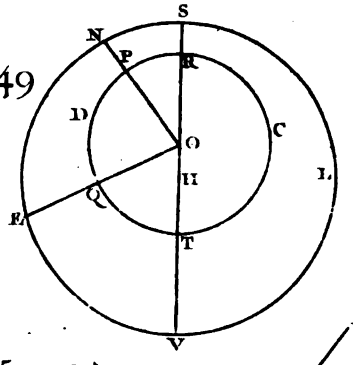


147

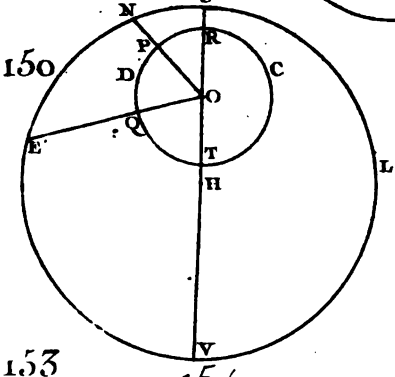


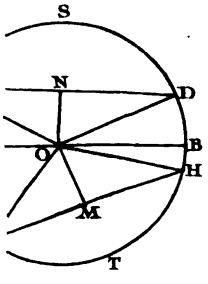


149

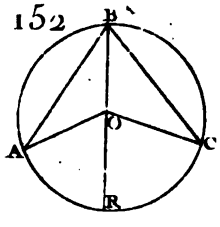


150

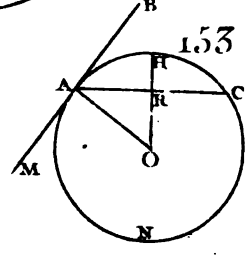




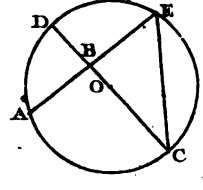
152



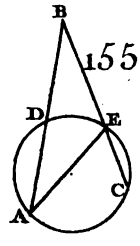
153

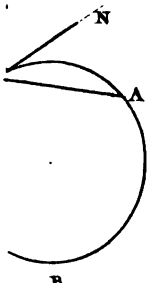


154

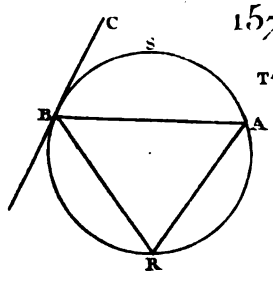


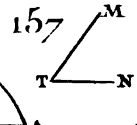
155



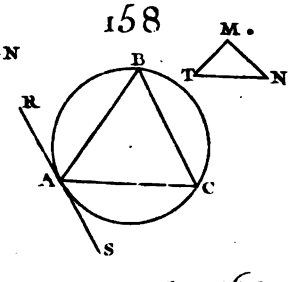


157

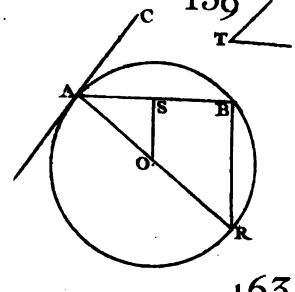


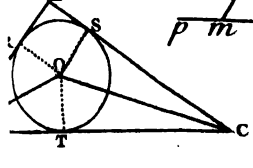


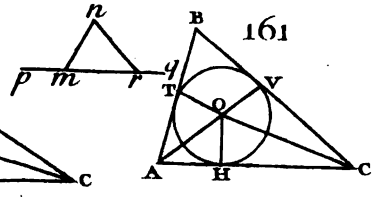
158



159

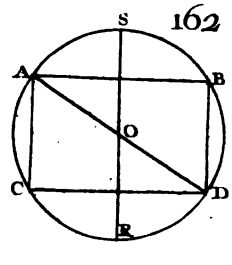




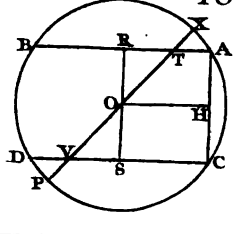


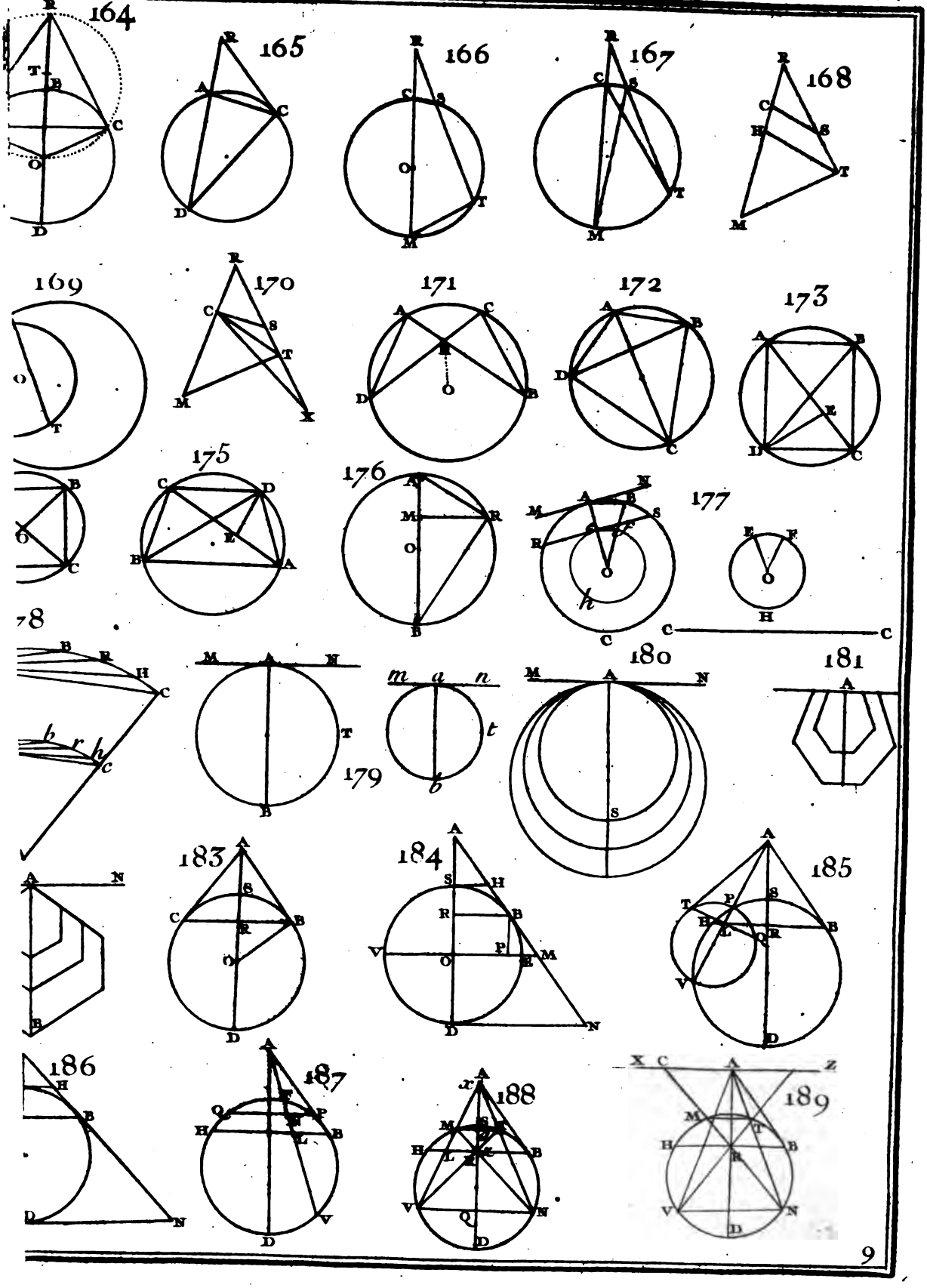
161

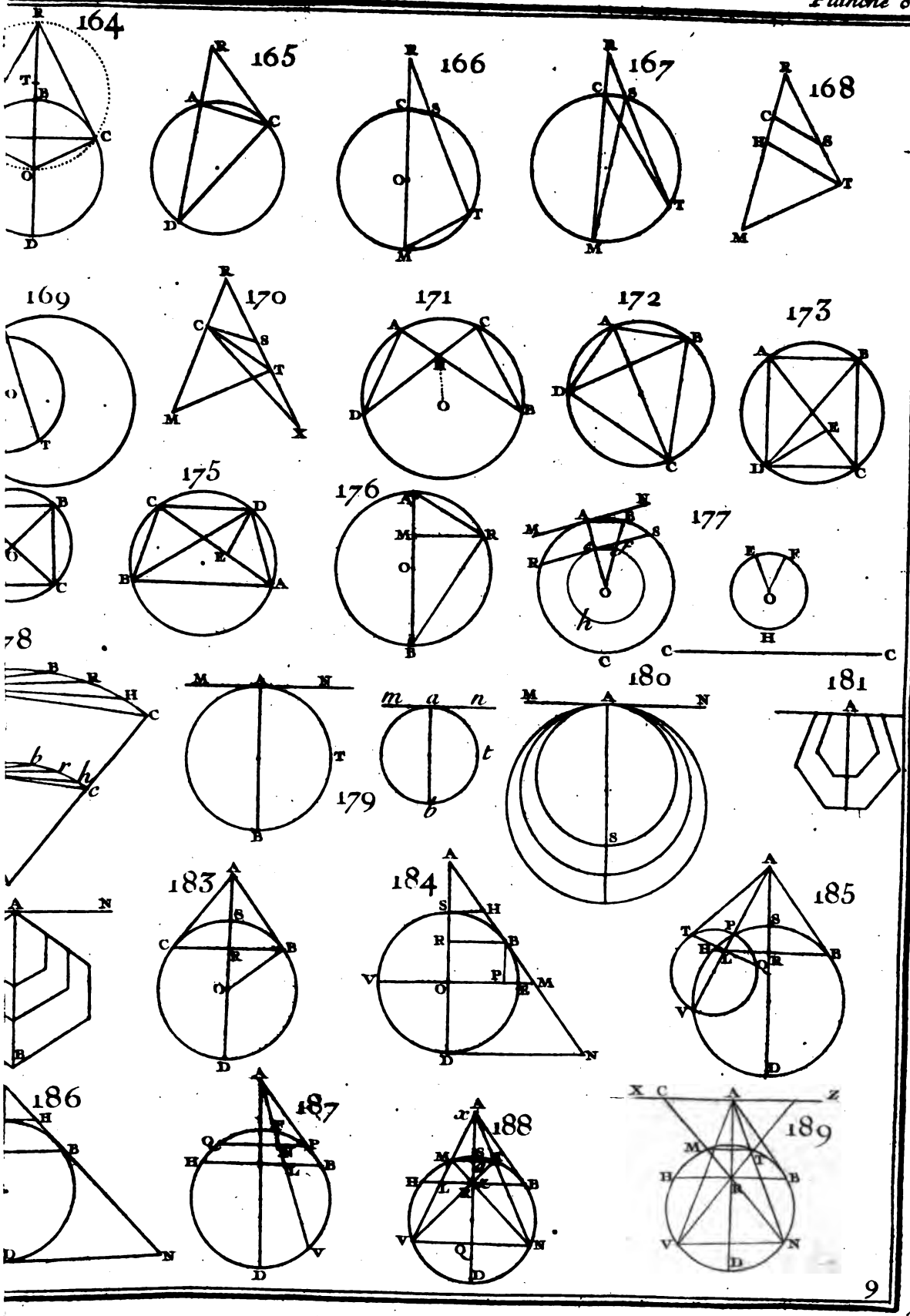
162

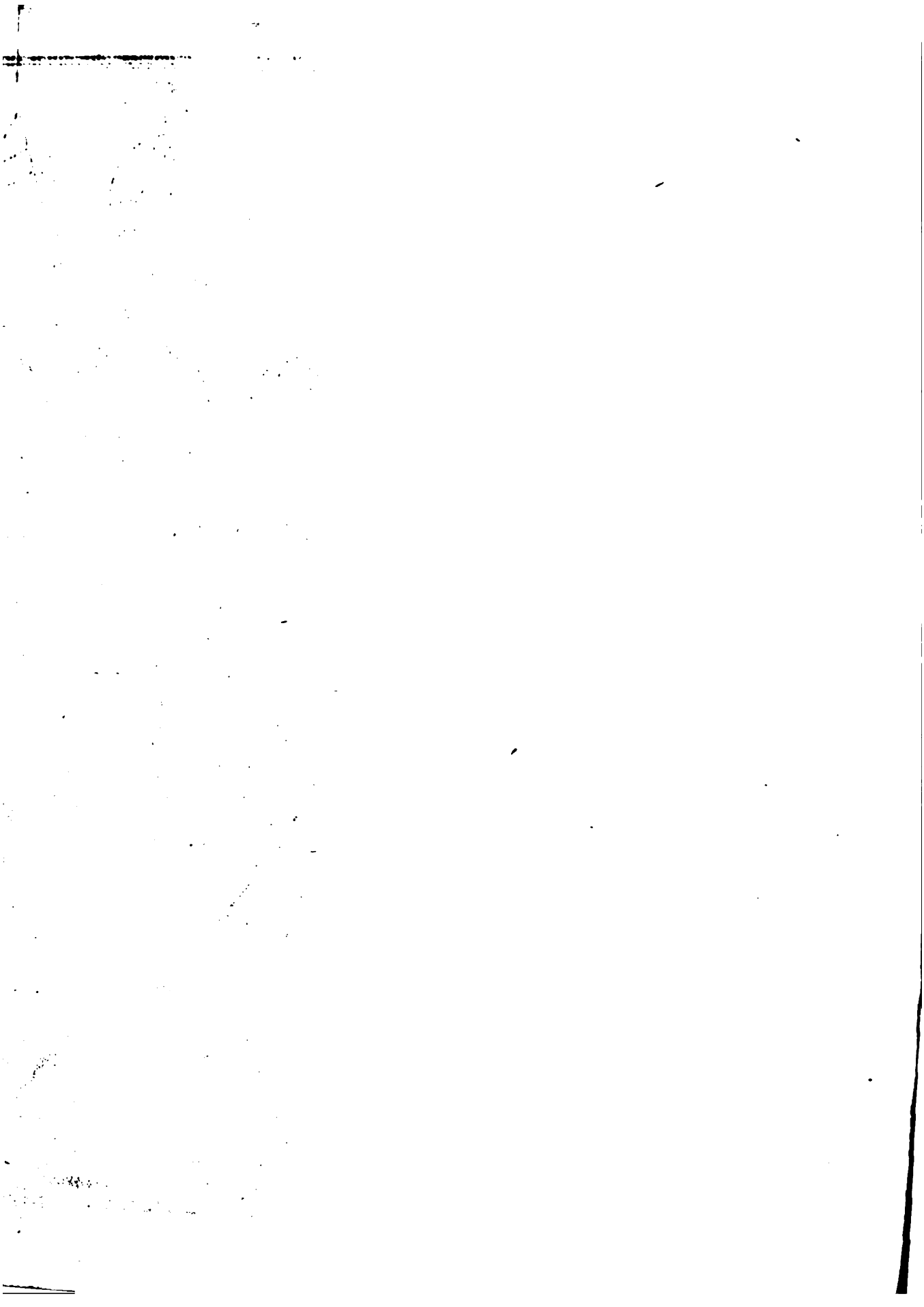


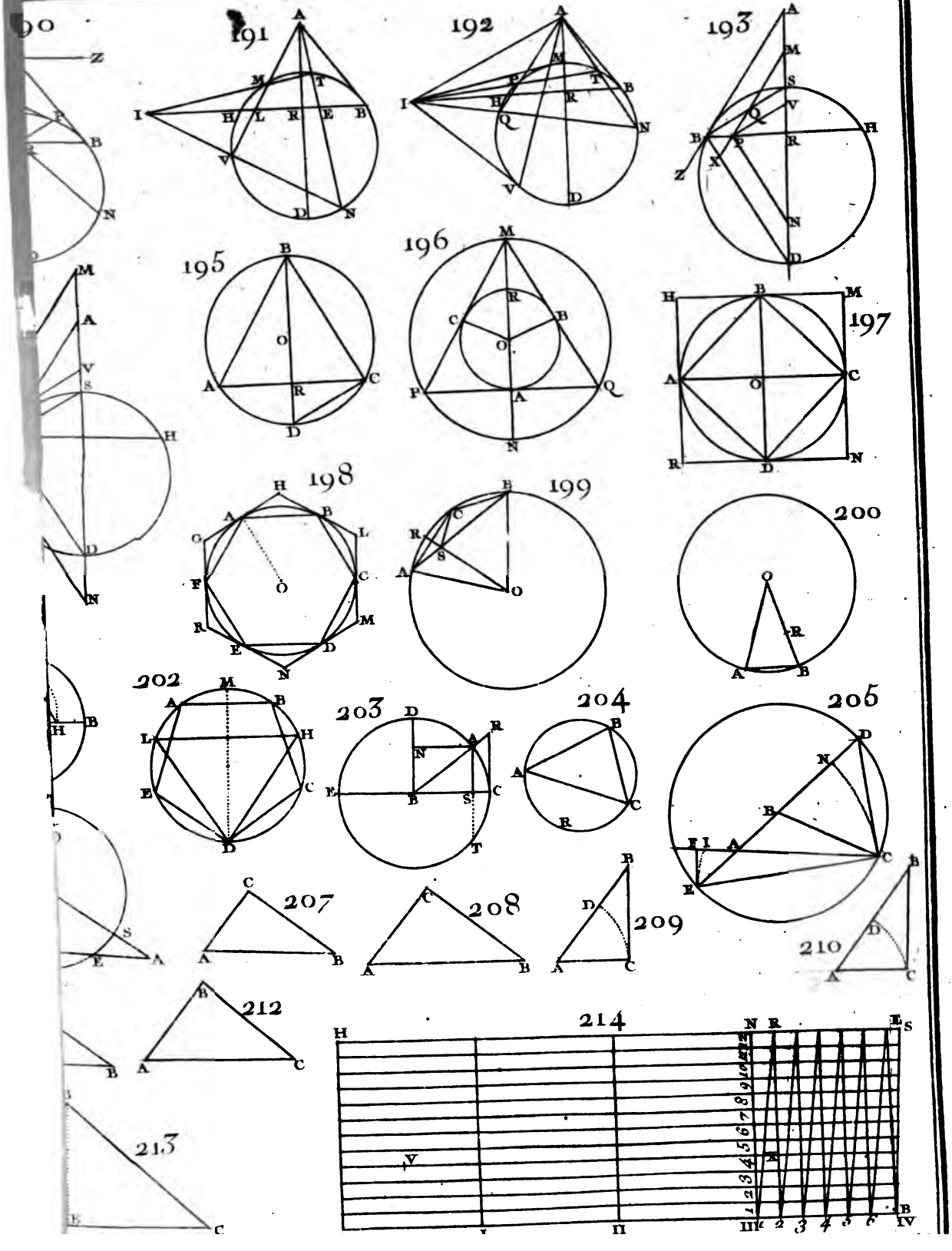
163

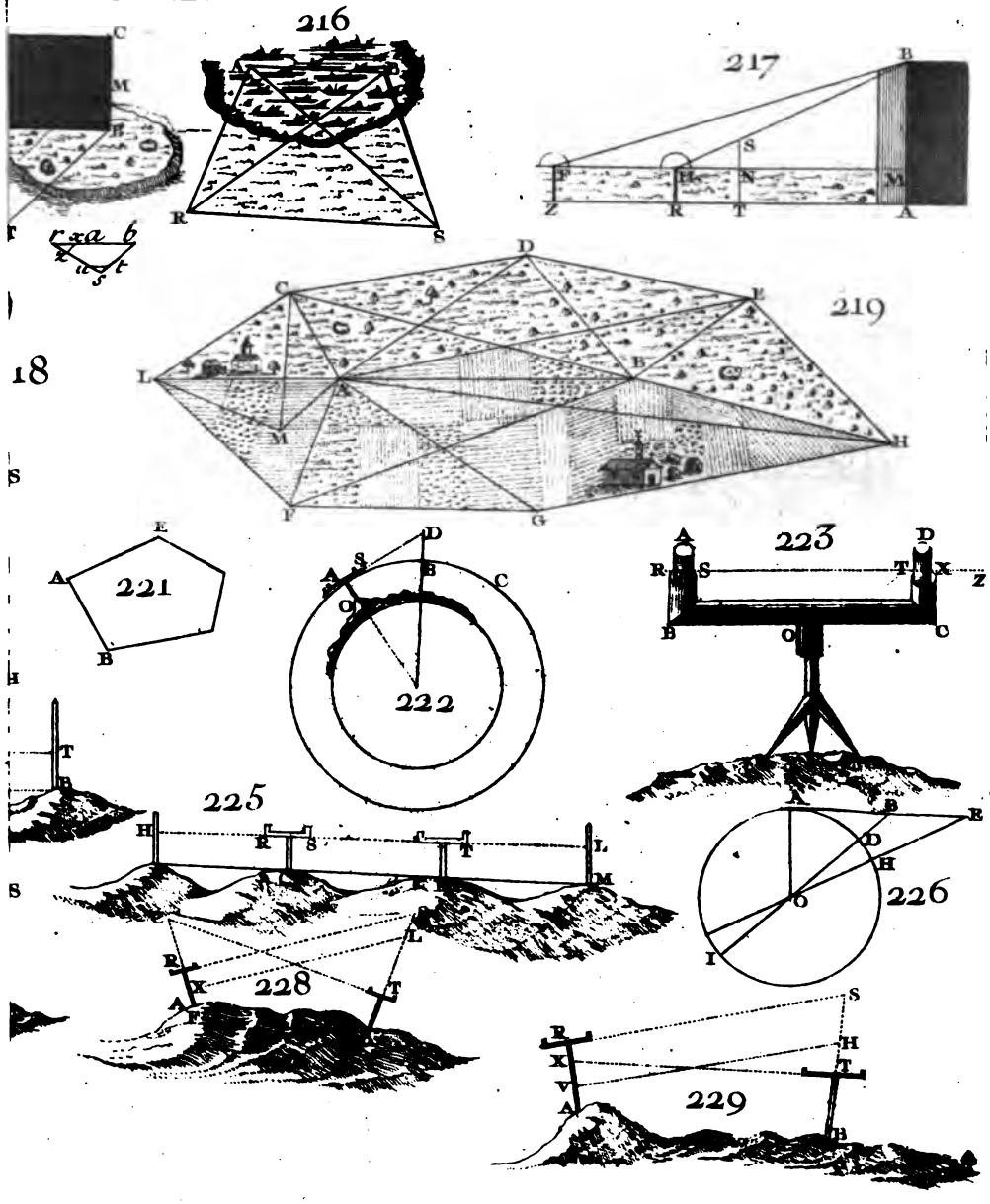


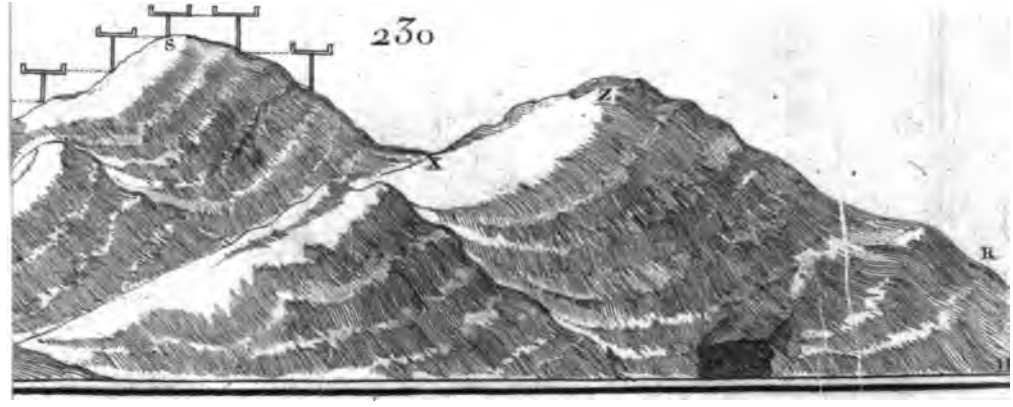

164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
175
176
177
178
179
180
181
183
184
185
186
187
188
189


164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
175
176
177
178
179
180
181
183
184
185
186
187
188
189

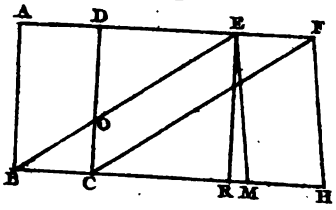



190
191
192
193
195
196
197
198
199
200
202
203
204
205
207
208
209
210
212
213
214

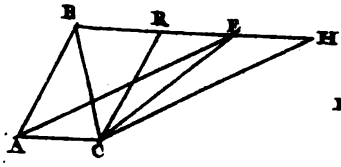

216
217
219
221
222
223
225
226
228
229
C
M
R
S
B
Z
T
A
D
E
L
H
F
G
O
X


230
S
Z
X
R

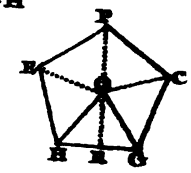
232



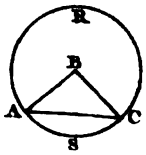
233



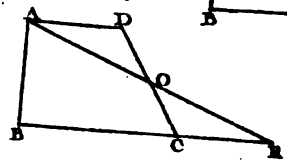
234

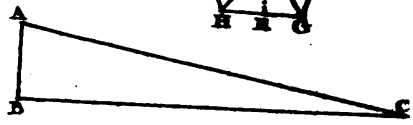


236

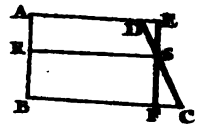


237

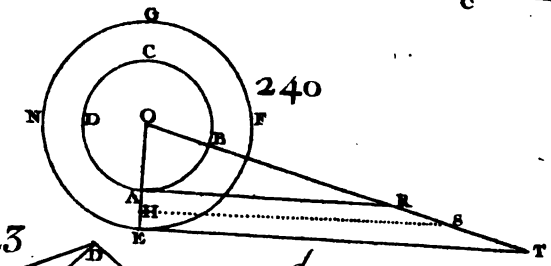




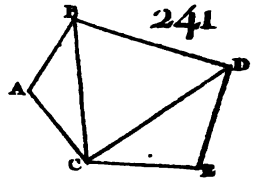
238



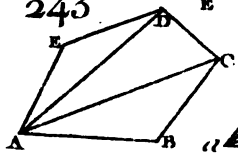
240

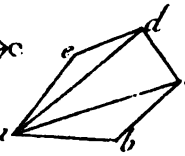


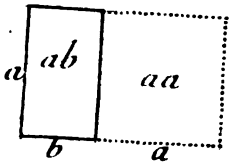
241



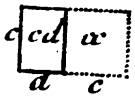
243

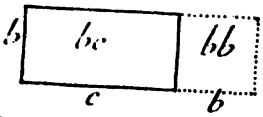




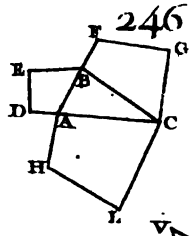


244

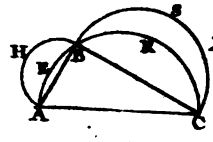




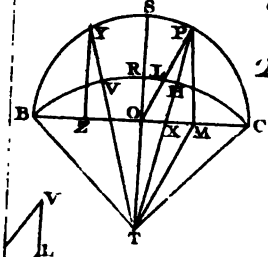
246



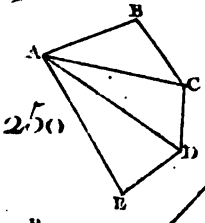
247



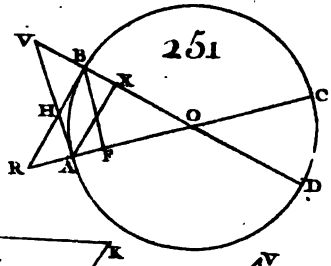
249

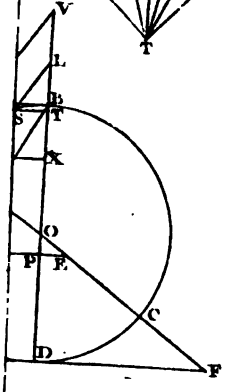


250

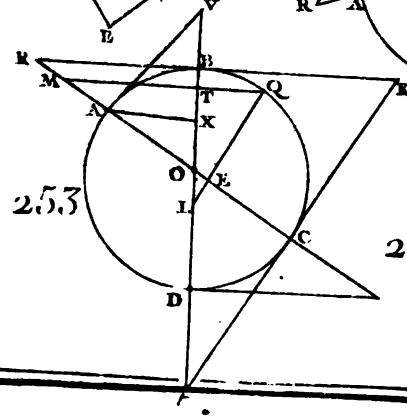


251

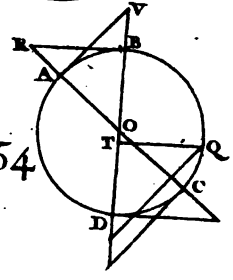


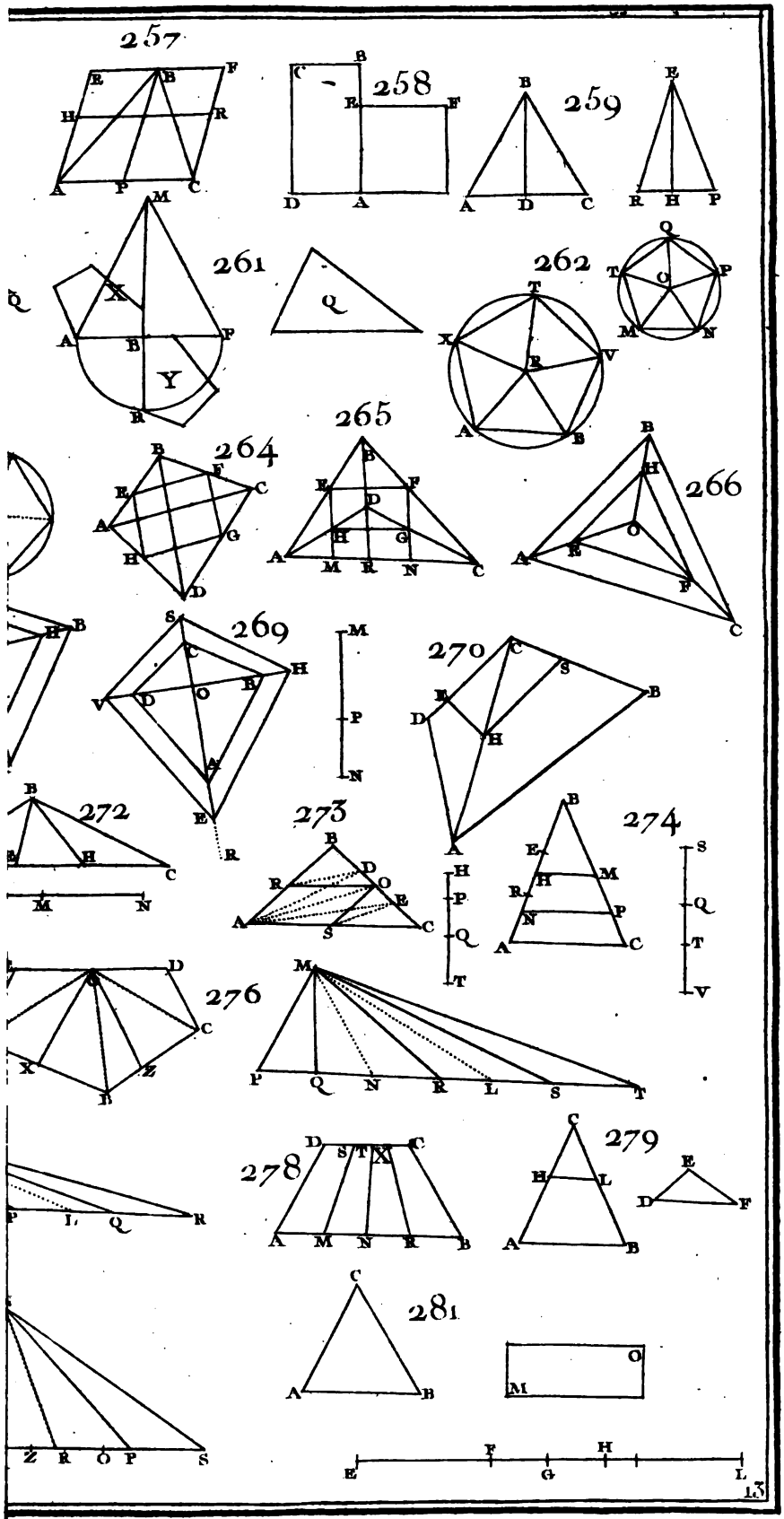


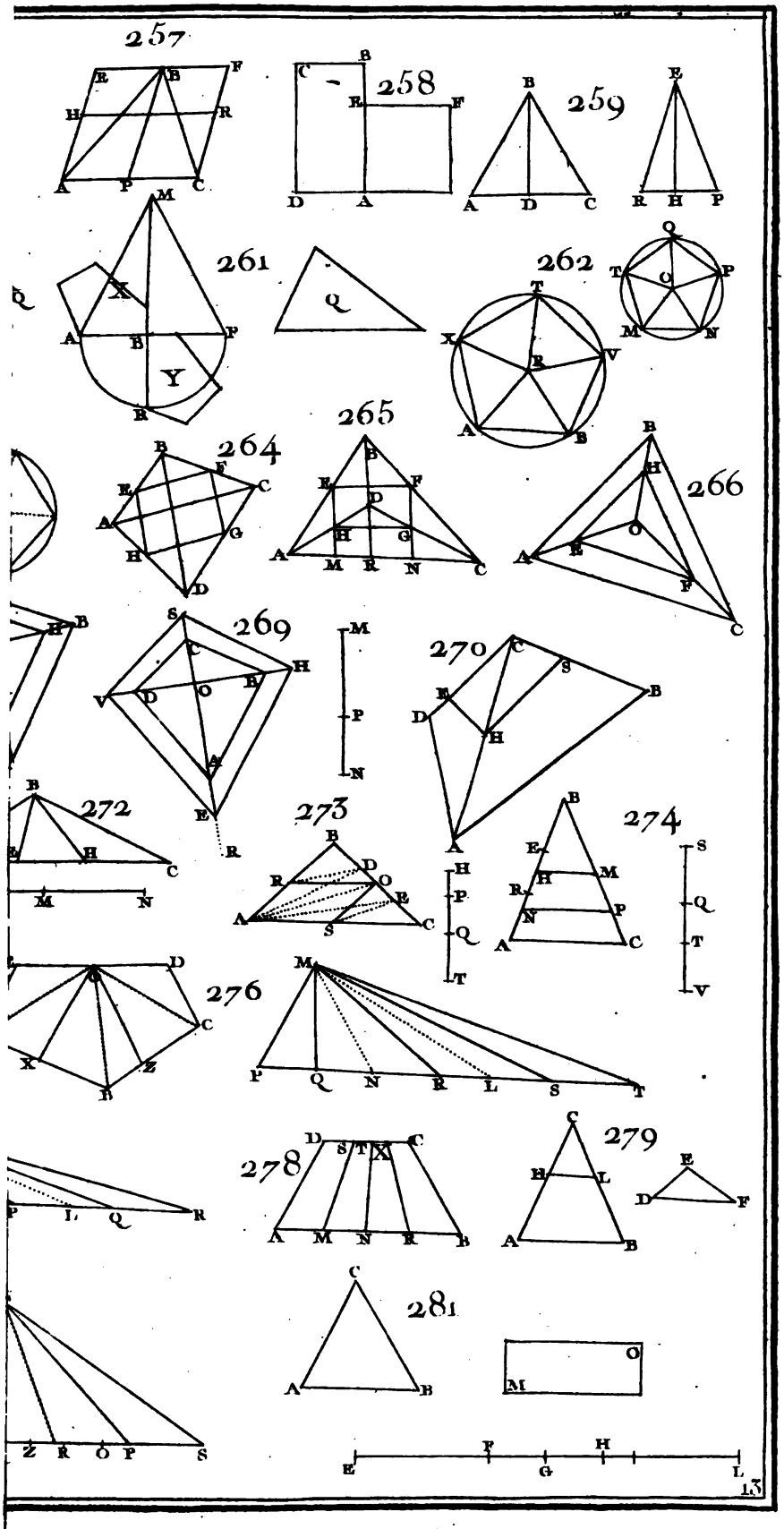
253

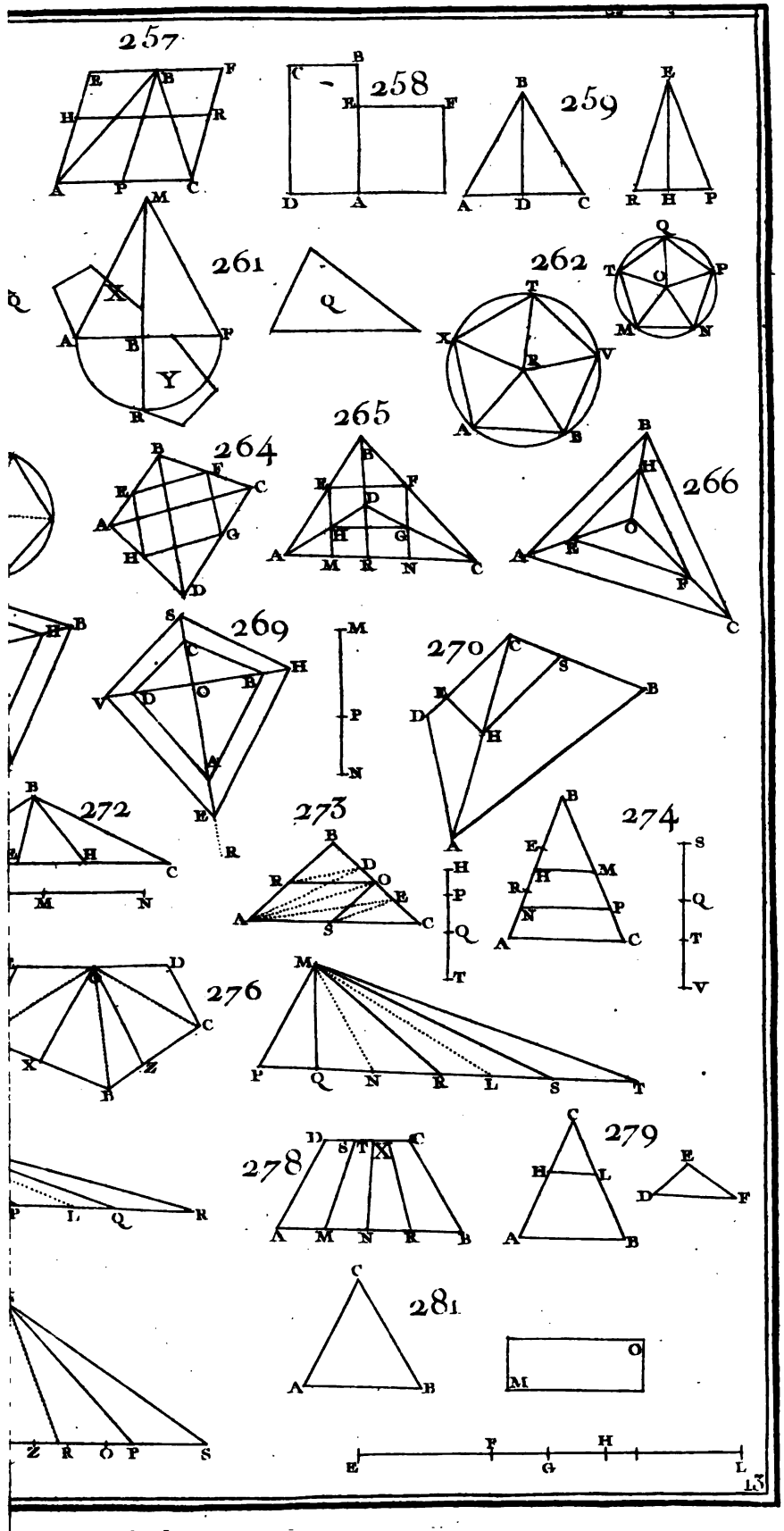


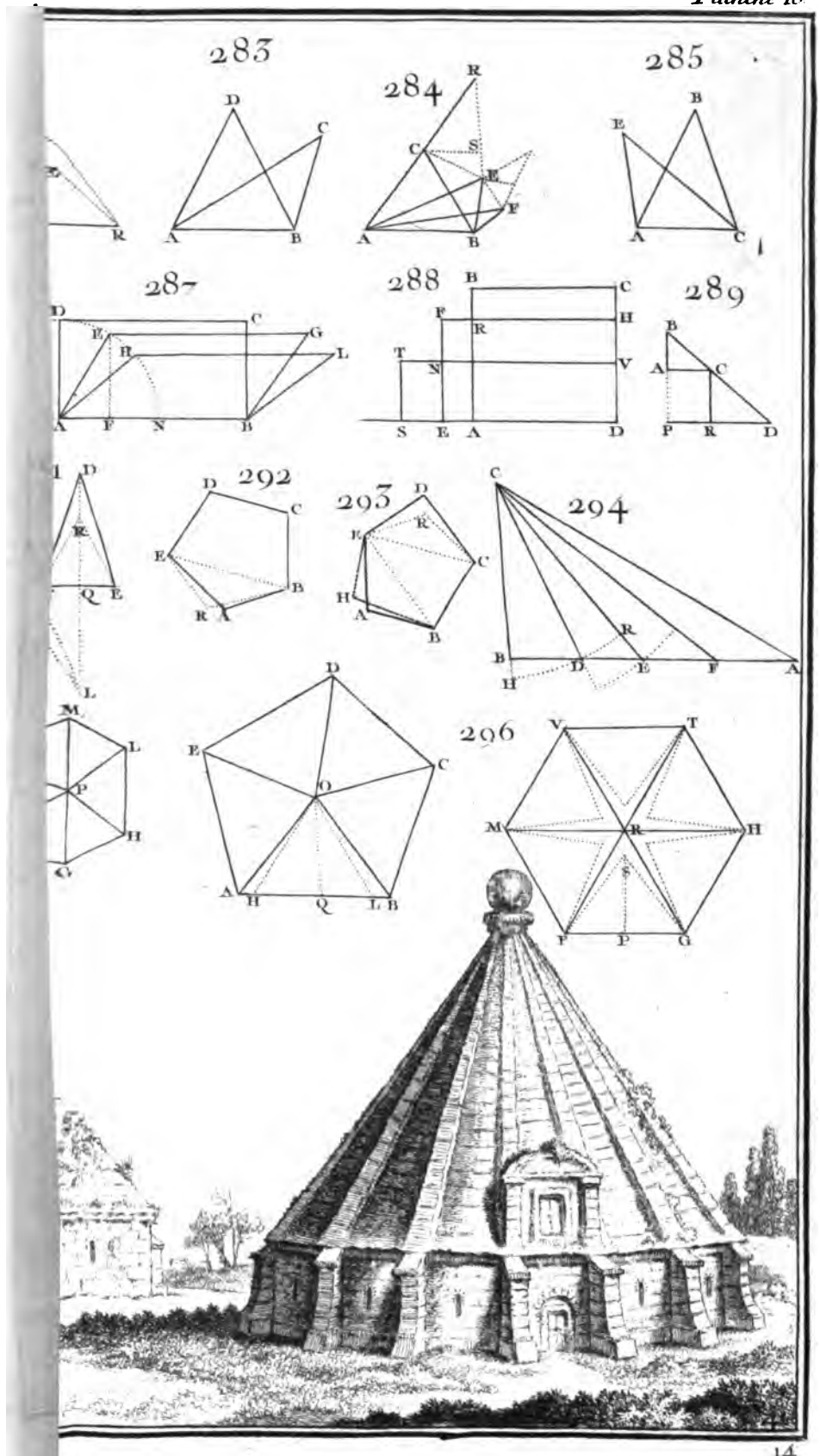
254

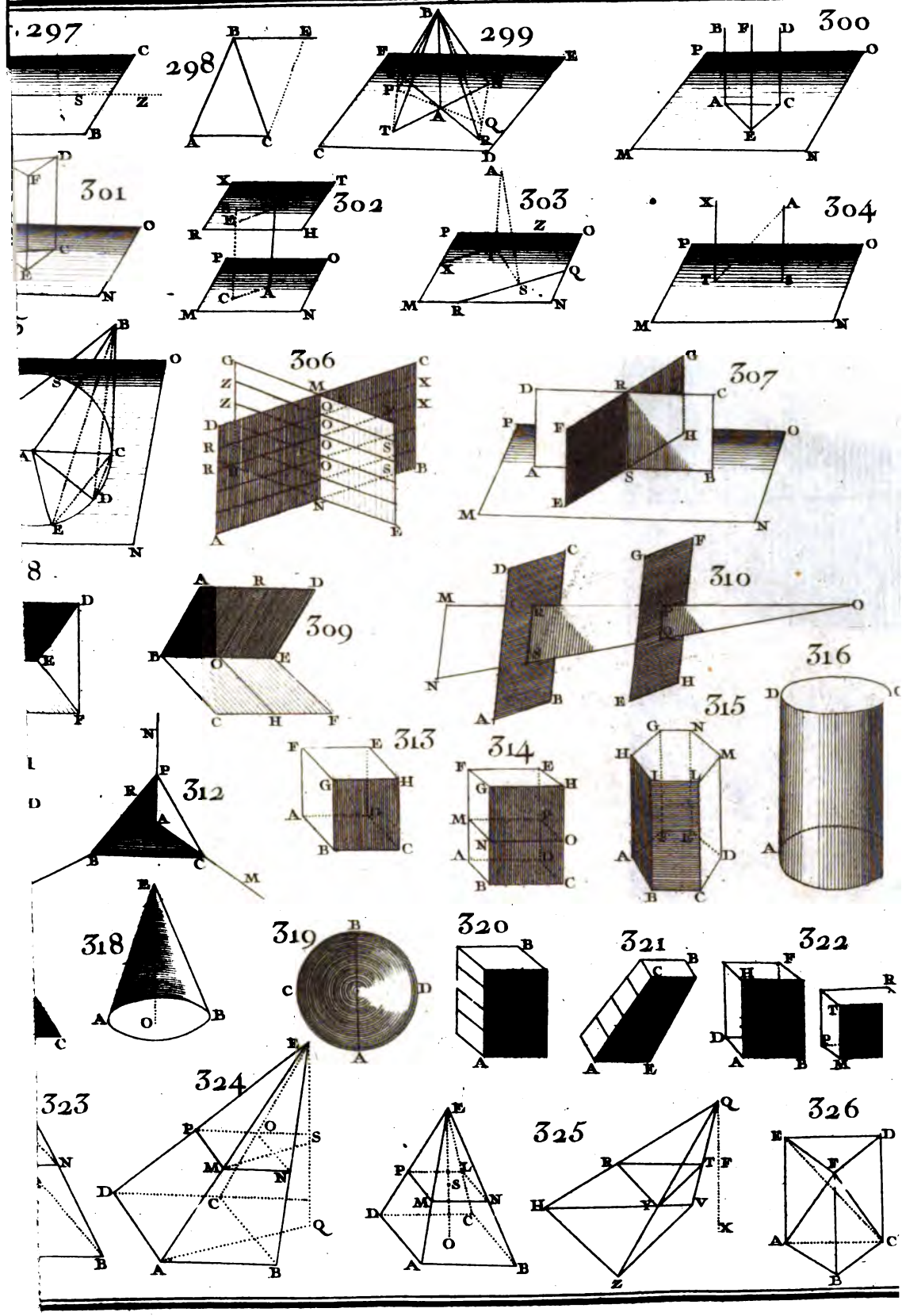


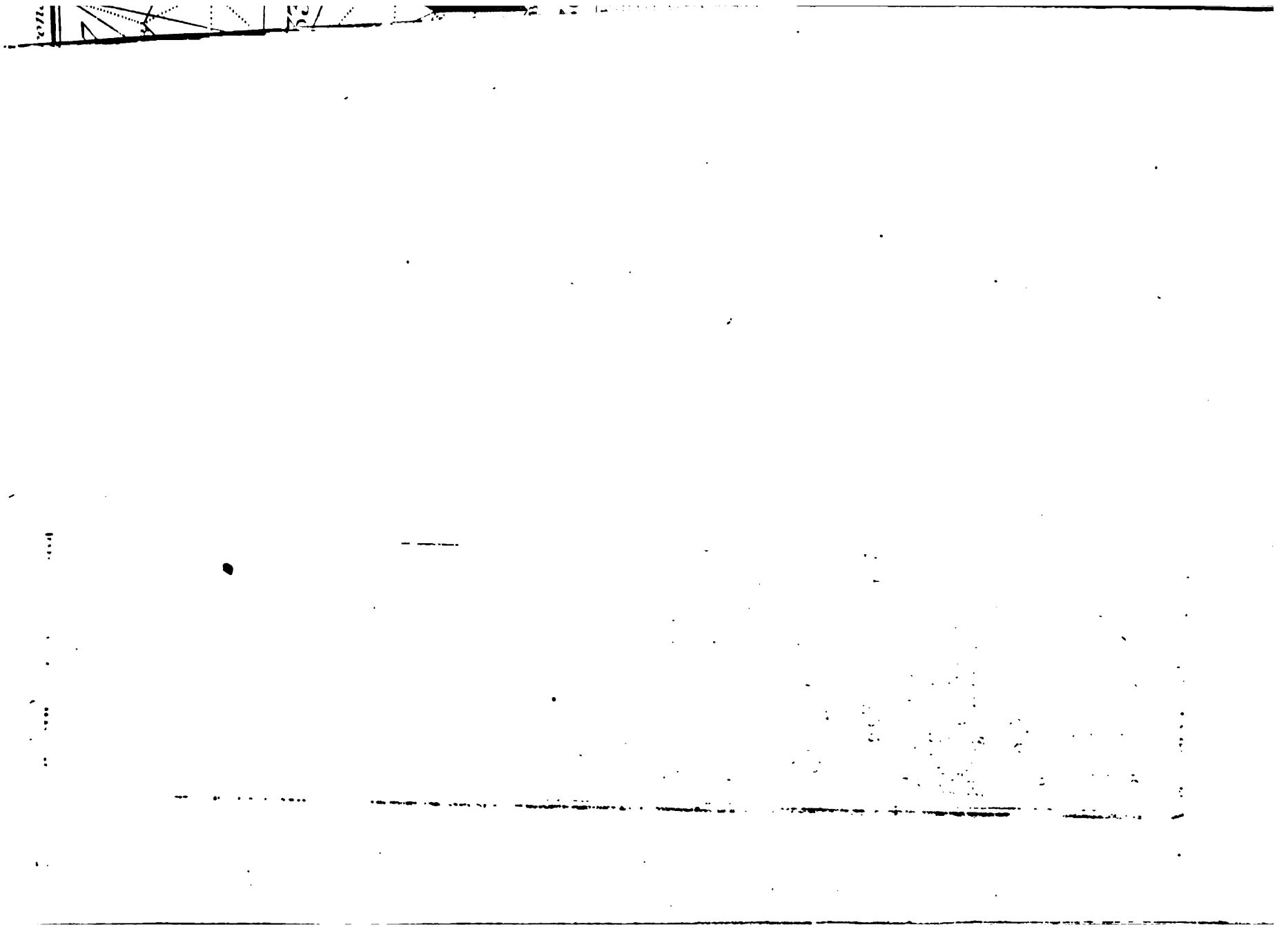

257
258
259
261
262
264
265
266
269
270
272
273
274
276
278
279
281

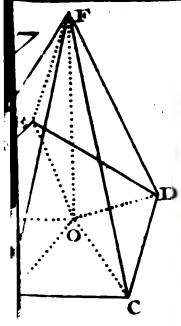

257
258
259
261
262
264
265
266
269
270
272
273
274
276
278
279
281

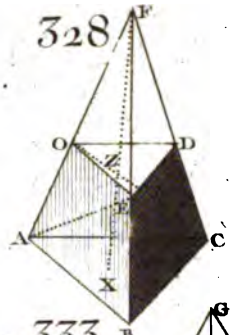

257
258
259
261
262
264
265
266
269
270
272
273
274
276
278
279
281

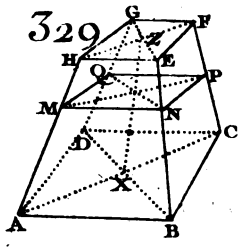

283
284
285
287
288
289
292
293
294
296


297
298
299
300
301
302
303
304
306
307
308
309
310
312
313
314
315
316
318
319
320
321
322
323
324
325
326

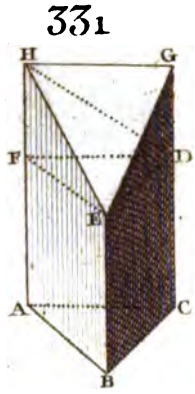


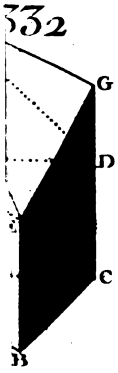


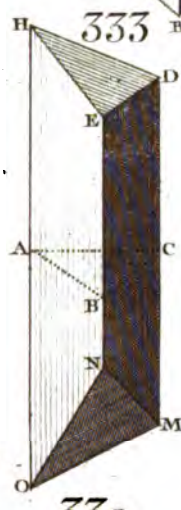

328

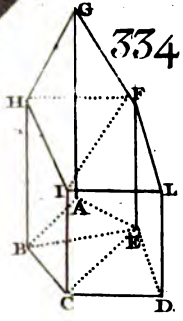

329

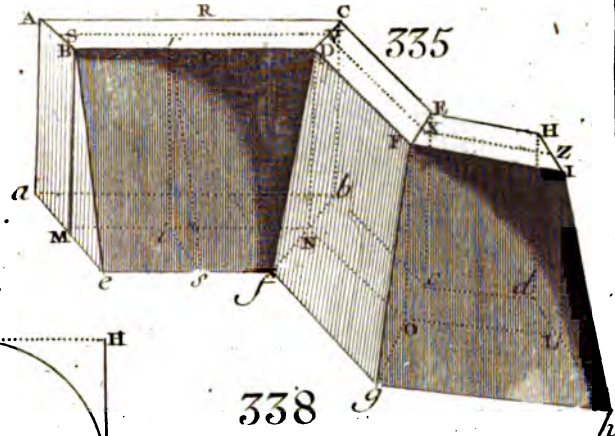
330

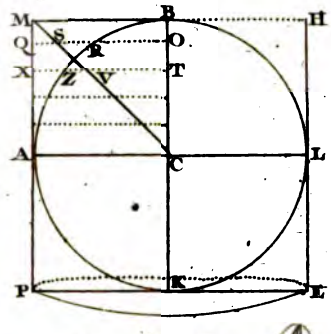

331

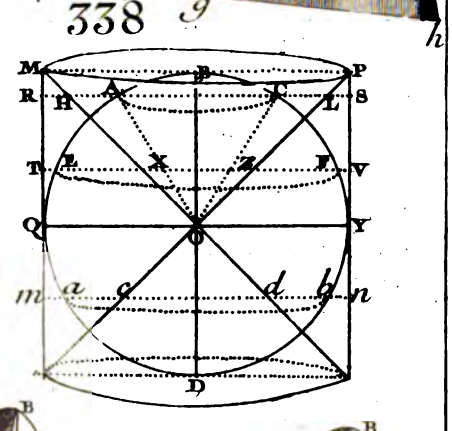

332

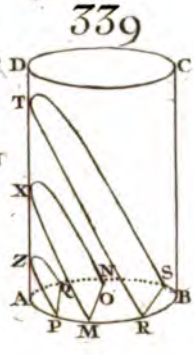

333

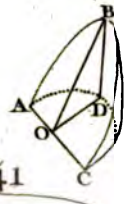

334

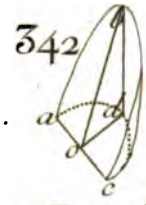

335

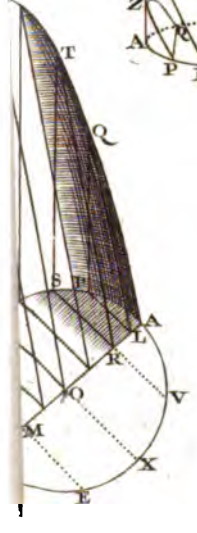

337

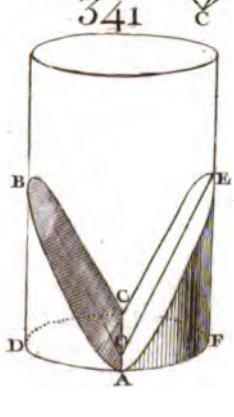

338

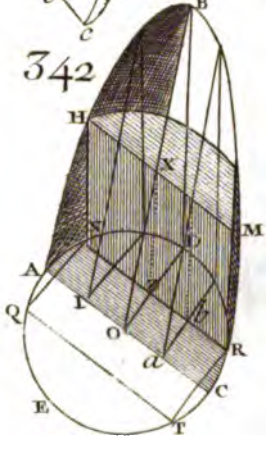

339

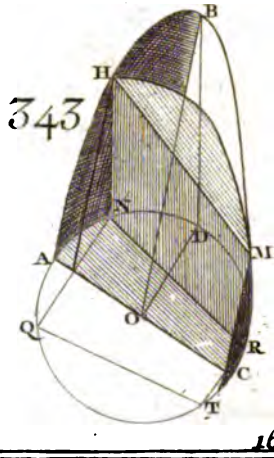


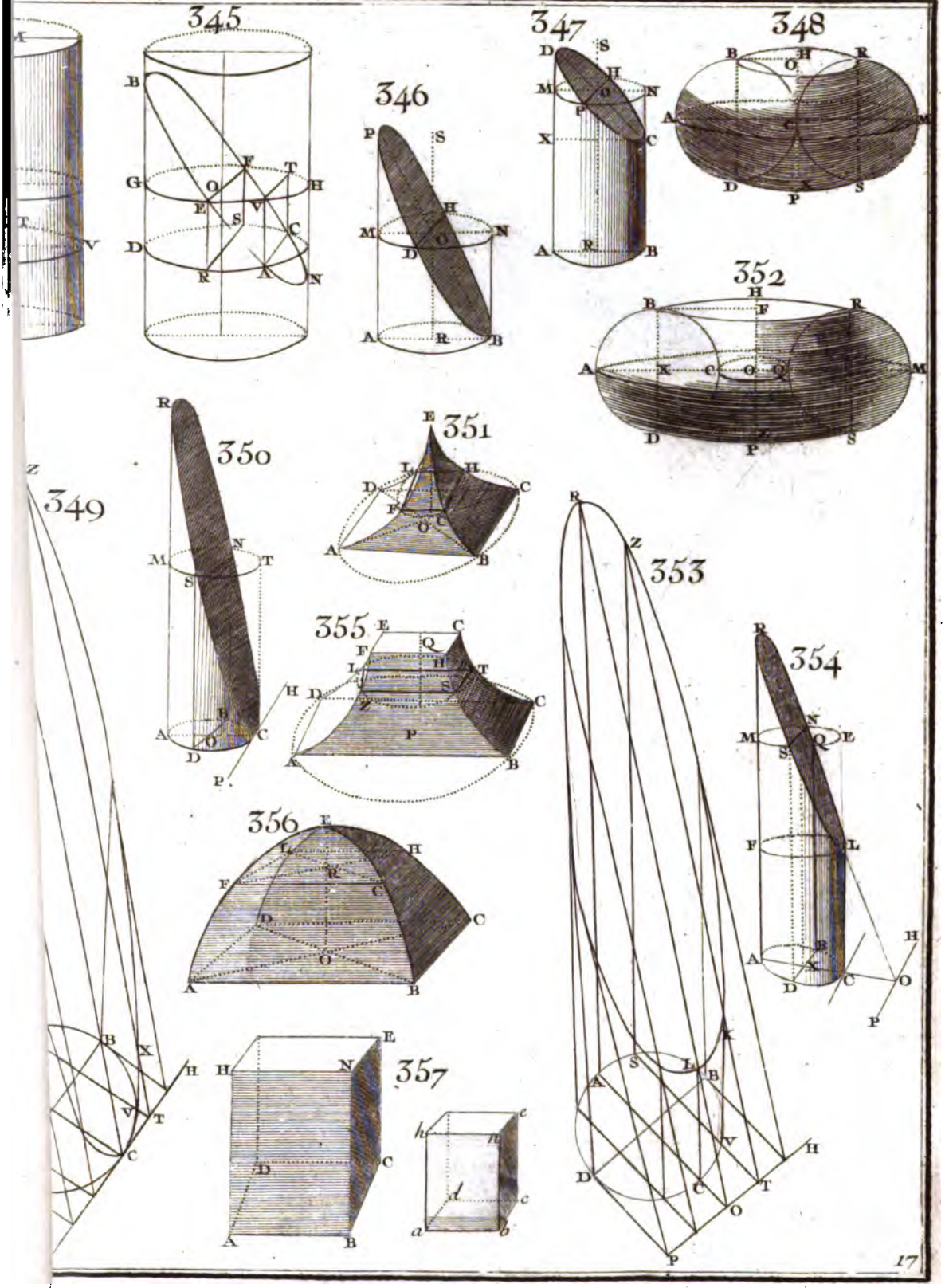

342

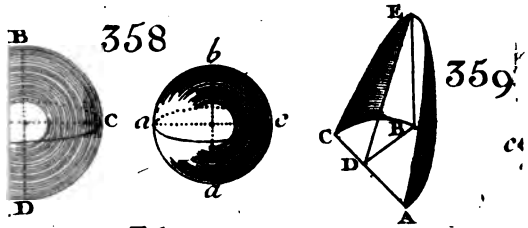


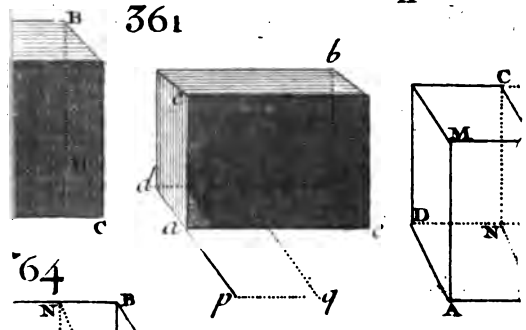

341

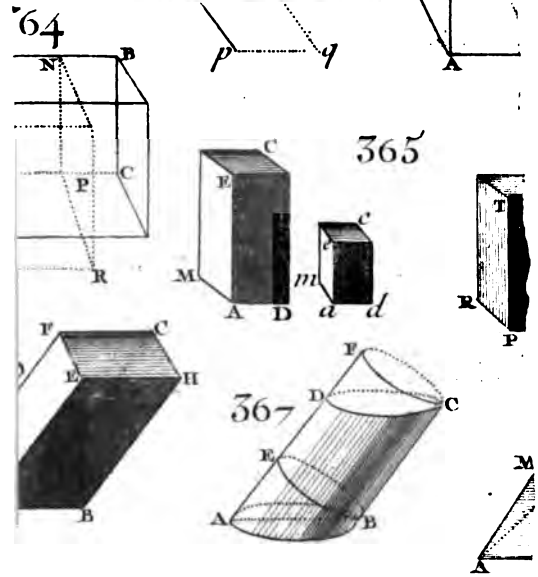

342

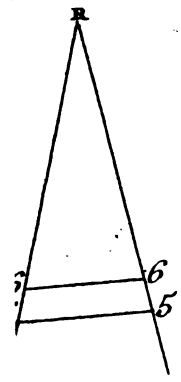

343

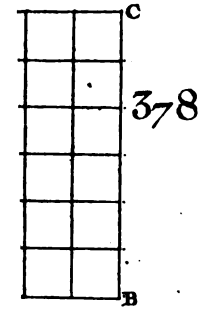

345
346
347
348
352
350
351
349
353
355
354
356
357
17


358
359
B
C
D
a
b
c
d
E
A


361
B
C
b
c
d
a
M
D
N
A
p
q


64
N
B
P
C
R
365
E
M
A
D
m
a
d
T
F
H
367
372
S
4
V
O

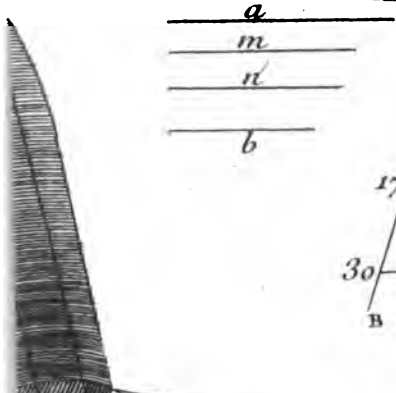

R
6
5


C
378
B

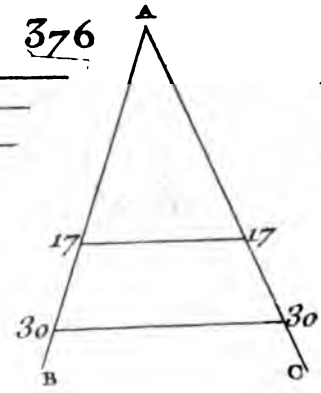
D
O

B
C

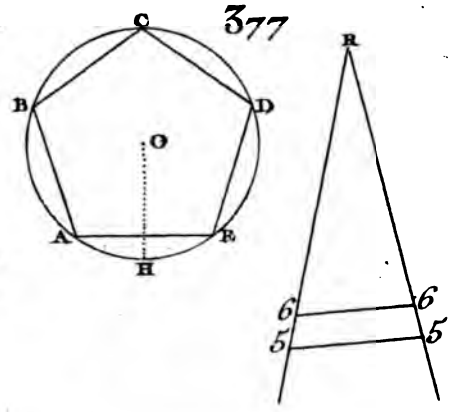
375

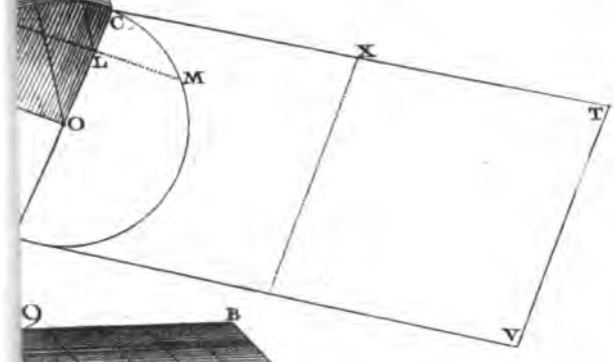


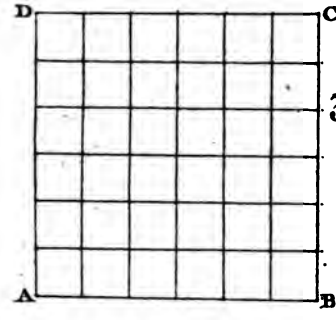
376



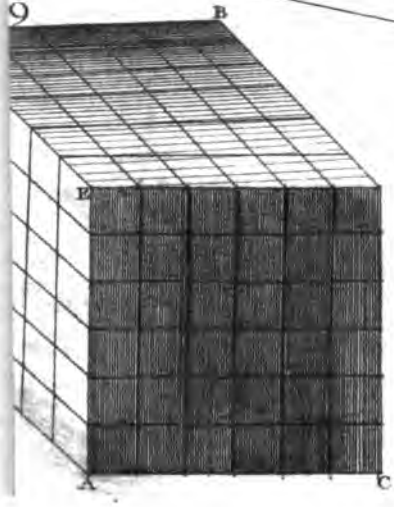
377



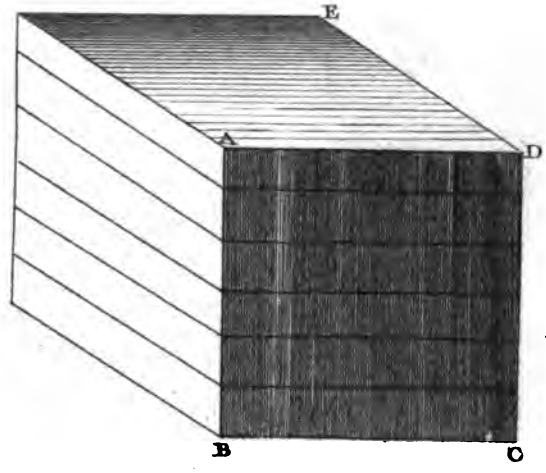


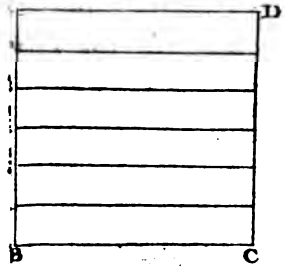


378

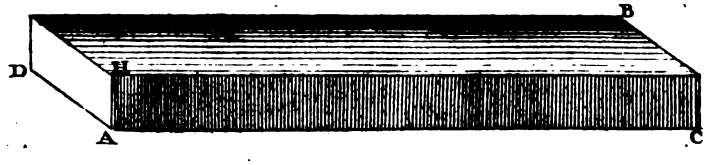


381

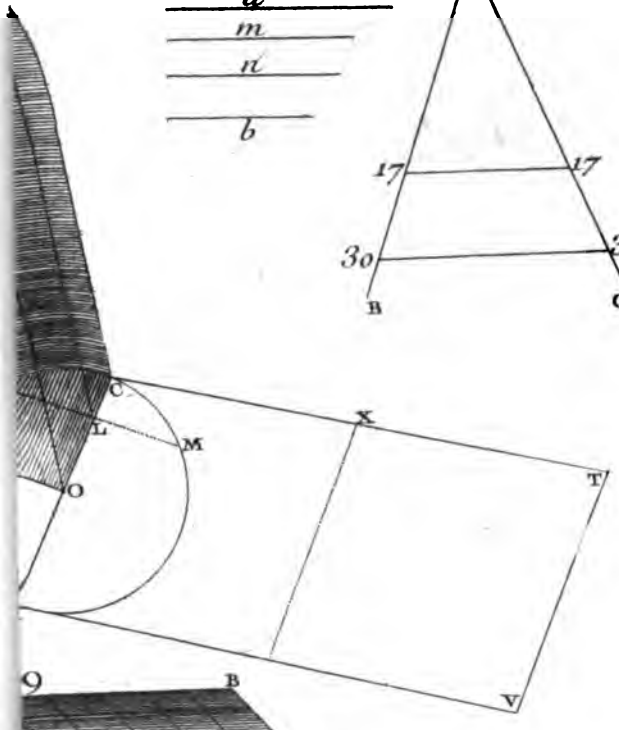




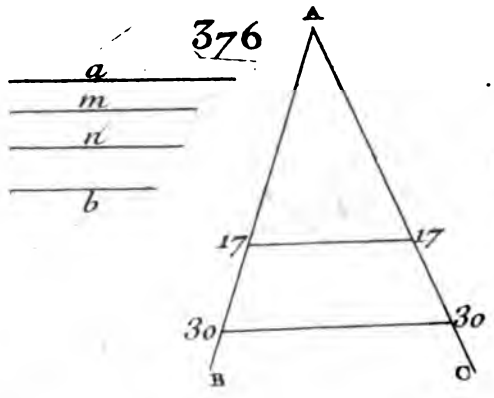
382



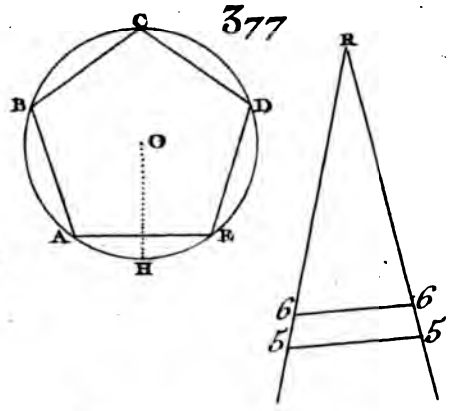
375



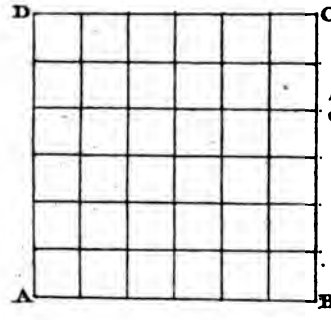
376

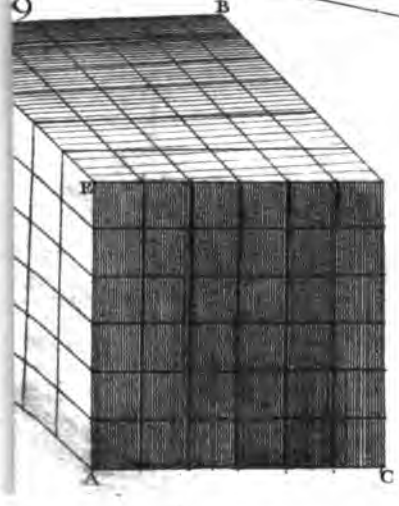


377

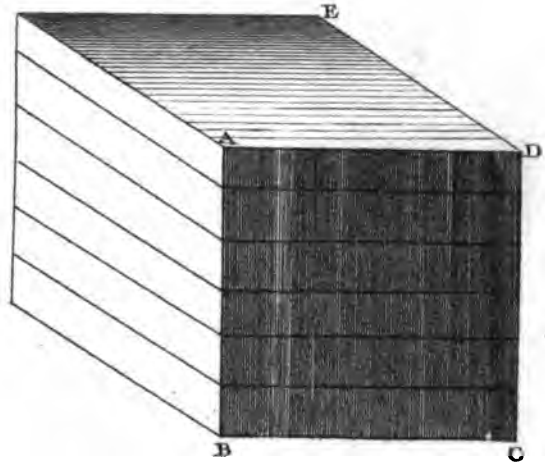


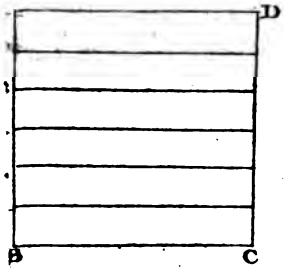
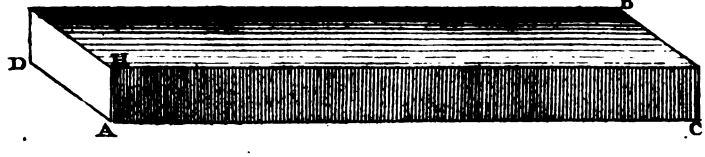
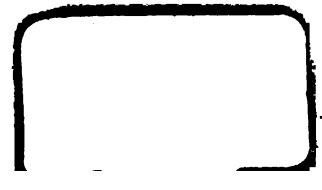
378





381





382